A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XII. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1962

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

KÖNYVISMERTETÉS

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XII. KÖTET 1. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1962

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XII. kötet 1. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

TENZORVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLÁSA

Írta: MOLNÁR FERENC*

1. A másodrendű tenzorok tulajdonságainak vizsgálata során a vektoranalízis jól ismert skalár-, ill. vektorváltozós függvényein túlmenően fellépnek újfajta, tenzorváltozós függvények: az $y=f(\mathbf{X})$ *skalár-tenzor* és az $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ *vektor-tenzor függvény*. Ilyenek például a változó $\mathbf{X}$ másodrendű tenzor skalárinvariánsai, vektorinvariánsa, abszolút értéke. Az alábbiakban a másodrendű és harmadrendű tenzorok tulajdonságaira[1] támaszkodva az említett tenzorváltozós függvények differenciálásának direkt tárgyalásával foglalkozunk.

A tenzorváltozós függvények deriváltjának a skalár- és vektorváltozós függvények deriváltjának mintájára történő értelmezéséhez szükségünk van a homogén lineáris skalár-tenzor és vektor-tenzor függvény fogalmára.

Az $y=f(\mathbf{X})$, ill. $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ függvényt *homogén lineárisnak* mondjuk, ha

$$f(c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2)=c_1f(\mathbf{X}_1)+c_2f(\mathbf{X}_2), \tag{1}$$

ill.

$$\mathbf{f}(c_1\mathbf{X}_1+c_2\mathbf{X}_2)=c_1\mathbf{f}(\mathbf{X}_1)+c_2\mathbf{f}(\mathbf{X}_2), \tag{2}$$

ahol $\mathbf{X}_1$ és $\mathbf{X}_2$ és az $\mathbf{X}$ tenzorváltozó tetszőleges értékei, c_1 és c_2 tetszőleges skalárok.

A fenti definíciókból egyszerűen adódik a következő tétel:

1. TÉTEL. *Az* $y=f(\mathbf{X})$, *ill.* $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ *függvény akkor és csak akkor homogén lineáris, ha* $y=\mathbf{A}\bullet\mathbf{X}$, *ill.* $\mathbf{y}=\mathcal{A}\bullet\mathbf{X}$, *ahol* $\mathbf{A}$, *ill.* $\mathcal{A}$ *rögzített másodrendű, ill. harmadrendű tenzor.*[2]

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{A}\bullet\mathbf{X}$ és $\mathcal{A}\bullet\mathbf{X}$ szorzatok $\mathbf{X}$-nek nyilván homogén lineáris függvényei. Ha viszont $y=f(\mathbf{X})$, ill. $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ homogén lineáris, akkor (1), ill. (2) alapján az $\mathbf{X}$ tenzor $\mathbf{x}_k(x_{ik})$ $(i, k=1, 2, 3)$ vektorkomponenseire és a derékszögű koordinátarendszert meghatározó $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ egységvektorra

$$f(\mathbf{X})=f\left(\sum_{k=1}^{3}\mathbf{x}_k\circ\mathbf{e}_k\right)=\sum_{i,k=1}^{3}x_{ik}f(\mathbf{e}_i\circ\mathbf{e}_k),$$

ill.

$$\mathbf{f}(\mathbf{X})=\mathbf{f}\left(\sum_{k=1}^{3}\mathbf{x}_k\circ\mathbf{e}_k\right)=\sum_{i,k=1}^{3}x_{ik}\mathbf{f}(\mathbf{e}_i\circ\mathbf{e}_k).$$

* A szerző 1962. jan. 18-án 29 éves korában elhunyt. Korai eltávoztával a tudomány reményteljes kutatót vesztett. *Szerkesztőség.*

[1] L. pl. [1].

[2] $\mathbf{A}\bullet\mathbf{X}=s_1(\mathbf{A}^*\mathbf{X})$ az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{X}$ tenzorok *belső* vagy *skaláris szorzata,* $\mathcal{A}\bullet\mathbf{X}=\mathbf{v}_1(\mathcal{A}^*\odot\mathbf{X})$ az $\mathcal{A}$ és $\mathbf{X}$ tenzorok (elsőrendű) *belső szorzata.* L. [1], (1.38), ill. (5.50).

Innen, felhasználva az

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{X} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_{ik}, \quad \text{ill.} \quad \mathcal{A} \bullet \mathbf{X} = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{a}_{ik} x_{ik}$$

formulákat (ahol a_{ik} $(i, k=1, 2, 3)$ az $\mathbf{A}$ másodrendű tenzor skalárkomponensei, $\mathbf{a}_{ik}$ $(i, k=1, 2, 3)$ az $\mathcal{A}$ harmadrendű tenzor vektorkomponensei)[3], kapjuk, hogy az

$$a_{ik} = f(\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_k), \quad \text{ill.} \quad \mathbf{a}_{ik} = \mathbf{f}(\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_k) \qquad (i, k=1, 2, 3)$$

komponensekkel meghatározott $\mathbf{A}$, ill. $\mathcal{A}$ tenzorral állításunk teljesül.

2. A következőkben — a most bizonyított tételre támaszkodva — a skalár- és vektorváltozós függvények mintájára[4] értelmezzük a tárgyalt tenzorváltozós függvények deriváltját.

Az $y=f(\mathbf{X})$, ill. $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ függvényt *differenciálhatónak* mondjuk az $\mathbf{X}_0$ helyen, ha — $\Delta\mathbf{X}$-szel jelölve $\mathbf{X}$-nek $\mathbf{X}_0$-ból kiinduló tetszőleges megváltozását — van olyan $\mathbf{D}$ és $\mathbf{E}$ másodrendű, ill. $\mathcal{D}$ és $\mathcal{E}$ harmadrendű tenzor, hogy $f(\mathbf{X})$, ill. $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ megfelelő megváltozására

$$\Delta f = \mathbf{D} \bullet \Delta\mathbf{X} + \mathbf{E}(\Delta\mathbf{X}) \bullet \Delta\mathbf{X}, \tag{3}$$

ill.

$$\Delta\mathbf{f} = \mathcal{D} \bullet \Delta\mathbf{X} + \mathcal{E}(\Delta\mathbf{X}) \bullet \Delta\mathbf{X}, \tag{4}$$

ahol $\mathbf{E}(\Delta\mathbf{X}) \to \mathbf{O}$, ill. $\mathcal{E}(\Delta\mathbf{X}) \to \mathcal{O}$, midőn $\Delta\mathbf{X} \to \mathbf{O}$. $\mathbf{D}$, ill. $\mathcal{D}$ az $y=f(\mathbf{X})$, ill. $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ függvény *deriváltja*. Jelölés: $\mathbf{D} = \dfrac{df}{d\mathbf{X}} = f'$, ill. $\mathcal{D} = \dfrac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{f}'$.

Az így definiált deriváltak *egyértelműsége* könnyen igazolható. Ha ugyanis $\mathbf{D}_1$ és $\mathbf{D}_2$, ill. $\mathcal{D}_1$ és $\mathcal{D}_2$ kielégítik a (3), ill. (4) alatti összefüggéseket, akkor $\Delta\mathbf{X} = \Delta x(\mathbf{e} \circ \mathbf{f})$ választása esetén (ahol $\mathbf{e}$ és $\mathbf{f}$ tetszőleges egységvektorok) a tetszőleges $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra fennálló[5]

$$\mathbf{A} \bullet (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = (\mathbf{A}\mathbf{b})\mathbf{a}, \tag{5}$$

ill.

$$\mathcal{A} \bullet (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = (\mathcal{A}\mathbf{b})\mathbf{a} \tag{6}$$

összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$[(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)\mathbf{f}]\mathbf{e} = 0, \quad \text{ill.} \quad [(\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2)\mathbf{f}]\mathbf{e} = \mathbf{0},$$

[3] L. [1], (1.40), ill. (5.51).

[4] Vö. [2], 49; [3], 110, 212, 431 és 552.

[5] (5) igazolása:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = s_1 [\mathbf{A}^* (\mathbf{a} \circ \mathbf{b})] = s_1 (\mathbf{A}^* \mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = (\mathbf{A}^* \mathbf{a})\mathbf{b} = (\mathbf{A}\mathbf{b})\mathbf{a}$$

([1], (1.3) és (1.33) felhasználásával).

(6) igazolása:

$$\mathcal{A} \cdot (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = \mathbf{v}_1 [\mathcal{A}^* \odot (\mathbf{a} \circ \mathbf{b})] = \mathbf{v}_1 (\mathcal{A}^* \mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = (\mathcal{A}^* \mathbf{a})\mathbf{b} = (\mathcal{A}\mathbf{b})\mathbf{a}$$

(az [1], (2.3) alapján könnyen igazolható $\mathcal{A} \odot (\mathbf{u} \circ \mathbf{v}) = \mathcal{A}\mathbf{u} \circ \mathbf{v}$ összefüggés, továbbá [1], (5.44) és (4.1) felhasználásával).

ahonnan már következik, hogy

$$\mathbf{D}_1=\mathbf{D}_2, \quad \text{ill.} \quad \mathfrak{D}_1=\mathfrak{D}_2.$$

A vektorváltozós függvények iránymenti deriváltjának fogalma a következőképpen általánosítható tenzorváltozós függvényekre:

Ha $\mathbf{X}=\mathbf{x}\circ\mathbf{e}$, ahol $\mathbf{e}$ rögzített egységvektor, akkor $y=f(\mathbf{X})$ és $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ az $\mathbf{x}$ vektorváltozó függvényeinek tekinthetők. Az így kapott $y=f(\mathbf{x})$ és $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ függvények deriváltjait az eredeti tenzorváltozós függvények $\mathbf{e}$ irányú *iránymenti deriváltjainak* nevezzük.

A deriváltak (3), ill. (4) alatti definíciójából $\Delta\mathbf{X}=\Delta\mathbf{x}\circ\mathbf{e}$ helyettesítéssel és (5), ill. (6) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\Delta f=(\mathbf{De})\Delta\mathbf{x}+(\mathbf{Ee})\Delta\mathbf{x},$$

ill.

$$\Delta\mathbf{f}=(\mathfrak{D}\mathbf{e})\Delta\mathbf{x}+(\mathfrak{E}\mathbf{e})\Delta\mathbf{x},$$

ahol $\mathbf{Ee}\to\mathbf{0}$, ill. $\mathfrak{E}\mathbf{e}\to\mathbf{O}$, midőn $\Delta\mathbf{x}\to\mathbf{0}$. Innen az iránymenti deriváltak:

$$\frac{df}{d\mathbf{x}}=\mathbf{De}, \quad \text{ill.} \quad \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}=\mathfrak{D}\mathbf{e}. \tag{7}$$

(7) alapján a $\mathbf{D}$, ill. $\mathfrak{D}$ derivált komponensei:

$$\mathbf{d}_k=\mathbf{De}_k=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_k}, \quad d_{jk}=\mathbf{e}_j\mathbf{De}_k=\frac{\partial f}{\partial x_{jk}}, \tag{8}$$

ill.

$$\mathbf{D}_k=\mathfrak{D}\mathbf{e}_k=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_k}, \quad \mathbf{d}_{jk}=(\mathfrak{D}\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_j=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_{jk}}, \quad d_{ijk}=\mathbf{e}_i(\mathfrak{D}\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_j=\frac{\partial f_i}{\partial x_{jk}}. \tag{9}$$

Bevezetve a $\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x_{jk}}\right)$ szimbolikus másodrendű *nabla tenzort*, (8), ill. (9) felhasználásával egyszerűen következik, hogy

$$\mathbf{D}=\nabla f, \quad \text{ill.} \quad \mathfrak{D}=\mathbf{f}\circ\nabla.$$ [6]

3. A deriváltak definíciója alapján egyszerűen bizonyíthatók a következő *differenciálási szabályok:*

$$(u+v)'=u'+v', \qquad (\mathbf{u}+\mathbf{v})'=\mathbf{u}'+\mathbf{v}', \tag{10}$$

$$(uv)'=uv'+vu', \tag{11}$$

$$(u\mathbf{v})'=u\mathbf{v}'+\mathbf{v}\circ u', \tag{12}$$

$$(\mathbf{uv})'=\mathbf{uv}'+\mathbf{vu}', \tag{13}$$

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})'=\mathbf{u}\times\mathbf{v}'-\mathbf{v}\times\mathbf{u}', \tag{14}$$

[6] Ui. $[(\mathbf{f}\circ\nabla)\mathbf{e}_k]\mathbf{e}_j=(\mathbf{f}\circ\nabla\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_j=\mathbf{f}(\mathbf{e}_j\nabla\mathbf{e}_k)=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_{jk}}=\mathbf{d}_{jk}$ $(j, k=1, 2, 3)$ (v.ö. [1], (2. 2.))

ahol $u(\mathbf{X})$, $v(\mathbf{X})$, $\mathbf{u}(\mathbf{X})$, $\mathbf{v}(\mathbf{X})$ differenciálható függvények.[7] Továbbá, ha $f(\mathbf{X})$, $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ és $\mathbf{X}(t)$ differenciálhatók, akkor $f(\mathbf{X}(t))$ és $\mathbf{f}(\mathbf{X}(t))$ is differenciálhatók és

$$(15) \qquad \frac{df}{dt}=\frac{df}{d\mathbf{X}}\bullet\frac{d\mathbf{X}}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{f}}{dt}=\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{X}}\bullet\frac{d\mathbf{X}}{dt}.$$

4. Az $y=f(\mathbf{X})$ függvény differenciálhatóságából nyilvánvalóan következik az $\mathbf{x}_k$ $(k=1,2,3)$ vektorkomponensek és az x_{jk} $(j,k=1,2,3)$ skalárkomponensek szerinti parciális differenciálhatósága. A differenciálhatóságra vonatkozólag elegendő feltételt ad a következő tétel:

2. TÉTEL. *Ha az $y=f(\mathbf{X})$ függvény parciálisan differenciálható az $\mathbf{X}$ tenzor $\mathbf{x}_k$, ill. x_{jk} $(j,k=1,2,3)$ komponensei szerint, és ezek a parciális deriváltak az $\mathbf{X}_0$ helyen folytonosak, akkor $y=f(\mathbf{X})$ is differenciálható az $\mathbf{X}_0$ helyen és deriváltja a $\mathbf{d}_k=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_k}$, ill. $d_{jk}=\frac{\partial f}{\partial x_{jk}}$ komponensekkel meghatározott $\mathbf{D}$ tenzor.*

BIZONYÍTÁS. Felbontva az $y=f(\mathbf{X})$ függvény Δf megváltozását az $\mathbf{x}_k\circ\mathbf{e}_k$, ill. $x_{jk}(\mathbf{e}_j\circ\mathbf{e}_k)$ $(j,k=1,2,3)$ „irányú" megváltozások összegére és felhasználva a skalár-vektor, ill. skalár-skalár függvényekre vonatkozó középértéktételt, továbbá az

$$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}=\sum_{k=1}^{3}\mathbf{a}_k\mathbf{b}_k=\sum_{j,k=1}^{3}a_{jk}b_{jk}$$

összefüggést,[8] kapjuk, hogy

$$\Delta f=\sum_{k=1}^{3}\Delta f_k=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_k}\Delta\mathbf{x}_k+\sum_{k=1}^{3}\boldsymbol{\varepsilon}_k\Delta\mathbf{x}_k=\mathbf{D}\bullet\Delta\mathbf{X}=\mathbf{E}\bullet\Delta\mathbf{X},$$

ill.

$$\Delta f=\sum_{j,k=1}^{3}\Delta f_{jk}=\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_{jk}}\Delta x_{jk}+\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{jk}\Delta x_{jk}=\mathbf{D}\bullet\Delta\mathbf{X}+\mathbf{E}\bullet\Delta\mathbf{X},$$

ahol $\mathbf{E}$ az $\boldsymbol{\varepsilon}_k$, ill. ε_{jk} $(j,k=1,2,3)$ komponensekkel meghatározott tenzor, és így a $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_k}$, ill. $\frac{\partial f}{\partial x_{jk}}$ $(j,k=1,2,3)$ parciális deriváltak folytonossága miatt $\mathbf{E}\to\mathbf{O}$, midőn $\Delta\mathbf{X}\to\mathbf{O}$. A kapott összefüggésekből (3) alapján állításunk közvetlenül leolvasható.

Az $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ függvény differenciálhatóságára vonatkozólag (10), (12), (13), valamint [1], (4. 10) és (4. 33) felhasználásával egyszerűen adódik a következő tétel:

[7] (12), (13), ill. (14) bizonyításánál felhasználjuk a könnyen igazolható

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{c}=(\mathbf{c}\circ\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}, \quad \mathbf{c}(\mathcal{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{c}\mathcal{A})\cdot\mathbf{B},$$

ill.

$$\mathbf{c}\times(\mathcal{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{c}\times\mathcal{A})\cdot\mathbf{B}$$

összefüggéseket. (Vö. [1], (4.31), (5.45); (5.4), (4.10), (4.20); ill. (4.36), (5.47).)

[8] L. [1], (1.40).

3. TÉTEL. *Az* $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ *függvény akkor és csak akkor differenciálható, ha az* $y_i=f_i(\mathbf{X})$ $(i=1, 2, 3)$ *függvények differenciálhatók és*

$$\frac{dy_i}{d\mathbf{X}}(*\mathfrak{D})*\mathbf{e}_i \qquad (i=1,2,3).$$

5. Skalár-tenzor függvények körében érvényes a skalár-vektor függvényekre vonatkozó középértéktétel következő analogonja:

4. TÉTEL. *Ha* $y=f(\mathbf{X})$ *az* $\mathbf{X}=\mathbf{X}_0+t\Delta\mathbf{X}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ *tenzorhelyeken differenciálható, akkor van olyan rögzített* $\mathbf{X}^*=\mathbf{X}_0+t^*\Delta\mathbf{X}$ $(0\leqq t^*\leqq 1)$ *tenzor, hogy a* $\Delta\mathbf{X}$*-hez tartozó* Δf *megváltozásra*

$$\Delta f=\left.\frac{df}{d\mathbf{X}}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*}\bullet\Delta\mathbf{X}.$$

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{X}=\mathbf{X}_0+t\Delta\mathbf{X}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ tenzorhelyeken $y=f(\mathbf{X})=f(\mathbf{X}(t))$, így a skalár-skalár függvényekre vonatkozó középértéktétel, valamint (15) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\Delta f=\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t^*}\Delta t=\left.\frac{df}{d\mathbf{X}}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*}\bullet\Delta\mathbf{X},$$

amint állítottuk.

IRODALOM

[1] MOLNÁR F., Harmadrendű tenzorok és tenzor-vektor függvények direkt tárgyalása, *MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl.*, **11** (1961).
[2] SZENTMÁRTONY T., *Vektor- és tenzorszámítás* (Budapest, 1948).
[3] PACH ZS. PÁLNÉ—FREY T., *Vektor- és tenzoranalízis* (Budapest, 1951).

(Beérkezett: 1961. I. 2.)

A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI INFORMÁCIÓFOGALOM NÉHÁNY KÉRDÉSÉRŐL

Írta: VINCZE ISTVÁN

A $\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \sum_1^n p_i = 1\right)$ diszkrét valószínűségeloszlás entrópiáját, azaz bizonytalanságának mértékét SHANNON [4] a

$$-\sum_1^n p_i \log p_i$$

formulával definiálta. Folytonos változó esetére az ún. Boltzmann-féle H-függvényt adta:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx,$$

ahol $f(x)$ a valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. SHANNON és más szerzők is kifejezésre juttatják, hogy a H-függvény nem tekinthető a diszkrét esetre adott fenti formula folytonos esetre való kiterjesztésének. [5, 6] dolgozatainkban rámutattunk arra, hogy a Shannon-féle diszkrét entrópia folytonos eloszlású változóra való egy lehető, közvetlen és természetes kiterjesztése az ún. I-divergencia kifejezéshez vezet, amelyben az eredeti változó sűrűségfüggvényén kívül egy további sűrűségfüggvény, tehát látszólag egy új elem lép fel.

Az alábbiakban a folytonos eloszlású változó ezen információfogalmának néhány elvi és gyakorlati kérdésével foglalkozunk (1. és 2. §), majd a 3. §-ban egy alkalmazásával a matematikai statisztikában, amely a konfidenciaintervallum fogalmához vezet. Az I-divergencia számos más matematikai statisztikai alkalmazását illetően utalunk S. KULLBACK könyvére [2].

1. §. A bizonytalanság mértéke folytonos eloszlás esetén

1. Tekintsük valamely kísérlet vagy jelenség esetében a bizonyos esemény egy felbontását egymást kizáró eseményekre, vagyis egy teljes eseményrendszert:

$$\mathfrak{A}: I = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Legyenek a megfelelő valószínűségek: $p_1, p_2, \ldots, p_n, \sum_1^n p_i = 1$.

Ezen eseményrendszer SHANNON által definiált entrópiája, mint ismeretes:

$$E_n = \sum_1^n p_i \log \frac{1}{p_i} \qquad (0 \leq E_n \leq \log n). \tag{1}$$

Eseményrendszer helyett beszélhetünk arról a ξ valószínűségi változóról, amely valamely $k_1, k_2, \ldots, k_n$ értékeket vehet fel és amelyre az $A_i = \{\xi = k_i\}$ reláció érvényes. Az (1) formula mindenesetre invariáns a változó minden olyan transzformációjával szemben, ami különböző értékeket különböző értékekbe visz át, vagyis nem függ a változó értékkészletétől, hanem csakis a valószínűségek eloszlásától.

Ha ξ folytonos eloszlású változó $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ eloszlásfüggvénnyel, akkor az (1) formula közvetlen alkalmazása nem vezet erdeményre, mert határátmenetben végtelen értéket ad. SHANNON folytonos változó esetére az

$$E(\xi) = -\int f(x) \log f(x) dx$$

formulát ajánlotta, amely már nem rendelkezik E_n néhány kívánatos tulajdonságával, mint a nemnegativitás, vagy az invariancia a változó értéktranszformációjával szemben.

Az (1) formulának folytonos esetre való kiterjesztéséhez néhány megjegyzést teszünk:

a) Több szerzővel egyetértésben kifejezésre juttatjuk, hogy az entrópia nem az eloszlás, hanem az eseményrendszer entrópiája:

$$E_n(\mathfrak{A}) = \sum_1^n p_i \log \frac{1}{p_i}. \tag{1'}$$

Ugyanazon jelenségnél általában a bizonyos esemény többféle felbontásáról beszélhetünk: az $\mathfrak{A}$ mellett az

$$\mathfrak{A}' : I = A_1' + A_2' + \ldots + A_{n'}',$$

$$\mathfrak{A}'' : I = A_1'' + A_2'' + \ldots + A_{n''}'',$$

stb. felbontásokról. Amikor tehát az entrópia kifejezéseként, illetve értékeként az (1)-ben megjelöltet választottuk, hallgatólagosan azzal a feltételezéssel éltünk, hogy bennünket az $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots$ lehető felbontások közül az $\mathfrak{A}$ felbontás érdekel. Más esetben az entrópia értékeként ettől különböző adódhatnék.

b) Térjünk át az entrópia kifejezése helyett a „kiegészítő" fogalomra, vagyis az

$$I_n(\mathfrak{A}) = \log n - E_n(\mathfrak{A}) = \sum_1^n p_i \log np_i \qquad (0 \leqq I_n \leqq \log n) \tag{2}$$

kifejezésre, amit az $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ eseményrendszer információjának (röviden: információnak) fogunk nevezni.

c) Amikor a folytonos eloszlású ξ valószínűségi változó entrópiáját, illetve információját a diszkrét esetre vonatkozó (1), ill. (2) formulára akarjuk visszavezetni, nem hagyhatjuk figyelmen kívül a szóban forgó eseményteret, ill. az azon értelmezett σ-algebrát. Ez a megjegyzés — az a) alatt mondottak figyelembevételével — azt jelenti, hogy folytonos eloszlás esetén a számegyenest nem oszthatjuk — önkényesen — ekvidisztans részekre, hanem minden n-re olyan felosztást kell tekintenünk, amely az eseménytérnek „bennünket érdeklő", ill. a problémának megfelelő felosztásának felel meg.

Fenti meggondolások alapján jutottunk említett dolgozatunkban a ξ valószínűségi változóval kapcsolatos „információnak"

$$(3) \qquad I_\Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{\varphi(x)}\, dx$$

kifejezéséhez, ahol $f(x)$ a ξ sűrűségfüggvénye, míg a $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ eloszlásfüggvényt „érdeklődésünk eloszlásának" neveztük. E fogalommal kapcsolatban a következőket jegyzem meg:

α) A (3) alatti információt ξ-nek a $\Phi(x)$ eloszlásra vonatkozó „relatív" információjának neveztük, vagyis látszólag a Shannon-féle „abszolútnak" tekinthető információval szemben relatív fogalom. Valójában nem kevésbé abszolút, mint a diszkrét esetre vonatkozó entrópia (1) alatti kifejezése, amely a választott $\mathfrak{A}$ felbontásra vonatkoztatott; sokkal inkább tekinthető mind (1), mind (3) relatív mérőszámnak a mondott értelemben. Számos gyakorlati példa adható arra, hogy ugyanazon jelenség bennünket különböző kimenetelei (felbontásai) szempontjából érdekelhet és ez más-más entrópia-értékhez vezet.

β) A (3) alatti információ mindig nemnegatív, ami külön bizonyításra nem szorul, ez a diszkrét esetre vonatkozó hasonló tulajdonság következménye; ugyanis (3) közvetlenül adódik (2)-ből és a határátmenetnél ez a tulajdonság változatlan marad.

γ) A (3) alatti információ a változó monoton transzformációjával szemben invariáns, vagyis ha $y = t(x)$ és $t(x) > t(x')$, ha $x > x'$, akkor az $\eta = t(\xi)$ változóra:

$$I_\Phi(\xi) = I_{\Phi'}(\eta),$$

ahol Φ' a transzformált érdeklődéseloszlás.

Ellentétben azonban a diszkrét esettel, ahol a felbontás általában a gyakorlati problémából közvetlenül adódik, a folytonos esetben az „érdeklődés eloszlásának" $\Phi(x)$-nek megválasztása, illetve meghatározása problematikus lehet, és (A. PEREZ egy megjegyzése szerint) hasonlóságot mutat az a priori eloszlás kérdésével a Bayes-féle problémakör esetében. Erre a kérdésre térünk a következő pontban.

2. §. Az érdeklődés eloszlásáról

Legyen ismét a ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$, amelyről feltesszük, hogy pozitív az egész x-tengelyen, ugyancsak legyen $\varphi(x) = \Phi'(x) > 0$ $-\infty < x < +\infty$-re. Az

$$\frac{f(x)dx}{\varphi(x)dx}$$

információelem megadja, hogy az $\{x \leqq \xi < x + dx\}$ esemény esetén egységnyi érdeklődésre eloszlásunkból mennyi jut. Ennek valamely függvényének várható értéke szolgálhat az információ mértékéül:

$$\mathbf{M}_\xi\left[\psi\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) f(x)dx.$$

Az információelméletben, fizikában és matematikai statisztikában a $\psi(x) = \log x$ kitüntetett szerepet játszik. Más függvényeket illetően RÉNYI ALFRÉD [3] dolgozatára utalunk.

A $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ eloszlásnak eleve valamely értelmezést adni, többet, mint az előző paragrafusban tettünk, nem volna helyes. Más-más alkalmazási területen nyilván más-más értelmezése adódik. Az alábbiakban négyféle ilyen lehető értelmezésre adunk példát: a) gazdaságossági, b) valamely jelenség megfigyelésének módjából adódó, c) a természet által nyújtott értelmezésre; végül d) valamely a sztochasztikus rendszerre vonatkozó előzetes információ szolgáltathatja az érdeklődés eloszlását, amire a 3. §-ban térünk ki.

a) Legyen az (x, y) síkban a $\mathfrak{G}$ zárt tartomány egy mezőgazdasági terület. Jelentse $f(x, y)$ a jégeső sűrűségeloszlását ezen a területen pl. július hónapban. A következő évekre vonatkozó meggondolásainkhoz az információ mértékét nyilván igen egyoldalú volna csupán az $f(x, y)$ segítségével megadni. Közelfekvő annak a $\varphi(x, y)$ függvénynek konstrukciója és az érdeklődés mértékéül való választása, amelyre $\varphi(x, y)dxdy$ az (x, y) pont környezetében levő terméseredmény értékével arányos. Az $f(x, y)$ és $\varphi(x, y)$ sűrűségfüggvények erős diszkrepanciája az információ nagy értékéhez vezet, ami arra utal, hogy a várható kár nagy valószínűséggel kicsiny.

b) Az (x, y)-sík x-tengelyén véletlenszerűen pontszerű jelek keletkeznek az $f(x)$ eloszlássűrűség szerint. A megfigyelő műszer az $(x=0, y=1)$ pontban helyezkedik el és erre nézve csak az bír jelentőséggel, hogy mely irányból kapja a jelet. Ha tehát az információt (entrópiát) a műszerre vonatkozólag akarjuk mérni, akkor figyelembe kell venni, hogy bármely $d\alpha$-nyílásszög ugyanazon jelentőségű, ami az x-tengelyre átszámítva a

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

Cauchy-féle eloszláshoz vezet.

Más kérdés az, hogy az így számított információ milyen objektív jelentéssel bír a megfigyelő rendszerre. Ilyennek feltételezését bizonyos esetekben jogosulttá teszi, ha arra gondolunk, hogy ugyanaz a sztochasztikus rendszer különböző fizikai rendszerekre különböző hatással lehet.

c) INGARDEN és URBANIK [1] dolgozatukban figyelemre méltó kezdeményezést tesznek az információ és valószínűség fogalmainak viszonylatában: az információ mennyiség fogalmát axiomatizálják — ezt téve elsődlegesnek — majd ebből konstruálják a valószínűség fogalmát, ill. mérőszámát. Mint említik, vannak szituációk a fizikában, ahol az információ (pl. egy makroszkopikus rendszer entrópiája) ismert és nagy pontossággal mérhető, ugyanakkor a valószínűségeloszlás lényegében ismeretlen és gyakorlatilag nem mérhető. A szerzők említett dolgozatukban hívták fel a figyelmemet arra, hogy a statisztikus termodinamikában az „érdeklődés eloszlása", mint a modell által adott eloszlás, tehát *objektív módon* jelentkezik. Amikor ugyanis az energiaeloszlás entrópiáját számítják, az energiatengelyt nem egyenlő részekre osztják, hanem annak felosztását a fázistér egyenlő térfogatú részei determinálják.[1]

[1] Megjegyezzük, hogy ebben az esetben az érdeklődés eloszlása nem a szokott értelemben vett eloszlás, ugyanis végtelen intervallumon nem normálható. Erre — a fizikában gyakran előjövő — esetre jelen dolgozatunkban nem térünk ki.

3. §. Konfidenciaintervallumok

A matematikai statisztikában az információ mennyiség fogalma általában kétféle jelentésben szerepel. Az egyik esetben azt kívánjuk mérni, hogy egy eloszlás valamely paraméterére nézve bizonyos számú megfigyelés mennyi információt nyújt, aminek egyik mértéke R. A. FISHER ismert kifejezése. Másik esetben valamely ismert eloszlású változó esetén mérőszámot kívánunk adni arra a bizonytalanságra, ami a jelenséggel szemben egy következő kimenetel szempontjából fennáll, aminek mértékéül az entrópia különböző kifejezései szolgálnak. Az alábbiakban rámutatunk arra, hogy ez utóbbi felfogásból kiindulva az érdeklődés eloszlásának alkalmas megválasztásával hogyan jutunk el a konfidenciaintervallumokhoz.

Az $f(x)$ sűrűségű ξ valószínűségi változó $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$ érdeklődéseloszlásra vonatkozó információja, mint láttuk

$$I_\Phi(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log\frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx.$$

Ha az információ mértéke nagy, ez nagyjából azt jelenti, hogy ξ egy jövőben megfigyelt értéke nagy valószínűséggel esik olyan tartományra, amelyen érdeklődésünk mértéke kicsiny. Gondoljuk el, hogy $F(x)$-et nem ismerjük, de $\Phi(x)$-et és $I_\Phi(\xi)$-t ismerjük. Ekkor az $I_\Phi(\xi)=0$ vagy annak kicsiny értéke azt jelenti, hogy $f(x)$ és $\varphi(x)$ megegyeznek, ill. egymáshoz közel esnek.

Függjön most $F(x)$ egyetlen a ismeretlen paramétertől $(-\infty<a<\infty)$; $F(x)=F(x;a)$ és tekintsünk ξ-re nézve n számú független megfigyelést: $\xi_1, \xi_2,\dots, \xi_n$. Válasszuk érdeklődésünk eloszlásaként a

$$\Phi^*(x)=\Phi(x;\alpha)=F(x;\alpha)$$

eloszlásfüggvényt, ahol α az a paraméter valamely becslése:

$$\alpha=\alpha(\xi_1,\dots,\xi_n),\quad \text{vagyis legyen}$$

$$I_\alpha(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x;a)\log\frac{f(x;a)}{f(x,\alpha)}\,dx.$$

A konfidenciaintervallumok módszerének analógiájára válasszuk meg most a-t oly módon, hogy ez az információ „ne legyen túl nagy". Ezen a következőt értjük: $I_\alpha(F)$ nemnegatív és $\alpha=\alpha(\xi_1,\dots,\xi_n)$ miatt valószínűségi változó; mondhatjuk tehát, hogy ne legyen nagyobb, mint várható értékének valamilyen λ-szorosa $(\lambda>0)$. Vagyis

$$I_\alpha(\xi)<\lambda \mathbf{M}_\alpha(I_\alpha(\xi)). \tag{3.1}$$

Ez a reláció kedvező esetben a-ra nézve konfidenciaintervallumhoz vezet.[2] Lássunk néhány példát.

[2] Megfigyelhetjük, hogy az alábbi esetekben az intervallumba esés valószínűsége adott λ esetén valóban nem függ a keresett paraméter értékétől.

1. A normális eloszlás várható értéke, adott szórás mellett.

Legyen σ_0 az ismert szórás, μ az ismeretlen várható érték, $\alpha=\bar{\xi}=\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$,

$$F(x;\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma_0^2}}\,dt,$$

$$\Phi^*(x)=F(x;\bar{\xi})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\bar{\xi})^2}{2\sigma_0^2}}\,dt,$$

$$I_{\Phi^*}(F)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\mu)\log\frac{f(x;\mu)}{f(x;\bar{\xi})}\,dx=\frac{(\mu-\bar{\xi})^2}{2\sigma_0^2}.$$

Minthogy $\bar{\xi}$ sűrűségfüggvénye

$$f_n(\bar{x})=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_0}\,e^{-\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma_0^2}},$$

tehát

$$\mathbf{M}[I_{\Phi^*}(F)]=\frac{1}{2n}$$

vagyis a (3. 1) reláció a Neyman-féle

$$(\mu-\bar{\xi})^2<\lambda\,\frac{\sigma_0{}^2}{n}$$

kofidenciaintervallumhoz vezet, ami esetünkben egyértelműen és szimmetrikusnak adódik.

2. A normális eloszlás szórása ismert várható érték esetén. Legyen

$$s=s_n=\sqrt{\frac{\sum_1^n(\xi_i-\bar{\xi})^2}{n}}.$$

Ekkor

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$\varphi^*(x)=f(x;\mu,s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,s}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2s^2}},$$

$$I_{\Phi^*}(F)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\mu,\sigma)\log\frac{f(x;\mu,\sigma)}{f(x;\mu,s)}\,dx=\frac{1}{2}\left(\log\frac{s^2}{\sigma^2}+\frac{\sigma^2}{s^2}-1\right).$$

Ennek várható értékére a következőt nyerjük:

$$\mathbf{M}\left[\frac{1}{2}\left(\log\frac{s^2}{\sigma^2}+\frac{\sigma^2}{s^2}-1\right)\right]=\frac{1}{n-2}+\frac{1}{2}\left(\psi\left(\frac{n}{2}\right)-\log\frac{n}{2}\right)=c_n,$$

ahol $\psi(x)$ az ismert Euler-féle ψ-függvény,

$$\psi(x)=\frac{d}{dx}\log\Gamma(x),\qquad \psi(n)=\sum_{1}^{n-1}\frac{1}{k}-c,$$

c az Euler-féle állandó.

A szórásra innen az

$$1<\frac{\sigma^2}{s^2}e^{\frac{s^2}{\sigma^2}}<e^{2\lambda c_n+1}$$

relációt kapjuk és ha az $y=g(x)=\frac{1}{x}e^x$ kétértékű inverz függvényét $x=g_1^{-1}(y)$, $x<1$ és $x=g_2^{-1}(y)$, $x>1$ jelöli, akkor σ^2-re a nem szimmetrikus

$$s^2g_1^{-1}(2\lambda c_n+1)<\sigma^2<s^2g_2^{-1}(2\lambda c_n+1)$$

konfidenciaintervallumot nyerjük. Minthogy c_n nagyságrendje $\frac{1}{n}$, ennélfogva a σ^2-re kapott konfidenciaintervallum hossza $\frac{1}{\sqrt{n}}$ rendben tart adott λ mellett 0 felé, ha $n\to\infty$.

3. Az exponenciális eloszlás paramétere.

$$f(x;\lambda)=\lambda e^{-\lambda x},$$

$$\lambda\sim\frac{1}{\bar\xi}=\frac{n}{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n},$$

$$\varphi^*(x)=\frac{1}{\bar\xi}e^{-\frac{x}{\bar\xi}},$$

$$I_{\Phi^*}(\xi)=\int_0^\infty f(x;\lambda)\log\frac{f(x;\lambda)}{f\left(x;\frac{1}{\bar\xi}\right)}dx=\log\lambda\bar\xi+\left(\frac{1}{\lambda\bar\xi}-1\right),$$

$$\mathbf{M}[I_{\Phi^*}(\xi)]=\frac{1}{n-1}+\psi(n)-\log n,$$

ahonnan $\frac{1}{\lambda}$-ra a 2.-ben adott módon kapjuk az ismert konfidenciaintervallumot $\bar\xi$ segítségével.

IRODALOM

[1] INGARDEN, R. S.—URBANIK, K.: Information without probability. *Colloquium Mathematicum* **9** (1962), 131—150 o.
[2] KULLBACK, S.: *Information Theory and Statistics.* Wiley-New-York, 1959.
[3] RÉNYI, A.: On measures of entropy and information. *Fourth Berkeley Symposium on Probability and Statistics*, 1960. Vol. I. pp. 547—561.
[4] SHANNON, C. E.: A mathematical system of communication. *Bell System of Technical Journal*, **27** (1948), 379—423 o. és 623—656 o.
[5] VINCZE, I.: Az információelmélet egy fogalmának értelmezéséről. *Matematikai Lapok* **10** (1959), 255—266 o.
[6] VINCZE, I.: An interpretation of the *I*-divergence of information theory. *Transactions of the Second Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes*, from June 1 to 6. 1959. Prága 1960, 681—684. o.

(Beérkezett: 1961. X. 16.)

AZ INFORMÁCIÓ-AKKUMULÁCIÓ STATISZTIKUS TÖRVÉNYSZERŰSÉGEIRŐL

Írta: RÉNYI ALFRÉD

Bevezetés

A tudományos kutatás során és a gyakorlati életben egyaránt gyakran előfordul, hogy egy minket érdeklő tényállásra vonatkozó információ nem egyszerre jut teljes egészében birtokunkba, hanem azt részletekben szerezzük meg; az egyes, külön-külön keveset mondó adatokból — mintegy mozaikkövekből — lehet azután egy összképet kialakítani és a tényállást egészében felderíteni. *A teljes információt tehát részinformációk akkumulációja útján szerezzük meg.* Az információgyűjtés ezen folyamata során gyakran előfordul, hogy az egyes adatok részben átfedik egymást, és egy-egy új adat olyan információt is nyújt, amely az előzőleg szerzett adatokban már benne foglaltatik és csak részben ad valójában új felvilágosítást. Más szóval, az információ részletekben való gyűjtésénél általában bizonyos „redundancia" lép fel. Ezt a redundanciát csak úgy lehet kiküszöbölni, ha az információ gyűjtése igen jól átgondolt terv szerint történik; legtöbbször azonban ez olyan mértékben bonyolítja az információ összegyűjtését, hogy nem is célszerű erre törekedni.

Az információgyűjtés szóban forgó folyamata általában bizonyos véletlen elemeket is tartalmaz. Többnyire a véletlentől függ, hogy milyen részletadatok és milyen sorrendben jutnak az információt gyűjtő birtokába*.

Hogy az elmondottakat konkrétabbá tegyük, vizsgáljunk meg néhány példát. Első példaként tekintsük a kvalitatív kémiai analízis problémáját. Valamely anyagról meg akarjuk állapítani annak kémiai összetételét. E célból több vizsgálatnak, próbának vetjük alá az illető (homogénnek feltételezett) anyag egy-egy adagját. Minden egyes próba szűkíti a lehetőségek halmazát, míg végül elegendő számú próba után a lehetőségek halmaza egyetlenegy lehetőségre szűkül össze. Az egyes vizsgálatok részben egymást átfedő információt is nyújtanak. A vizsgálatok sorrendje befolyásolja azt, hogy milyen gyorsan sikerül a kérdést eldönteni. Persze, ha már eleve van bizonyos hipotézisünk, ez megkönnyíti az analízist, azonban minket az az eset érdekel, amikor a vizsgálat megkezdésekor még semmilyen támpontunk nincsen, és így a véletlennek is van bizonyos szerepe abban, hogy milyen sorrendben végezzük el az egyes vizsgálatokat.

Hasonló szituációval áll szemben az orvos is, amikor egy beteg diagnózisát kívánja megállapítani, e célból a beteget különböző vizsgálatoknak veti alá és ezek

* A valóságos helyzetet rendkívül bonyolítja, hogy az ember gyakran jut téves információkhoz is, vagyis a véletlen sokszor véletlen hibák (elírások, félreértések stb.) formájában is közrejátszik; ez a helyzet akkor, ha — az információelmélet szokásos terminológiájával élve — az egyes adatok „zajos" csatornán át jutnak el az információ gyüjtőjéhez. Bár az ilyen hamis adatok kiküszöbölése (pl. az adatok közötti ellentmondások felfedése útján) gyakran az információ feldolgozásának legnehezebb részét képezi, a kérdésnek ezzel az oldalával itt nem kívánunk foglalkozni; e kérdésre más alkalommal kívánunk visszatérni.

eredményeinek összevetése útján állapítja meg, hogy milyen betegségben szenved az illető beteg. Itt nagy szerepet játszik persze az orvos intuiciója és gyakorlata, amelyre támaszkodva már eleve csak kisszámú lehetőségre kell korlátoznia a figyelmét. Az orvosi tapasztalat és intuició szerepét azonban úgy foghatjuk fel, hogy az orvos a beteg panaszai, a betegről szerzett benyomásai alapján és a beteg szervezetének esetleges előzetes kezelésekből származó ismeretéből, még mielőtt a laboratóriumi vizsgálatokhoz folyamodna, máris nagy mennyiségű információ felett rendelkezik; vagyis tulajdonképpen az információgyűjtés nem a laboratóriumi vizsgálattal kezdődik, hanem abban a pillanatban, amikor az orvos az illető beteggel foglalkozni kezd (és ennek következtében gyakran laboratóriumi vizsgálatokra nincs is szükség). Minket e példából elsősorban az érdekel, hogy az orvos a végleges diagnózishoz nagyszámú részletinformáció összevetése révén jut el. Az, hogy milyen információk jutnak az orvos birtokába és milyen sorrendben, bizonyos mértékig a véletlentől is függ. Pl. az, hogy a beteg nem felejt-e ki valamit betegsége tüneteinek felsorolásából (esetleg azért, mert ő maga orvosilag tájékozatlan lévén, az illető, őt viszonylag kevéssé zavaró tünetnek nem tulajdonít jelentőséget), erősen a véletlentől függ.

Harmadik példaként tekintsük egy vizsgálóbíró munkáját, aki egy peres ügyben kívánja a tényállást felderíteni; e célból számos tanút hallgat ki, és azok vallomásaiból igyekszik a történteket rekonstruálni. Legtöbbször az a helyzet, hogy az egyes tanúk a szóban forgó eseményeknek csak egy-egy részletéről bírnak tudomással; továbbá az egyes tanúk által szolgáltatott felvilágosítások legtöbbször részben átfedik egymást*. A bíró feladata pl. állhat abban, hogy egyének egy bizonyos H halmazából kiválassza azt az egyént, aki egy bizonyos cselekményt elkövetett. Azt, hogy kiket és különösen, hogy milyen sorrendben hallgat ki a bíró, legtöbbször tartalmaz véletlen elemeket. (Pl. előfordulhat, hogy a megidézett tanúk közül egyesek akadályoztatás miatt csak későbbi időpontban vagy egyáltalán nem hallgathatók ki.)

További példaként vizsgáljuk meg az ún. „Bar—Kochba" játékot, amely a szóban forgó helyzetnek olyan messzemenően leegyszerűsített esete, hogy ennek alapján azonnal eljuthatunk a probléma matematikai modelljének felállításához. Az említett játékban ugyanis a minket érdeklő probléma szinte „laboratóriumi" tisztaságban áll előttünk. A Bar—Kochba játékban két játékos vesz részt; nevezzük őket A-nak és B-nek. Az A játékos gondol valamire, a B játékos pedig kérdéseket tesz fel A-nak és a kérdéseire kapott válaszok alapján igyekszik kitalálni, hogy A mire gondolt**. Azt, hogy mire gondolhat A, a játék szabályai nem korlátozzák lényegesen: A gondolhat egy meghatározott személyre, egy tárgyra, egy elvont fogalomra stb. B csak olyan kérdéseket tehet fel, amelyekre igennel vagy nemmel lehet válaszolni, A pedig köteles minden feltett és megválaszolható kérdésre legjobb tudása szerint helyesen válaszolni***. Csak ha a kérdés nem válaszolható meg, vagy A a helyes választ nem ismeri, áll A-nak jogában nem válaszolni egy feltett kérdésre.

* Mint már fentebb említettük, azt a (gyakorlatilag egyáltalán nem elhanyagolható) lehetőséget, hogy egyes tanúk (szándékosan vagy tévedésből) a valóságnak nem megfelelő vallomást tesznek, itt nem vesszük tekintetbe.

** A játékot szokták úgy is játszani, hogy többen együtt gondolnak valamire és felváltva válaszolnak a kérdezőnek; a mi szempontunkból ez nem jelent lényeges különbséget.

*** A téves információkat, amelyekkel a probléma matematikai tárgyalásának egyszerűsítése céljából itt amúgy sem kívánunk foglalkozni, a Bar—Kochba játék esetében tehát a játék szabályai eleve kizárják.

A Bar-Kochba játéknál a gyakorlott kérdező általában bizonyos rendszer szerint szokott kérdezni, a kérdések megválasztását és sorrendjét azonban még a gyakorlott játékosnál is kétségtelenül többé-kevésbé a véletlentől függő tényezők befolyásolják, míg olyan kérdező esetében, aki a játékban kevés tapasztalattal bír, a kérdések megválasztása teljesen véletlenszerűnek tekinthető.

A Bar—Kochba játék egy lehetséges módosításával is érdemes foglalkozni, amelyet *„többértékű Bar—Kochba játék”*-nak nevezhetünk. Ez abban különbözik a játék szokásos formájától, hogy a kérdezőnek jogában áll olyan kérdéseket is feltenni, amelyekre nem lehet igen-nel vagy nem-mel válaszolni, hanem a lehetséges válaszok száma kettőnél több. Ez esetben azonban a kérdezőnek fel kell sorolni a kérdésre adható összes lehetséges válaszokat, és az A játékos meg kell, hogy mondja, hogy az általa gondolt dolog esetében a kérdező által felsorolt válaszok közül melyik a helyes (másszóval, hogy az általa gondolt dolog a kérdező által felsorolt, egymást kizáró kategóriák közül melyikbe tartozik).

A „többértékű Bar—Kochba” esetében célszerű az alternatívák számát előre korlátozni (pl. úgy, hogy legfeljebb 3 vagy legfeljebb 4 alternatíva adható meg).

Ahhoz, hogy a Bar—Kochba játéktól eljussunk egy matematikailag kezelhető, leegyszerűsített modellhez, csak egyetlen egyszerűsítést kell bevezetni, mégpedig a gondolható dolgok halmazát kell egy — a játékosok által a játék megkezdése előtt elfogadott megállapítással előre lerögzített — *véges* H halmazra korlátozni. Az, hogy a gondolható dolgok halmaza véges, amennyiben az elemszámot nem korlátozzuk, nem jelent gyakorlatilag megszorítást. (Lehetséges megszorítás pl., hogy csak olyasmire lehet gondolni, ami, mint külön címszó, egy bizonyos lexikonban szerepel, vagy pl. ami egy meghatározott szótárban szereplő 5 szóval definiálható stb.).

Ebben az esetben minden egyes kérdésnek egyértelműen megfelel a H halmaz egy H' részhalmaza oly módon, hogy a kérdés azzal ekvivalens, hogy a gondolt dolog hozzátartozik-e a H' részhalmazhoz?

Könnyen megadhatunk egy elméletileg optimális, bár gyakorlatilag nemigen számításba jövő „stratégiát” a kérdező részére. Ha ugyanis a gondolható dolgok H halmaza n elemű, $2^{s-1} < n \leqq 2^s$ $(s = 1, 2, \ldots)$, és H elemeit a $0, 1, \ldots, n-1$ számokkal számozzuk meg; ez esetben (feltéve, hogy a számozásban a játékosok megállapodtak, vagy egy egyértelmű természetes számozás adva van) elegendő, ha a B játékos a gondolt dolog sorszámára kérdez. Más szóval azt is feltehetjük, hogy A valójában a $0, 1, \ldots, n-1$ számok valamelyikére gondolt, és ezt a *gondolt számot* akarja B kitalálni. Mármost a $0, 1, \ldots, n-1$ számokat a kettes számrendszerben felírva, azok mindegyike legfeljebb s diadikus jegyet tartalmaz, és így B minden esetben célhoz ér a következő s kérdéssel; „A gondolt dolog sorszámát a kettes számrendszerben felírva, abban a j-edik jegy zérus-e? $(j = 0, 1, \ldots, s-1)$”.

Az n elemű H halmaz gondolt eleme tehát $s = \{\log_2 n\}$ kérdésre adott válaszból egyértelműen kitalálható; itt $\{x\}$ a legkisebb olyan egész számot jelöli, amely nem kisebb x-nél. Azt, hogy ennél kevesebb kérdéssel nem juthatunk célhoz, a következő egyszerű meggondolással láthatjuk be. Ha csak olyan kérdést tehet B fel, amelyre a válasz igen vagy nem, akkor minden elképzelhető kérdéshez hozzárendelhető a H halmaznak egy H' részhalmaza, amely H azon elemeiből áll, amelyek esetében a válasz a szóban forgó kérdésre igenlő. Ha mármost $f(n)$-nel jelöljük azon kérdések minimális számát, amelyek minden körülmények között elégségesek egy n elemű halmaz egy elemének kitalálásához, akkor először is nyilvánvaló, hogy $f(n)$ monoton nem-csökkenő függvény, másrészt, ha az első kérdésnek megfelelő halmaz m-elemű, akkor még további $f(m)$ ill. $f(n-m)$ kérdésre van szükség aszerint, hogy az első kérdésre igenlő vagy tagadó választ kaptunk; ennélfogva

$$f(n) \geqq 1+\min_{0\leqq m\leqq n}\left[\operatorname{Max}\left(f(m), f(n-m)\right)\right].$$

Tehát

$$f(n) \geqq 1+f\left(\left\{\frac{n}{2}\right\}\right).$$

Ha azonban $2^{s-1}<n\leqq 2^s$, akkor $\left\{\frac{n}{2}\right\}>2^{s-2}$. Ezt a meggondolást $(s-1)$-szer megismételve, azt kapjuk, hogy

$$f(n)\geqq s-1+f(2);$$

mármost nyilvánvaló, hogy $f(2)=1$, tehát

$$f(n)\geqq s;$$

de s alkalmas kérdés bizonyosan célhoz vezet, tehát $f(n)=s$, ha $2^{s-1}<n\leqq 2^s$.

Hasonlóképpen látható be, hogy a többértékű Bar—Kochba játéknál, ha az egy kérdésre adandó válaszok megengedett száma r, a szükséges kérdések száma $\left\{\frac{\log_2 n}{\log_2 r}\right\}$, és egy optimális kérdésrendszer pl. az, hogy sorra megkérdezzük, hogy H gondolt elemének sorszámát az r-alapú számrendszerben felírva a 0-adik, első, második,... jegy a $0, 1,\ldots, r-1$ számok közül melyik?

A mondottakból látható, hogy ha egy-egy kérdésre r alternatív válasz adható, mindig feltehetjük, hogy a gondolható dolgok H halmazának elemszáma r-nek hatványa; ha ugyanis $r^{s-1}<n\leqq r^s$, semmit nem veszítünk, ha a H halmazt r^s-n „fiktív" elemmel r^s eleművé egészítjük ki. Tegyük tehát fel, hogy $n=r^s$. Mármost könnyen belátható, hogy ez esetben a fentebb ismertetett optimális kérdésrendszerek a következő két okból optimálisak: a) először is minden válasz teljes egészében új információt nyújt, azaz redundancia nem lép fel; ugyanis egy számot az r-alapú számrendszerben felírva az egyes jegyek egymástól függetlenül vehetik fel a $0, 1,\ldots, r-1$ értékeket. b) Egy olyan kérdésre adott válasz, amely kérdésre elvileg r-féle válasz lehetséges, az információelmélet elemei szerint maximálisan $\log_2 r$ „bit" információt tartalmaz és az említett optimális kérdésrendszer esetében ezt a maximális információt minden egyes kérdésre ténylegesen meg is kapjuk. Ugyanis a $0, 1,\ldots, r^s-1$ számokat az r alapú számrendszerben felírva, ezek közül pontosan r^{s-1} számnak lesz a j-edik jegye éppen i $(j=0, 1,\ldots, s-1;\ i=0, 1,\ldots, r-1)$. Ha tehát a $0, 1,\ldots, r^s-1$ számok mindegyikére ugyanolyan valószínűséggel gondolt az A játékos (amit feltehetünk, hiszen ez éppen azt jelenti, hogy semmilyen előzetes tudomásunk sincs arról, hogy A melyik számra gondolt), akkor arra a kérdésre, hogy a gondolt dolog sorszámát az r-alapú számrendszerben felírva, mi a j-edik jegy, $\frac{1}{r}$ valószínűséggel kapjuk azt a választ, hogy ez a jegy i $(i=0, 1,\ldots, r-1)$. Ez esetben tehát $\log_2 r$ információt kapunk minden egyes válaszból és így s válaszból összesen $s\log_2 r=\log_2 n$ információt kapunk, és éppen ennyi információra van szükség ahhoz, hogy egy n elemű halmaz egy elemét egyértelműen jellemezni tudjuk.

Mielőtt továbbmennénk, vegyük még észre az említett optimális kérdésrendszer következő sajátosságát: teljesen mindegy, hogy a kérdéseket egymás után egyenként tesszük-e fel vagy egyszerre. Míg a tényleges Bar—Kochba játéknál előbb megvárjuk az első kérdésre adott választ és csak azután tesszük fel a második kérdést, s. i. t., és első pillanatra úgy tűnhet, hogy ez előnyt jelent (vagyis, hogy érdemes a második kérdés megválasztását függővé tenni az első kérdésre kapott választól, s. i. t.), valójában ez az előny illuzórikus, hiszen az említett optimális kérdésrendszer esetében semmilyen hátrányt nem jelent, ha az összes kérdéseket egyszerre tesszük fel, hiszen akármi is az első kérdésre a válasz, úgyis ugyanazt a kérdést tesszük fel másodiknak. Pl. $r=2$ esetében az első kérdés úgy szól, hogy a gondolt szám páros-e, a második úgy, hogy a gondolt számból kivonva e szám mod 2 vett maradékát és a különbséget 2-vel osztva a hányados páros-e? Ha a második kérdés feltevése előtt már rendelkezésre áll az első kérdésre adott válasz, ez csak annyi különbséget jelent, hogy ha a válasz az volt, hogy a szám páros, a második kérdést úgy fogalmazhatjuk, hogy a szám fele páros-e, míg ha azt hallottuk, hogy a szám páratlan, másodszorra azt kérdezzük, hogy a gondolt számból egyet levonva a kapott páros szám fele páros-e? Ez azonban csak a második kérdés *fogalmazását* érinti, a szükséges kérdések *számát* azonban nem befolyásolja.

Más szavakkal kifejezve: teljesen mellékes, hogy a kapott válaszokból nyert információkat minden egyes válasz után „összegezzük"-e, vagy az „összegezést" csak akkor kezdjük meg, ha már mind az s válasz rendelkezésünkre áll.

Egy optimális kérdésrendszer az $r=2$, $n=2^s$ esetben a következőképpen jellemezhető. Ha $H_1, H_2, \dots, H_s$ jelölik az egyes kérdéseknek megfelelő részhalmazokat (vagyis a j-edik kérdés azt kérdezi, hogy a gondolt dolog hozzátartozik-e a H halmaz H_j részhalmazához) és $\bar{H}_j$ jelöli a H_j halmaz kiegészítő halmazát H-ra nézve, akkor a H_j és $\bar{H}_j$ halmazok 2^{s-1} elemből állnak, a H_iH_j $H_i\bar{H}_j$, $\bar{H}_iH_j$ és $\bar{H}_i\bar{H}_j$ halmazok $(i \neq j)$ mindegyike 2^{s-2} elemből áll és általában ha $\tilde{H}_j$ a H_j és $\bar{H}_j$ halmazok közül az egyiket jelöli, akkor az összes $\tilde{H}_{j_1}\tilde{H}_{j_2}\dots\tilde{H}_{j_l}$ alakba írható halmazok $(j_1<j_2<\dots<j_l)$ mindegyike 2^{s-l} elemből áll. Speciálisan tehát a $\tilde{H}_1\tilde{H}_2\dots\tilde{H}_s$ halmazok mindegyike egyetlen elemet tartalmaz. Mivel ilyen alakú halmaz pontosan 2^s darab van, ezek tehát a H halmaz elemeihez kölcsönösen egyértelműen vannak hozzárendelve; könnyen belátható, hogy az összes lehetséges $2^s!$ ilyen hozzárendelésnek megfelel egy optimális kérdésrendszer, vagyis az optimális kérdésrendszerek száma éppen $2^s!$.

A tényleges Bar—Kochba játéknál az említett optimális kérdésrendszerek azonban nem alkalmazhatók, kivéve ha a gondolható dolgok halmazának elemszáma igen kicsiny, már pusztán azért sem, mert ha n nagy, a gondolható dolgok halmaza elemeinek megszámozása igen fáradságos volna és e számozás fejbentartása gyakorlatilag nem vihető keresztül. (Ha ez a rendszer ténylegesen alkalmazható volna, a játék elveszítené minden érdekességét.) Így tehát felmerül a kérdés, hogy mennyivel több kérdést kell feltenni akkor, ha nem optimális kérdésrendszert használunk. Ezt a problémát azon extrém feltevés mellett fogjuk megválaszolni, amikor nemcsak hogy nem optimális kérdésrendszer szerint kérdezünk, hanem kérdéseinkben semmiféle rendszert nem alkalmazunk, vagyis a kérdéseket teljesen találomra választjuk meg. Arra a meglepő eredményre jutottunk, hogy a szükséges kérdések száma általában nem sokkal lesz több, mint az optimális kérdésrendszer esetében, pl. n értékétől függetlenül az esetek kb. 99%-ában a kérdéseket találomra választva legfeljebb 7-tel több kérdésre van szükség, mint optimális kérdésrendszer esetében.

Az 1. §-ban a közönséges Bar—Kochba játék modelljével, a 2. §-ban a többértékű Bar—Kochba játék modelljével foglalkozunk.

A tárgyalás során azzal az általánosabb esettel is foglalkozunk, amikor a lehetséges válaszok egy-egy kérdésre eleve (a priori) nem egyformán valószínűek. Ha egy kérdésre a többértékű Bar—Kochbánál r válasz lehetséges és ezek valószínűségei a $\mathcal{P}=\{p_1, p_2,\dots, p_r\}$ valószínűségeloszlás tagjai, akkor Shannon képlete szerint egy válasz $I_1(\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{r} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$ információt nyújt és így várható, hogy legalább $\left\{\frac{\log_2 n}{I_1(\mathcal{P})}\right\}$ kérdést kell feltenni. Ez esetben is kiszámítjuk, hogy ha a kérdéseket minden rendszer nélkül, találomra tesszük fel, mennyivel több kérdés szükséges.

A 3. és 4. §-okban egy, az előbbivel rokon másik problémát vizsgálunk. Ennek a problémának a modellje a Bar—Kochba játék egy másik általánosítása, amelyet „*szimultán Bar—Kochba játéknak*" nevezhetünk. E játékban nem egy, hanem több játékos — pl. az $A_1, A_2,\dots, A_l$ játékosok mindegyike — gondol a H halmaz egy-egy általa választott elemére (feltesszük, hogy nincs két játékos, aki H ugyanazon elemére gondolna) és a kérdező B játékosnak ki kell találnia, hogy az $A_1, A_2,\dots, A_l$ játékosok rendre mire gondoltak. E célból B kérdéseket tesz fel szimultán az $A_1, A_2,\dots, A_l$ játékosoknak, amelyekre ezek mindegyike — az általa gondolt dologra vonatkozólag — a valóságnak megfelelően válaszol. Aszerint, hogy csak igennel vagy nemmel megválaszolható kérdések vannak-e megengedve, vagy olyanok, amelyekre $r>2$ válasz lehetséges, beszélünk *közönséges* ill. *többértékű szimultán Bar—Kochba* játékról. A matematikai tárgyalás szempontjából lényeges különbséget jelent, hogy l kis rögzített szám-e (pl. $l=2$ vagy $l=3$) vagy pedig l nagy szám, pl. $l=n$. Az $l=n$ esetben a H halmaz minden egyes elemére gondolt az $A_1, A_2,\dots, A_l$ játékosok közül egy, tehát lényegében a H halmaz elemeinek egy ismeretlen permutációját kell B-nek kitalálnia. Az l szám nagyságától függetlenül B-nek a szimultán Bar—Kochba esetében valójában azt a *függvényt* kell meghatároznia, amely a $A_1, A_2,\dots, A_l$ játékosok mindegyikéhez hozzárendeli a H halmaz egy elemét, vagyis egy véges halmaznak egy másik véges halmazra való *leképezését* kell „kitalálnia". Abban az esetben, amikor $l=n$, tehát a H halmaz minden egyes elemére gondolt az $A_1, A_2,\dots, A_l$ játékosok közül legalább egy, B-nek olyan kérdéseket kell feltennie, amelyekre adott válaszok H minden egyes elemét egyidejűleg jellemzik.* Mivel egy olyan kérdésnek, amelyre r válasz lehetséges, egyértelműen megfeleltethető a H halmaz r részre való felosztása, tehát B akkor tudja kitalálni, hogy az $A_1, A_2,\dots, A_l$ játékosok mire gondoltak, ha az általa feltett kérdéseknek megfelelő felosztások H elemeit teljesen *szeparálják*, azaz nincs két olyan eleme H-nak, amely minden egyes felosztásnál ugyanabba az osztályba tartozik.**

Ilyen módon a szimultán Bar—Kochba játék problémája lényegében azonos a

* A közönséges Bar—Kochbával kapcsolatban említett optimális kérdésrendszerek egyben a szimultán Bar—Kochbára nézve is optimálisak; ha azonban a kérdéseket véletlenszerűen választjuk, a közönséges és a szimultán Bar—Kochba között lényeges eltérés van: a szimultán Bar—Kochbánál az $l=n$ esetben kb. kétszerannyi kérdést kell feltenni, mint az $l=1$ esetben.

** A rövidség kedvéért a következő terminológiát használjuk: amennyiben az egyes részinformációk a H halmaz két részre vágásának felelnek meg („igen vagy nem" válasz), azt mondjuk, hogy az információt *dichotomiák*ból nyerjük (dichotomia = kettévágás), míg ha az egyes osztályozásoknál kettőnél több osztály is felléphet, azt mondjuk, hogy *általános osztályozás*okból nyerjük az információt.

következő problémával: Egy könyvtár könyveit különböző szempontok szerint osztályozzuk kategóriákba; milyen feltételek mellett fogják ezek az osztályozások együttvéve egyértelműen jellemezni a könyvtár minden egyes könyvét. Vagy tekintsük a kvalitatív kémiai analízis példáját. E példát, amelyet már fentebb említettünk, szintén lehet úgy módosítani, hogy az a „szimultán" Bar—Kochba esetének feleljen meg. Tegyük ugyanis fel, hogy nem egyetlen ismeretlen anyagot, hanem többféle anyagot kell egyidejűleg analizálnunk, mégpedig úgy, hogy ugyanazokkal a vizsgálatokkal állapítsuk meg ezek mindegyikének kémiai minőségét. Tehát a szóban forgó anyagokat többféle próbának vetjük alá és feljegyezzük, hogy melyik hogyan reagált azokra. Minden egyes vizsgálatnál a lehetséges reakciók az összes kémiai vegyületek egy-egy osztályozását adják meg. Kérdés, hogyan kell az elvégzendő vizsgálatok sorozatát összeállítani ahhoz, hogy a reakciókból egyértelműen meghatározható legyen, milyen anyagokkal állunk szemben. Hasonló probléma merül fel a képességvizsgálatoknál alkalmazott „teszt"-eknél is, stb.

A szóban forgó probléma érdekessége, hogy megoldásában a $\mathcal{S}=\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ valószínűségeloszláshoz tartozó információnak nem a Shannon-féle $I_1(\mathcal{S})= = \sum_{i=1}^{r} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$ mértékszáma, hanem egy másik információ-mérték, az $I_2(\mathcal{S})= =\log_2 \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} p_i^2}$ ún. *másodrendű információ-mértékszám* játszik szerepet. Az $I_2(\mathcal{S})$ információ-mértékszám a szerző [1] és [2] dolgozataiban bevezetett információ-mértékszámok közé tartozik. Az említett dolgozatokban a $\mathcal{S}=\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ valószínűségeloszláshoz tartozó információmennyiség α-adrendű $I_\alpha(\mathcal{S})$ mértékszámát $(\alpha>0)$ az $\alpha \neq 1$ esetben a következőképpen definiáltuk:

$$I_\alpha(\mathcal{S}) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_{i=1}^{r} p_i^\alpha \right),$$

megjegyezve, hogy ha $\alpha \to 1$, akkor $I_\alpha(\mathcal{S})$ az $I_1(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{r} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$ Shannon-féle mértékszámhoz konvergál, amely tehát úgy tekinthető, hogy szintén az α-adrendű információ-mértékszámok közé tartozik, mégpedig az $\alpha=1$ esetnek felel meg.

Megjegyezzük még, hogy az $r=2, p_1=p_2=\frac{1}{2}$ speciális esettel foglalkoznak a szerző [3] és [4] dolgozatai. [3]-ban a kérdést a Boole-algebra terminológiájával fogalmaztuk meg. A többértékű szimultán Bar—Kochba játék problémája a Boole-algebra nyelvén a következőképpen fogalmazható meg: a H halmaznak a B játékos által feltett kérdéseknek megfelelő részhalmazai milyen feltételek mellett generálják (a halmazelméleti műveletekre nézve) a H összes részhalmazaiból álló Boole-algebrát?

Az e dolgozatban tárgyalt eredményeket 1961 nyarán előadtam a Michigan State University-n tartott szemináriumomban. A szeminárium résztvevői közül elsősorban H. RUBIN professzor kapcsolódott be a szóban forgó témakör vizsgálatába. Értékes hozzászólásaiért, amelyekből sok ösztönzést merítettem, ezúton is köszönetet mondok. A szeminárium egy másik résztvevője, J. FOX, a következő módosítását vetette fel a közönséges szimultán Bar—Kochba játéknak: a kérdések feltevése során B mindig csak olyan kérdéseket tesz fel, amelyek biztosan nyújtanak új információt az összes, az előző kérdések által még ki nem talált, gondolt dolgokra vonatkozólag. Más szóval, a j-edik kérdésnek olyannak kell lennie, hogy a H halmaznak az előző $j-1$ kérdésnek megfelelő két részre osztásai egyesítésével létrejött felbontásának minden egynél több elemet tartalmazó osztályát a j-edik kérdésnek megfelelő felosztás két valódi részre bontsa fel. A probléma ezen módosítását illetőleg H. RUBIN ért el érdekes eredményeket.

1. §. Információ-akkumuláció egy ismeretlenre vonatkozó dichotomiák esetében

E §-ban először a következő problémát oldjuk meg.

Legyen H egy n elemű halmaz. Válasszuk ki találomra H-nak k számú részhalmazát — ezeket jelöljék $H_1, H_2, \ldots, H_k$ —, oly módon, hogy az egyes részhalmazok kiválasztásai függetlenek és minden választásnál H minden egyes részhalmaza (beleértve az üres halmazt és magát H-t is) ugyanakkora, tehát $\frac{1}{2^n}$ valószínűséggel kerülhet kiválasztásra.* Kiszámítandó annak a valószínűsége — ezt P_{nk}-val jelöljük —, hogy kijelölve H egy x elemét, ez az elem egyértelműen meg legyen határozva annak megadása által, hogy a $H_1, H_2, \ldots, H_k$ halmazok közül melyeknek eleme és melyeknek nem eleme. Meg kívánjuk vizsgálni továbbá, hogy mekkorára kell k értékét választani, hogy a szóban forgó P_{nk} valószínűség egy megadott α $(0<\alpha<1)$ számot meghaladjon.

Jelöljék H elemeit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és legyen

$$\varepsilon_{jh}=\begin{cases}1 & \text{ha} \quad x_h\in H_j \\ 0 & \text{ha} \quad x_h\notin H_j\end{cases} \qquad (j=1,2,\ldots,k,\ h=1,2,\ldots,n). \tag{1. 1}$$

Feltevésünk szerint a H_j halmaz $\frac{1}{2^n}$ valószínűséggel lesz azonos H bármely részhalmazával; mivel továbbá H-nak nyilván 2^{n-1} olyan részhalmaza van, amely x_h-t tartalmazza és ugyancsak 2^{n-1} olyan részhalmaza, amely x_h-t nem tartalmazza, tehát

$$\mathbf{P}(\varepsilon_{jh}=1)=\mathbf{P}(\varepsilon_{jh}=0)=\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}. \tag{1. 2}$$

Hasonlóképpen látható be az is, hogy az ε_{jh} $(j=1,2,\ldots,k;\ h=1,2,\ldots,n)$ valószínűségi változók függetlenek; ugyanis először is az $(\varepsilon_{j1}, \varepsilon_{j2}, \ldots, \varepsilon_{jn})$ vektorok függetlenek, mert feltevésünk szerint a $H_1, H_2, \ldots, H_k$ halmazokat egymástól függetlenül választjuk; másrészt viszont, ha $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ tetszőleges, a 0 és 1 számokból álló számsorozat, akkor

$$\mathbf{P}(\varepsilon_{j1}=\delta_1, \varepsilon_{j2}=\delta_2, \ldots, \varepsilon_{jn}=\delta_n)=\frac{1}{2^n}=\prod_{h=1}^{n}\mathbf{P}(\varepsilon_{jh}=\delta_h), \tag{1. 3}$$

* Ily módon előfordulhat, hogy ugyanazt a részhalmazt többször is kiválasztjuk, ennek valószínűsége azonban rendkívül csekély lesz, ha n nagy szám, mivel vizsgálatainkban k nagyságrendje $\log n$, és ahhoz, hogy ugyanazon halmaz többszöri kiválasztásának a valószínűsége számottevő legyen, k-nak legalább $\sqrt{2^n}$ nagyságrendűnek kellene lennie.

ugyanis H-nak egyetlenegy olyan részhalmaza van, amely tartalmazza azon x_h-kat, amelyekre $\varepsilon_{jh}=1$ és nem tartalmazza azon x_h-kat, amelyekre $\varepsilon_{jh}=0$. Tehát az ε_{jh} ($j=1,2,\dots,k$; $h=1,2,\dots,n$) valószínűségi változók függetlenek és mindegyik a 0 és 1 értékeket $\frac{1}{2}$ valószínűséggel veszi fel. E változókat rendezzük el egy $k\times n$ elemű mátrix alakjában, oly módon, hogy ε_{jh} a mátrix j-edik sorában a h-adik helyre kerüljön. Jelöljük e mátrixot E_{kn}-nel. Könnyen belátható, hogy az a követelmény, hogy az x elemet egyértelműen meghatározza az, hogy a $H_1, H_2,\dots, H_k$ halmazok közül melyeknek eleme, az $x=x_i$ esetben azt jelenti, hogy az E_{kn} mátrixnak az i-edik oszlopa különbözzék e mátrix összes többi oszlopától. Mivel az E_{kn} mátrix oszlopvektorai függetlenek és mindegyikük a k-dimenziós és a 0 és 1 komponensekből álló összes lehetséges 2^k vektorral $\frac{1}{2^k}$ valószínűséggel egyenlő, a keresett P_{nk} valószínűség nyilván

$$P_{nk}=\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-1}, \tag{1. 4}$$

függetlenül attól, hogy mi i értéke és hogy milyen elemek állnak E_{kn} i-edik oszlopában. Másrészt az $e^{-\frac{x}{1-x}}<1-x<e^{-x}$ $(0<x<1)$ egyenlőtlenség szerint

$$e^{-\frac{n-1}{2^k-1}}<P_{nk}<e^{-\frac{n-1}{2^k}}.$$

Ha $2^k\geqq n$, akkor $\frac{n-1}{2^k-1}\leqq\frac{n}{2^k}$, ezért

$$e^{-\frac{n}{2^k}}<P_{nk}<e^{-\frac{n-1}{2^k}}, \quad \text{hacsak} \quad 2^k\geqq n. \tag{1. 5}$$

Más szóval, ha $\frac{1}{e}<\alpha<1$, és $k\geqq\log_2 n+\log_2\frac{1}{\log\frac{1}{\alpha}}$, akkor $P_{nk}>\alpha$, míg ha $k\leqq\log_2(n-1)+\log_2\frac{1}{\log\frac{1}{\alpha}}$, akkor $P_{nk}<\alpha$. Ilyen módon bebizonyítottuk a következő tételt:

1a. TÉTEL. *Találomra válasszuk ki egy n elemű H halmaz k részhalmazát oly módon, hogy az egyes részhalmazokat egymástól függetlenül választjuk és minden részhalmaz kiválasztásakor H összes részhalmazai ugyanakkora valószínűséggel jönnek tekintetbe. Jelölje P_{nk} annak valószínűségét, hogy H egy tetszőleges rögzített x eleme egyértelműen meg lesz határozva azáltal, hogy megadjuk, hogy a kiválasztott k részhalmaz közül melyek tartalmazzák x-et. Ha $\frac{1}{e}<\alpha<1$ és $k\geqq\log_2 n+\log_2\frac{1}{\log\frac{1}{\alpha}}$, akkor $P_{nk}\geqq\alpha$, míg ha $k\leqq\log_2(n-1)+\log_2\frac{1}{\log\frac{1}{\alpha}}$, akkor $P_{nk}\leqq\alpha$.*

Megjegyzés. Ha $\alpha = 0{,}99$, akkor $\log_2 \frac{1}{\log \frac{1}{\alpha}} < \log_2 100 < 7$, tehát ha a Bar—Kochba játéknál kérdéseinket találomra választjuk meg, és n dolog valamelyikére lehet gondolni, a gondolt dolgot $\{\log_2 n\} + 7$ találomra megválasztott kérdés alapján 99%-ot meghaladó valószínűséggel ki fogjuk találni. Meglepő, hogy a szükséges kérdések száma mindig 7-tel lesz nagyobb, mint ha optimális módon tennénk fel a kérdéseket, függetlenül attól, hogy mekkora n, vagyis függetlenül attól, hogy mi a minimális kérdésszám. Ha például a játékosok abban állapodnak meg, hogy egy 6-jegyű telefonszámot kell kitalálni, akkor ez 27 találomra feltett kérdés alapján 99% valószínűséggel sikerül ($2^{20} > 10^6 > 2^{19}$).

Könnyen belátható, hogy a részhalmazok választására tett feltevésünkből következik, hogy általában a kiválasztott részhalmazok mindegyike a H halmaz elemeinek körülbelül a felét fogja tartalmazni.*

Felmerül a kérdés, hogy hogyan módosul a helyzet, ha a részhalmazok kiválasztási szabályát úgy választjuk, hogy a kiválasztott részhalmazok túlnyomórészt kb. pn elemből álljanak, ahol $0 < p < 1$ és $p \neq \frac{1}{2}$.

Egy ilyen kiválasztási szabályt könnyen nyerhetünk, ha továbbra is feltesszük, hogy az ε_{jh} valószínűségi változók függetlenek, azonban ezek eloszlását úgy választjuk, hogy

$$\text{(1.6)} \qquad \mathbf{P}(\varepsilon_{jh} = 1) = p \quad \text{és így} \quad \mathbf{P}(\varepsilon_{jh} = 0) = q = 1 - p$$

legyen. Ez annak felel meg, hogy a H_j részhalmazt úgy választjuk meg, hogy H minden egyes x_h eleméről sorsolás útján döntjük el, hogy belekerüljön-e H_j-ba, és feltesszük, hogy a sorsolás úgy történik, hogy ennek valószínűsége j és h minden értékére p-vel egyenlő. Ez esetben is elkészítjük az ε_{jh} számokból az E_{kn} mátrixot, és az, hogy az ismeretlen x elem meg van határozva azáltal, hogy megadjuk, hogy a $H_1, H_2, \ldots, H_k$ halmazok közül melyek tartalmazzák x-et, az $x = x_i$ esetben továbbra is azzal az állítással ekvivalens, hogy az E_{kn} mátrix i-edik oszlopa különbözik-e a mátrix összes többi oszlopától. Most azonban ezen esemény P_{nk} valószínűsége már függ attól, hogy az i-edik oszlopban hány 1-es áll. A teljes valószínűség tételét alkalmazva a P_{nk} valószínűségre, a

$$\text{(1.7)} \qquad P_{nk} = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} p^{\nu} q^{k-\nu} (1 - p^{\nu} q^{k-\nu})^{n-1}$$

kifejezést nyerjük. Alkalmazva a Moivre—Laplace tételt, némi számolással adódik, hogy érvényes a következő tétel:

2a. TÉTEL. *Egy n elemű H halmaznak válasszuk ki találomra, egymástól függetlenül k részhalmazát, oly módon, hogy H minden egyes elemére vonatkozólag, egymástól függetlenül, sorsolással döntjük el, hogy az illető elem beletartozzék-e vagy nem a szóban forgó részhalmazba és ezen lehetőségek valószínűségei p és $q = 1 - p$ legyenek ($0 < p < 1$; $p \neq \frac{1}{2}$). Jelölje P_{nk} annak a valószínűségét, hogy H egy tetszőlegesen meg-*

* Pontosabban: mindegyik halmaz elemszáma nagy valószínűséggel az $\frac{n \pm \sqrt{(2+\delta) n \log\log n}}{2}$ határok közé fog esni, ahol $\delta > 0$ tetszőleges, és $n \geq n_0(\delta)$, ahol $n_0(\delta)$ csak δ-tól függ.

választott rögzített x elemét egyértelműen jellemezze az, hogy a kiválasztott részhalmazok közül melyek tartalmazzák x-et. Ez esetben, bevezetve az $I_1(\{p,q\}) = = p\log_2 \frac{1}{p} + q\log_2 \frac{1}{q}$ *jelölést, ha* $n\to+\infty$ *és*

$$k = k(n) = \frac{\log_2 n + y\sqrt{\log_2 n} + o(\log_2 n)}{I_1(\{p,q\})}, \tag{1.8}$$

akkor

$$\lim_{n\to+\infty} P_{n,k(n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y/\sigma} e^{-t^2/2}dt, \tag{1.9}$$

ahol

$$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{I_1(\{p,q\})}}\cdot|\log p/q|. \tag{1.10}$$

Megjegyzés. Ha (1. 10)-ben $p=\frac{1}{2}$, akkor $\sigma=0$; ez esetben a tétel állítása akkor marad érvényes, ha $y\neq 0$ és y/σ alatt $+\infty$ ill. $-\infty$ értendő, aszerint, hogy $y>0$, ill. $y<0$.

2. §. Információ-akkumuláció egy ismeretlenre vonatkozó általános osztályozások esetében

E §-ban az 1. §-ban tárgyalt probléma következő általánosításával foglalkozunk. Az n elemű H halmazt k-szor egymásután találomra r darab (számozott) részre bontjuk, $(r>2)$ oly módon, hogy az egyes felbontások egymástól függetlenül történnek és minden felbontás ugyanakkora $\left(\text{tehát } \frac{1}{r^n}\right)$ valószínűséggel lesz egyenlő az összes lehetséges r-részre való felbontások mindegyikével. Kiszámítandó annak a valószínűsége — ezt P_{nk}-val jelöljük —, hogy kijelölve H egy tetszőleges rögzített x elemét, ez az elem egyértelműen meg legyen határozva annak megadása által, hogy a k felbontás mindegyikénél x hányadik részhalmazba tartozik.

Nyilván a szóban forgó felbontások mindegyike jellemezhető azon függvény által, amely H minden eleméhez hozzárendeli a felbontás azon részhalmazának sorszámát, amelyhez az illető elem tartozik. Ez a függvény (és ennek következtében a számbajövő felbontás) nyilván r^n-féleképpen adható meg. Jelölje ε_{jh} a j-edik felbontáshoz tartozó ilyen függvényt, tehát legyen

$$\varepsilon_{jh} = l, \tag{2.1}$$

ha x_h a j-edik felbontásnál az l-edik osztályba tartozik ($l=1,2,\ldots,r$; $j=1,2,\ldots,k$; $h=1,2,\ldots,n$). Ugyanúgy, mint az 1. §-ban, beláthatjuk, hogy az ε_{jh} változók függetlenek és

$$\mathbf{P}(\varepsilon_{jh}=l) = \frac{1}{r} \quad (j=1,2,\ldots k;\ h=1,2,\ldots,n;\ l=1,2,\ldots,r). \tag{2.2}$$

Elkészítve újból az ε_{jh} számokból az E_{kn} mátrixot, az $x=x_i$ esetben P_{nk} annak valószínűségével lesz egyenlő, hogy E_{kn} i-edik oszlopa az összes többi oszloptól különbözik. Így nyerjük, hogy

$$P_{nk}=\left(1-\frac{1}{r^k}\right)^{n-1}, \tag{2. 3}$$

tehát, ha $r^k>n$, akkor

$$e^{-\frac{n}{r^k}}<P_{nk}<e^{-\frac{n-1}{r^k}}. \tag{2. 4}$$

Ily módon az 1. tétel következő általánosítását kaptuk:

1b. TÉTEL. *Ha az n elemű H halmaznak találomra kiválasztjuk k számú r (számozott) részre való felbontását ($r\geqq 2$) oly módon, hogy az egyes felbontásokat egymástól függetlenül választjuk ki úgy, hogy az r^n lehetséges felbontás mindegyike ugyanolyan valószínűséggel kerülhet kiválasztásra és P_{nk}-val jelöljük annak a valószínűségét, hogy H egy tetszőleges rögzített x eleme egyértelműen meg legyen határozva azáltal, hogy megadjuk, hogy a k felbontás mindegyikénél melyik osztályba tartozik, továbbá, ha* $\frac{1}{e}<\alpha<1$ *és* $k\geqq\frac{\log_2 n+\log_2\left(\log\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}}{\log_2 r}$, *akkor* $P_{nk}\geqq\alpha$, *míg ha* $k\leqq\frac{\log_2(n-1)+\log_2\left(\log\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}}{\log_2 r}$, *akkor* $P_{nk}\leqq\alpha$.

Megjegyzés. Ha $r=2$, akkor az 1b. tételből speciális esetként az 1a. tételt kapjuk.

A mondott feltételek mellett minden egyes felbontás minden egyes részhalmaza 1-hez közeli valószínűséggel $\frac{n\pm O(\sqrt{n\log\log n})}{r}$ elemet fog tartalmazni. Ha azt akarjuk, hogy a felbontások részhalmazai ne álljanak körülbelül ugyanannyi elemből, hanem elemszámaik a $p_1 n, p_2 n, \ldots, p_r n$ számokhoz essenek közel, ahol $\mathfrak{P}=\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ egy tetszőleges r elemű valószínűségeloszlás, azaz $p_l>0$ ($l=1, 2,\ldots, r$) és $\sum_{l=1}^{r} p_l=1$, akkor a felbontások véletlenszerű megválasztását úgy kell módosítani, hogy

$$\mathbf{P}(\varepsilon_{jh}=l)=p_l \quad (l=1, 2,\ldots, r;\ j=1, 2,\ldots, k;\ h=1, 2,\ldots, n) \tag{2. 5}$$

legyen.

Ez esetben az 1. §-ban alkalmazott meggondoláshoz hasonló módon a

$$P_{nk}=\sum_{\sum_{l=1}^{r} k_l=k}\frac{k!}{k_1!\,k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}(1-p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r})^{n-1} \tag{2. 6}$$

képletet nyerjük. Ebből némi számolással adódik a következő

2b. TÉTEL. *Ha egy n elemű H halmaz elemeit k-szor találomra $r \geqq 2$ számozott osztályra bontjuk fel, oly módon, hogy az egyes felbontások egymástól függetlenek és H minden eleme minden egyes felbontás l-edik osztályába p_l valószínűséggel esik* $\left(p_l > 0,\ l = 1, 2, \ldots, r;\ \sum_{l=1}^{r} p_l = 1\right)$ *és P_{nk} jelöli annak a valószínűségét, hogy H egy tetszőleges rögzített x eleme egyértelműen meg legyen határozva azáltal, hogy megadjuk, hogy a k felbontás mindegyikénél x hányadik osztályba tartozik, továbbá, ha*

$$k = k(n) = \frac{\log_2 n + y\sqrt{\log_2 n} + o(\sqrt{\log_2 n})}{I_1(\mathfrak{P})}, \tag{2.7}$$

ahol $\mathfrak{P}$ jelöli a $(p_1, p_2, \ldots, p_r)$ eloszlást, amelyről feltesszük, hogy elemei nem mind egyenlők, és

$$I_1(\mathfrak{P}) = \sum_{l=1}^{r} p_l \log_2 \frac{1}{p_l}, \tag{2.8}$$

akkor

$$\lim_{n \to +\infty} P_{n, k(n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y/\sigma} e^{-t^2/2} dt, \tag{2.9}$$

ahol

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^{r} p_l \log_2^2 p_l - \left(\sum_{l=1}^{r} p_l \log_2 \frac{1}{p_l}\right)^2}{I_1(\mathfrak{P})}}. \tag{2.10}$$

Megjegyzés. Ha $r = 2, p_1 = p, p_2 = q$ $(p + q = 1, p \neq \frac{1}{2})$, akkor a (2. 10) által definiált σ értéke $\sqrt{\frac{pq}{I_1(\{p, q\})}}\,|\log p/q|$, és így a 2b. tétel az $r = 2$ speciális esetben a 2a. tételre redukálódik. Ha viszont r tetszőleges, viszont $p_1 = p_2 = \ldots = p_r = \frac{1}{r}$, akkor a (2. 10) által definiált σ értéke 0; a 2b. tétel állítása ez esetben is érvényes marad $y \neq 0$-ra, ha y/σ-t $+\infty$-nek ill. $-\infty$-nek értelmezzük, aszerint, hogy $y > 0$ vagy $y < 0$.

3. §. Szimultán információ-akkumuláció véletlen dichotomiák esetében

E §-ban először a következő problémával foglalkozunk: Egy n elemű H halmaznak egyidejűleg l különböző ismeretlen elemét kívánjuk meghatározni oly módon, hogy egymástól függetlenül találomra kiválasztjuk H k részhalmazát (úgy, hogy minden választásnál minden részhalmaz ugyanakkora valószínűséggel kerül kiválasztásra) és feltesszük, hogy az l ismeretlen elem mindegyikét illetőleg megállapítható, hogy azok a kiválasztott részhalmazok közül melyekhez tartoznak hozzá. Jelöljük P_{nkl}-lel annak a valószínűségét, hogy ezek az adatok egyértelműen meghatározzák a H halmaz szóban forgó l elemét. Jelöljék újból $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a H halmaz elemeit, $H_1, H_2, \ldots, H_k$ a kiválasztott részhalmazokat és legyen $\varepsilon_{jh} = 1$ vagy 0 aszerint, hogy x_h eleme-e H_j-nak vagy nem $(j = 1, 2, \ldots, k;\ h = 1, 2, \ldots, n)$. Akkor P_{nkl} nyilván egyenlő annak valószínűségével, hogy az ε_{jh} elemekből alkotott E_{kn} mátrixnak az l ismeretlen elemnek megfelelő oszlopa egymástól, valamint az összes többi oszloptól különbözzék. Ilyen módon azt kapjuk, hogy

$$P_{nkl} = \prod_{\nu=0}^{l-1}\left(1-\frac{\nu}{2^k}\right)\left(1-\frac{l}{2^k}\right)^{n-l}. \tag{3.1}$$

Egyszerűen adódik (3.1)-ből, hogy ha n, k és l úgy tartanak végtelenhez, hogy $l=o(n)$ és $k=\log_2 nl+\log_2 \dfrac{1}{\log\frac{1}{\alpha}}+o(1)$, ahol $0<\alpha<1$, akkor

$$\lim P_{nkl}=\alpha. \tag{3.3}$$

Ezzel szemben, ha n és l úgy tartanak végtelenhez, hogy

$$l\sim\vartheta n \qquad (0<\vartheta\leqq 1), \tag{3.4}$$

akkor (3.3) abban az esetben teljesül, ha

$$k = \log_2 nl+\log_2\frac{1-\frac{\vartheta}{2}}{\log\frac{1}{\alpha}}+o(1), \tag{3.5a}$$

vagyis, ha

$$k = 2\log_2 n+\log_2\frac{\vartheta(2-\vartheta)}{2\log\frac{1}{\alpha}}+o(1). \tag{3.5b}$$

Speciálisan, ha

$$l=n, \tag{3.6}$$

akkor (3.3) fennállásához kell, hogy

$$k = 2\log_2 n+\log_2\frac{1}{2\log\frac{1}{\alpha}}+o(1) \tag{3.7}$$

legyen.

Érvényes tehát a következő tétel:

3a. TÉTEL. *Ha az n elemű H halmaznak egymástól függetlenül találomra kiválasztjuk k részhalmazát, oly módon, hogy minden választásnál H 2^n részhalmaza közül mindegyik ugyanolyan valószínűséggel kerülhet kiválasztásra, és P_{nk} jelöli annak valószínűségét, hogy a kiválasztott k részhalmaz H bármely két elemét elválasztja egymástól, azaz, hogy nincs H-nak két olyan eleme, amelyek az összes kiválasztott részhalmazzal ugyanolyan relációban állnak (ugyanazoknak a részhalmazoknak* *elemei, ill. nem elemei) és n és k oly módon tartanak végtelenhez, hogy*

$$k = 2\log_2 n + \log_2 \frac{1}{2\log\frac{1}{\alpha}} + o(1),$$

ahol $0<\alpha<1$, *akkor*

$$\lim_{n\to+\infty} P_{nk} = \alpha.$$

Összehasonlítva a 3a. tételt az 1a. tétellel, azt látjuk, hogy egy n elemű halmaz *összes* elemeinek szeparálásához kereken kétszer annyi dichotomia szükséges, mint e halmaz *egyetlen* elemének szeparálásához. E problémánál valójában egy ismeretlen n-edrendű permutációt kell meghatároznunk. Ehhez legalább $\log_2 n! \sim n\log_2 n$ „bit" információra van szükség; egy dichotomia a permutáció minden egyes elemére nézve maximálisan 1 bit, az egész permutációra nézve n bit információt adhat. Más szóval, ha véletlen dichotomiákból határozzuk meg az ismeretlen permutációt, kb. 100%-os redundancia lép fel.*

4. §. Szimultán információ-akkumuláció, általános osztályozások esetében

Ha az n elemű H halmaz l különböző elemét akarjuk meghatározni és minden egyes rész-információ abban áll, hogy találomra kiválasztjuk a H halmaz egy r részre való felbontását (úgy, hogy minden választásánál az összes ilyen felbontások egyformán valószínűek, és az egyes választások egymástól függetlenek), és ezután értesülünk arról, hogy az l ismeretlen elem mindegyike minden egyes felbontásnál melyik részhalmazhoz tartozik, akkor — P_{nkl}-lel jelölve annak a valószínűségét, hogy k ilyen felbontás elegendő az l ismeretlen elem meghatározására — az előző §-ban alkalmazott meggondoláshoz hasonlóan beláthatjuk, hogy

$$P_{nkl} = \prod_{\nu=0}^{l-1}\left(1-\frac{\nu}{r^k}\right)\left(1-\frac{l}{r^k}\right)^{n-l}. \tag{4. 1}$$

Ha tehát

$$l = o(n), \tag{4. 2}$$

akkor a

$$k = \frac{\log_2 nl + \log_2 \frac{1}{\log\frac{1}{\alpha}} + o(1)}{\log_2 r} \tag{4. 3}$$

* Ha $l > n$, viszont megengedett az, hogy — a szimultán Bar—Kochba terminológiáját használva — több játékos gondoljon ugyanarra a dologra, akkor sem szükséges több dichotomia mint az $l=n$ esetben, hiszen $2\log_2 n + \log_2 \frac{1}{2\log\frac{1}{\alpha}}$ dichotomia körülbelül α valószínűséggel elégséges a H halmaz minden elemének szeparálásához és teljesen mellékes, hogy hány játékos gondolt ugyanarra a dologra, hiszen akik ugyanarra gondoltak, mindig ugyanazokat a válaszokat adják és így, ha B kitalálta, hogy egyikük mire gondolt, akkor a többiről is tudja ugyanezt.

esetben lesz

$$\lim P_{nkl} = \alpha, \qquad (0 < \alpha < 1), \tag{4. 4}$$

míg ha

$$l \sim \vartheta n, \qquad (0 < \vartheta \leq 1), \tag{4. 5}$$

akkor a

$$k = \frac{2 \log_2 n + \log_2 \dfrac{\vartheta(2-\vartheta)}{2 \log \dfrac{1}{\alpha}} + o(1)}{\log_2 r} \tag{4. 6}$$

esetben lesz (4. 4) érvényes.

Ezek után azt várnánk, hogy ha az r-részre osztásnál az egyes részek elemszámai körülbelül úgy viszonylanak egymáshoz, mint a $p_1, p_2, \ldots, p_r$ számok $\left(\sum_{i=1}^{r} p_i = 1\right)$, akkor a fenti eredmények csak annyiban módosulnak, hogy $\log_2 r$ helyébe $I_1(\mathcal{P})$ lép. A tüzetesebb vizsgálat azonban azt mutatja, hogy ez nem igaz, ugyanis $\log_2 r$ helyébe nem a Shannon-féle $I_1(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{r} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$ elsőrendű információ-mennyiség, hanem az $I_2(\mathcal{P}) = \log_2 \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{r} p_i^2} \right)$ másodrendű információ-mennyiség lép. (Persze a $p_1 = p_2 = \ldots = p_r = 1/r$ esetben $I_1(\mathcal{P}) = I_2(\mathcal{P}) = \log_2 r$.) Ezt a következőképpen láthatjuk be: Jelöljék $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{r^k}$ valamilyen sorrendben az olyan k-tényezős szorzatokat, amelyek minden tényezője a $p_1, p_2, \ldots, p_r$ számok egyike (sorrend is számít!). Nyilván a π_i számok mind $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$ alakúak, ahol $\sum_{i=1}^{r} k_i = k$ és ez a szám a π_i számsorozatban $\frac{k!}{k_1! \, k_2! \ldots k_r!}$-szor fordul elő.

Az egyszerűség kedvéért csak a legérdekesebb esetet tekintjük, vagyis azt, amikor $l = n$.

Ez esetben P_{nk}-val jelölve annak valószínűségét, hogy a k felbontás H összes elemeit szeparálja,

$$P_{nk} = \sum{}' \pi_{i_1} \pi_{i_2} \ldots \pi_{i_n}, \tag{4. 7}$$

ahol az összegezés az összes *különböző* számokból álló $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$-szám n-esekre terjesztendő ki.

A (4. 7) jobb oldalán álló összeg aszimptotikus viselkedésének megvizsgálásához éppen arra a szita-formulára van szükség, amelyet egy előző dolgozatunkban [5] bizonyítottunk be. Jelölje B_{ij} azt az eseményt, hogy az E_{kn} mátrix i-edik és j-edik oszlopa azonos. E jelölés mellett P_{nk} annak a valószínűségével egyenlő, hogy a B_{ij} $(1 \leq i < j \leq n)$ események egyike sem következik be. Jelölje G azt a gráfot, amelynek szögpontjai az (i, j) számpárok $(1 \leq i < j \leq n)$ és amelyben az (i, j) és (i', j') számpároknak megfelelő szögpontok akkor és csak akkor vannak összekötve egy éllel, ha az i, j, i', j' számok nem mind különbözők (tehát, ha $i=i'$ vagy $i=j'$ vagy $j=i'$ vagy $j=j'$; nyilvánvaló, hogy e négy lehetőség közül $i<j$ és $i'<j'$ miatt legfeljebb egy állhat fenn). Jelölje Γ^* a G szögpontjai halmazának azon részhalmazai összességét, amelyek nem tartalmaznak egyetlen G-ben éllel összekötött szögpontpárt sem. és Γ^{**} a G szögpontjai halmazának azon részhalmazai összességét, amelyek legfeljebb egy G-ben éllel összekötött szögpontpárt tartalmaznak. Legyen

$$S_d^* = \Sigma^* P(B_{i_1 j_1} B_{i_2 j_2} \dots B_{i_d j_d}), \tag{4.8}$$

ill.

$$S_d^{**} = \Sigma^{**} P(B_{i_1 j_1} B_{i_2 j_2} \dots B_{i_d j_d}), \tag{4.9}$$

ahol Σ^* ill. Σ^{**} azt jelöli, hogy az összegezés csak az olyan $(i_1, j_1), \dots, (i_d, j_d)$ számpár d-esekre terjesztendők ki, amelyek Γ^*-hoz, ill. Γ^{**}-hoz tartoznak. Ez esetben az [5]-ben bebizonyított tételünk szerint s bármely nemnegatív egész értékére

$$1 - S_1^{**} + S_2^* - S_3^{**} + \dots - S_{2s+1}^{**} \leqq P_{nk} \leqq 1 - S_1^* + S_2^{**} - \dots + S_{2s}^{**}. \tag{4.10}$$

Azonban nyilvánvalóan

$$S_d^* = \left(\sum_{i=1}^{r^k} \pi_i^2 \right)^d \frac{n(n-1)\dots(n-2d+1)}{d!\, 2^k}, \tag{4.11}$$

továbbá

$$S_d^{**} = S_d^* \left(1 + \frac{8\left(\sum_{i=1}^{r^k} \pi_i^3 \right) d(d-1)}{3\left(\sum_{i=1}^{r^k} \pi_i^2 \right)^2 (n-2d+1)} \right). \tag{4.12}$$

Ha mármost

$$k = \frac{2\log_2 n + \log \dfrac{1}{2\log \frac{1}{\alpha}} + o(1)}{\log_2 \dfrac{1}{\sum\limits_{\nu=1}^{r} p_\nu^2}}, \tag{4.13}$$

akkor figyelembe véve, hogy

$$\sum_{i=1}^{r^k} \pi_i^2 = \left(\sum_{\nu=1}^{r} p_\nu^2 \right)^k, \tag{4.14}$$

azt kapjuk, hogy d minden rögzített értékére

$$S_d^* \sim \frac{\left(\log \frac{1}{\alpha} \right)^d}{d!}, \tag{4.15}$$

továbbá figyelembe véve, hogy

$$\sum_{i=1}^{r^k} \pi_i^3 = \left(\sum_{\nu=1}^{r} p_\nu^3 \right)^k, \tag{4.16}$$

és ezért, bevezetve a $\bar{p} = \max\limits_{1 \leq \nu \leq r} p_\nu$ jelölést,

$$\sum_{i=1}^{r^k} \pi_i^3 < \bar{p}^k \left(\sum_{\nu=1}^{r} p_\nu^2 \right)^k, \tag{4.17}$$

azt kapjuk, hogy

$$S_d^{**} = S_d^*(1 + o(n^{-\varrho})), \tag{4.18}$$

ahol

$$\varrho = \frac{\log_2 \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{r} p_\nu^2}{\bar{p}^2}}{\log_2 \frac{1}{\sum\limits_{\nu=1}^{r} p_\nu^2}} > 0. \tag{4.19}$$

Tehát s minden nemnegatív egész értékére

$$\sum_{d=0}^{2s+1} \frac{(-1)^d \left(\log \frac{1}{\alpha} \right)^d}{d!} \leq \underline{\lim}\, P_{nk} \leq \overline{\lim}\, P_{nk} \leq \sum_{d=0}^{2s} \frac{(-1)^d \left(\log \frac{1}{\alpha} \right)^d}{d!}. \tag{4.20}$$

Ilyen módon, elvégezve az $s \to +\infty$ határátmenetet nyerjük, hogy

$$\lim P_{nk} = e^{-\log \frac{1}{\alpha}} = \alpha. \tag{4.21}$$

Ezzel tehát bebizonyítottuk a következő tételt:

3b. TÉTEL. *Ha egy n elemű H halmaz elemeit egymástól függetlenül k-szor r (számozott) osztályba soroljuk, oly módon, hogy H elemei minden egyes osztálybasorolásnál egymástól függetlenül p_ν valószínűséggel kerülnek a ν-edik osztályba ($\nu = 1, 2, \ldots, r$), és P_{nk} jelöli annak a valószínűségét, hogy a szóban forgó k felosztás H bármely két elemét elválasztja, vagyis, hogy ne legyen H-nak két olyan különböző eleme, amelyek mindegyik választott felosztásnál ugyanabba az osztályba esnek, továbbá, ha n és k úgy tartanak végtelenhez, hogy*

$$k = \frac{2 \log_2 n + \log_2 \frac{1}{\log \frac{1}{\alpha}} + o(1)}{\log_2 \frac{1}{\sum\limits_{\nu=1}^{r} p_\nu^2}} \tag{4.22}$$

ahol $0 < \alpha < 1$, *akkor*

$$\lim P_{nk} = \alpha. \tag{4. 23}$$

Nyilvánvaló, hogy a 3b. tétel speciális esetként tartalmazza (az $r = 2$, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ esetben) a 3a. tételt.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] RÉNYI ALFRÉD: Az információelmélet néhány alapvető kérdése, *MTA III. Oszt. Közl.* **10** (1960) 251–282.

[2] „ On measures of entropy and information, Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on *Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, 1961, Vol. I. 547–561.

[3] „ On random generating elements of a finite Boolean algebra, *Acta Sci. Math. Szeged*, **22** (1961) 75–81.

[4] „ Statistical laws of accumulation of information, *Bulletin of the International Statistical Institute, 33rd. Session of the ISI in Paris*, 1961. pp. 1–7.

[5] „ Egy általános módszer valószínűségszámítási tételek bizonyítására és annak néhány alkalmazása, *MTA III. Oszt. Közl.* **11** (1961) 79–105.

(Beérkezett: 1961. XI. 9.)

EGY GAUSS-FÉLE SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATRÓL

Írta: VINCZE ISTVÁN

A Gauss-féle folyamat, amellyel az alábbiakban foglalkozunk, a matematikai statisztikában mint limeszfolyamat merül fel minta és eloszlásfüggvény, ill. két minta eltérésének határeseteként, ha a minta darabszám végtelenhez tart. Két minta összehasonlításával kapcsolatban nyertem néhány kétváltozós eloszlástételt és határeloszlástételt, amelyekből az említett folyamat több jellemzője egyszerűen meghatározható volt. Így például explicite meghatároztam az első abszolút-maximumhely eloszlásfüggvényét, továbbá egyszerű formulákat sikerült nyerni egyes momentumokra. A szóban forgó Gauss-folyamat szoros kapcsolatban van a Brown-mozgást leíró Einstein—Wiener-folyamattal, amely ugyancsak Gauss-folyamat, azonban független növekményű és ezért könnyebben kezelhető. E tulajdonságot használta fel Doob [5] határeloszlástételek közvetlen, azaz nem a véges mintára vonatkozó eloszlástételekből határátmenettel nyerhető meghatározására. „Heurisztikus" módszerének mértékelméleti alátámasztását Donsker [4] és Prochorov [8] adták. Említett együttes határeloszlástételeimet Doob módszerével is levezettem [13]. A Doob-féle gondolat módott adott az ún. első átmetszés sűrűségfüggvényére olyan egyszerű integrálegyenlet felírására, amely összefoglalja számos más határeloszlástétel esetét és esetleg továbbiak levezetését, vagy közelítő meghatározását is lehetővé teszi.

A tárgyalt Gauss-féle folyamat említett matematikai statisztikai vonatkozása mellett jelentős szerepet játszik a híradástechnikában, a hővezetés elméletében, az energiafogyasztás ingadozásának vizsgálatában és sok más fizikai és műszaki problémában.

Dolgozatunk célja a szóban forgó Gauss-folyamattal kapcsolatos néhány ismert eredmény és termékeny módszer ismertetése, s ezeknek néhány adalékkal való kiegészítése. A Gauss-folyamatra vonatkozólag utalunk P. Lévy [7], A. Blanc—Lapierre—R. Fortet [2] és J. L. Doob [6] munkáira.

A következő, első paragrafusban a minta és elméleti eloszlásfüggvény eltérése, amely véletlen függvény és binomiális (vagy polinomiális) folyamatnak is nevezhető, szolgál a tárgyalandó Gauss-folyamat szemléletes bevezetésére. — A 2. §-ban a maximum helyek eloszlásával foglalkozunk. Az abszolút maximum hely sűrűségfüggvényére egy abszolút konvergens sort vezetünk le, amely előállítás Turán Pál egy megjegyzése alapján sikerült. Tanácsaiért ezúton mondok köszönetet. — A 3. §-ban a Gauss-folyamattal kapcsolatos néhány momentumot vezetünk le. — A 4. §-ban a kapcsolatos Einstein—Wiener-folyamattal foglalkozunk.

1. §. A binomiális folyamat és a Gauss-féle folyamat

Legyenek $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ független, azonos, a (0, 1) intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók: $i=1, 2, \ldots$ n-re

$$\mathbf{P}(\delta_i < t) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad t \leqq 0 \\ t, & \text{ha} \quad 0 < t \leqq 1 \\ 1, & \text{ha} \quad 1 < t. \end{cases}$$

Jelölje $F_n(t)$ empirikus eloszlásfüggvényüket:

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{\delta_i < t} 1. \tag{1}$$

A matematikai statisztikában jelentős szerepet játszik az empirikus és elméleti eloszlásfüggvény eltérése:

$$\xi_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t).$$

A $\sup\limits_{0 \leqq t \leqq 1} |\xi_n(t)|$ és $\sup\limits_{0 \leqq t \leqq 1} \xi_n(t)$ valószínűségi változók határeloszlását $n \to \infty$ esetén KOLMOGOROV, ill. SZMIRNOV határozták meg és WOLFOWITZ mutatott rá először ezen eloszlások statisztikai felhasználhatóságára annak a kérdésnek az eldöntésénél, hogy valamely minta egy feltételezett elméleti eloszlású sokaságból származik-e.

A $\xi_n(t)$ véletlen függvény (1 valószínűséggel) a $t=0$-ban $\xi_n(0)=0$-ból indul és a t-tengelyhez $-45°$ szög alatt hajló szakaszokból áll, ugrásai a δ_i helyeken vannak, és $\frac{1}{\sqrt{n}}$ nagyságuak, a $\xi_n(1)=0$ pontban végződik. (1) alapján közvetlenül beláthatjuk a következő relációk érvényességét:

Minden rögzített t-re $\xi_n(t)$ binomiális eloszlású, továbbá

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}(\xi_n(t)) = 0 && 0 \leqq t \leqq 1 \\
&\mathbf{D}^2(\xi_n(t)) = t(1-t) && 0 \leqq t \leqq 1 \\
&\mathbf{P}(\xi_n(0) = 0) = 1 && \\
&\mathbf{M}(\xi_n(t)\xi_n(t')) = t(1-t'), && 0 \leqq t \leqq t' \leqq 1,
\end{aligned}$$

rögzített $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < 1$, $k \geqq 2$ értékekre a $\xi_n(t_1), \xi_n(t_2), \ldots, \xi_n(t_k)$ valószínűségi változók együttes eloszlása polinomiális.

Ha $n \to \infty$ akkor a $\xi_n(t)$ folyamat egy $\xi(t)$ Gauss-féle sztochasztikus folyamathoz tart, amelyet az irodalomban igen sokat vizsgáltak és amelyre nézve $\xi_n(t)$ fenti tulajdonságaiból közvetlenül a következőket állapíthatjuk meg:

Minden rögzített t-re $(0 \leqq t \leqq 1)$ $\xi(t)$ eloszlása normális eloszlás, továbbá

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}(\xi(t)) = 0, && 0 \leqq t \leqq 1 \\
&\mathbf{D}^2(\xi(t)) = t(1-t), && 0 \leqq t \leqq 1, \\
&\mathbf{P}(\xi(0) = 0) = 1, && \\
&\mathbf{M}(\xi(t)\xi(t')) = t(1-t'), && 0 \leqq t \leqq t' \leqq 1,
\end{aligned}$$

rögzített $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < 1$, $k \geqq 2$, értékekre a $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_k)$ változók együttes eloszlása k-változós normális eloszlás. Ismeretes továbbá, hogy $\xi(t)$ mintafüggvényei 1 valószínűséggel folytonosak, és ugyancsak 1 valószínűséggel sehol sem differenciálhatók. A mintafüggvény 1 valószínűséggel $t=0$-ra a $\xi(0)=0$ magasságból indul és a $\xi(1)=0$-ba érkezik. A folytonosság miatt a mintafüggvény felveszi maximumát éspedig 1 valószínűséggel egyetlen t_m^+ helyen, továbbá abszolút értékének maximumát egyetlen t_m helyen. Természetesen t_m^+ és t_m valószínűségi változók.

A $\tau = \frac{t}{1-t}$ új változó bevezetésével definiált

$$\zeta(\tau) = (1+\tau)\xi\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right), \qquad 0 \leqq \tau < \infty$$

sztochasztikus folyamat az Einstein—Wiener-folyamat, amely a térbeli Brown-mozgást végző pont koordinátatengelyekre eső vetületeinek mozgását írja le. A $\xi(t)$ folyamatra felírt fenti relációkból levezethetők ennek következő tulajdonságai: Minden rögzített τ-ra $\zeta(\tau)$ normális eloszlású, továbbá

$$\mathbf{P}(\zeta(0)=0) = 1,$$

$$\mathbf{M}(\zeta(\tau)) = 0, \qquad 0 \leqq \tau < \infty$$

$$\mathbf{D}^2(\zeta(\tau)) = \tau, \qquad 0 \leqq \tau < \infty$$

$$\mathbf{M}(\zeta(\tau)\zeta(\tau')) = \min(\tau, \tau').$$

Ugyancsak egyszerű számolással adódik, hogy $\zeta(\tau)$ független növekményű, vagyis idegen (τ_1, τ_2) és (τ_3, τ_4) intervallumokra

$$\mathbf{P}(\zeta(\tau_4) - \tau(\zeta_3) < x | \zeta(\tau_2) - \zeta(\tau_3) = y) = \mathbf{P}(\zeta(\tau_4) - \zeta(\tau_3) < x), \qquad 0 \leqq \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4.$$

A $\xi(t)$-re vonatkozó problémák átfogalmazhatók a $\zeta(\tau)$-ra vonatkozó problémákba. Így például a $\sup\limits_{0 \leqq t \leqq 1} \xi(t)$ valószínűségi változó eloszlásához a következő esemény valószínűségét kell meghatározni

$$\{\xi(t) < a, \ 0 \leqq t \leqq 1\},$$

ez azonban a $\zeta(\tau)$ folyamatra vonatkozó következő eseménynek felel meg:

$$\{\zeta(\tau) < a(1+\tau), \ 0 \leqq \tau < \infty\}.$$

$\zeta(\tau)$ független növekményű lévén jóval egyszerűbben kezelhető, mint $\xi(t)$ és így DOOB [5] hathatós módszert adott erre vonatkozó eredmények levezetésére, amit azóta több szerző kihasznált [1, 2, 13].

2. §. A Gauss-folyamat maximum helyeinek eloszlása

Egy előző dolgozatomban [12] meghatároztam a $(t_m^+, \xi(t_m^+))$ és $(t_m, \xi(t_m))$ valószínűségi változó párok együttes eloszlását. Ezek a $\xi_n(t)$ folyamatra, helyesebben két független ilyen folyamat különbségére vonatkozó, megfelelő valószínűségi változó párok együttes eloszlásának határértékeként adódtak. Az eredmények: $0 \leqq z \leqq 1$, $0 \leqq y$

$$\mathbf{P}(\xi(t_m^+) < y, t_m^+ < z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y \int_0^z \frac{u^2}{[v(1-v)]^{3/2}} e^{-\frac{u^2}{2v(1-v)}} du\, dv, \tag{2}$$

$$\mathbf{P}(\xi(t_m) < y, t_m < z) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^y \int_0^z f(u, v) f(u, 1-v)\, du\, dv, \tag{3}$$

ahol

$$f(y, z) = \frac{y}{z^{3/2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu (2\nu+1) e^{-\frac{1}{2}(2\nu+1)^2 \frac{y^2}{z}}. \tag{4}$$

Az első változók eloszlására peremeloszlásként adódnak a Szmirnov- és Kolmogorov-féle eloszlások, az egyoldali maximum helyre az ismeretes eredmény

$$\mathbf{P}(t_m^+ < z) = z, \qquad 0 \leqq z \leqq 1,$$

vagyis az egyenletes eloszlás adódik. A következőkben a t_m eloszlásával foglalkozunk.

A (3) formulából $y = \infty$-re nyerjük a t_m eloszlásfüggvényét

$$\mathbf{P}(t_m < z) = \Phi(z) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^z f(u, v) f(u, 1-v)\, du\, dv,$$

a sűrűségfüggvény

$$\Phi'(z) = \varphi(z) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^\infty f(u, z) f(u, 1-z)\, du.$$

Ha $f(y, z)$ (4) alatti sorát e kifejezésbe helyettesítjük, s tagonként integrálunk — feltéve, hogy a tagonkénti integrálás megengedett — a következő tetszetős előállítást nyerjük:

$$\varphi(z) \sim 2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+\nu} \frac{(2\mu+1)(2\nu+1)}{[(2\mu+1)^2 z + (2\nu+1)^2 (1-z)]^{3/2}}.$$

Sajnos ez a formálisan nyert sor nem abszolút konvergens, amiről már $z=0$ helyettesítéssel meggyőződhetünk. A baj onnan származik, hogy $f(y, z)$ sora $y=0$-ra nem abszolút konvergens; $y=\infty$-re ez a nehézség nem forog fenn. Ismeretes azonban, hogy az $f(y, z)$ függvénynek, amely a hővezetés elméletében szerepet játszó

ϑ-függvény, más előállítása is van, s TURÁN PÁL javasolta, hogy az integrál (0, 1) intervallumra eső részét ennek segítségével számítsam. E módszerrel sikerült a következő eredményre jutni:

1. TÉTEL. *Ha t_m jelöli a* (0, 1)*-ben értelmezett $\xi(t)$ Gauss-féle folyamat abszolút-maximum-helyét, amely folyamatot a* $\mathbf{P}(\xi(0)=0)=1$, $\mathbf{M}(\xi(t))=0$, $0 \leqq t \leqq 1$ *és* $\mathbf{M}(\xi(t)\xi(t'))=t(1-t')$, $0 \leqq t \leqq t' \leqq 1$ *relációk jellemzik, akkor* $0 \leqq z \leqq 1$*-re*

$$\lim_{\Delta z = 0} \frac{\mathbf{P}(z \leqq t_m < z + \Delta z)}{\Delta z} = \varphi(z) =$$

$$= \sqrt{\frac{32}{\pi}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+\nu} \frac{(2\mu+1)(2\nu+1)}{[(2\mu+1)^2 z + (2\nu+1)^2(1-z)]^{3/2}} \int_{\alpha_{\mu,\nu}(z)}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

ahol

$$\alpha_{\mu,\nu}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{[(2\mu+1)^2 z + (2\nu+1)^2(1-z)]^{1/2}}{[z(1-z)]^{1/4}}.$$

E sor igen gyorsan konvergál és alkalmas $\varphi(z)$ értékeinek numerikus meghatározására.

BIZONYÍTÁS: Ismeretes, hogy az

$$l(y) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} (2\nu+1) e^{-\frac{1}{2}(2\nu+1)^2 y^2}$$

függvény a következő alakban is előállítható (lásd pl. [9] 47. old.):

$$l(y) = \frac{\pi}{y^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} (2\nu+1) e^{-\frac{(2\nu+1)^2 \pi^2}{8y^2}}, \tag{5}$$

mely utóbbi sor az $y=0$ környezetében kedvezőbb. Vagyis $l(y)$-ra a következő függvényegyenlet áll fenn:

$$l(y) = \left(\frac{\pi}{2y^2}\right)^{3/2} l\left(\frac{\pi}{2y}\right). \tag{6}$$

Az $f(y, z)$ függvény a következő alakban írható:

$$f(y, z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{y}{z^{3/2}} l\left(\frac{y}{z^{1/2}}\right),$$

ily módon

$$\varphi(z) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{y^2}{[z(1-z)]^{3/2}} l\left(\frac{y}{z^{1/2}}\right) l\left(\frac{y}{(1-z)^{1/2}}\right) dy.$$

Integrálunkat két részre bontjuk: $\varphi(z)=I_1+I_2$, ahol

$$I_1=\sqrt{\frac{\pi}{8}}\int_0^{\alpha}\frac{y^2}{[z(1-z)]^{3/2}}\,l\left(\frac{y}{z^{1/2}}\right)l\left(\frac{y}{(1-z)^{1/2}}\right)dy,$$

amely α-t alkalmasan fogjuk megválasztani. (6) alapján írhatjuk — y helyett $\frac{y}{z^{1/2}}$-t helyettesítve —

$$I_1=\sqrt{\frac{\pi^7}{512}}\int_0^{\alpha}\frac{1}{y^4}\,l\left(\frac{\pi z^{1/2}}{2y}\right)l\left(\frac{\pi(1-z)^{1/2}}{2y}\right)dy.$$

Alkalmazzuk most az

$$y=\frac{\pi[z(1-z)]^{1/2}}{2u}$$

helyettesítést. Eredményünk

$$I_1=\sqrt{\frac{\pi}{8}}\int_{\frac{\pi[z(1-z)]^{1/2}}{2\alpha}}^{\infty}\frac{u^2}{[z(1-z)]^{3/2}}\,l\left(\frac{u}{z^{1/2}}\right)l\left(\frac{u}{(1-z)^{1/2}}\right)du.$$

Válasszuk most α-t a következő módon

$$\alpha=\alpha(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}[z(1-z)]^{1/4},$$

amikor is $I_1=I_2$ és

$$\varphi(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{\alpha(z)}^{\infty}\frac{u^2}{[z(1-z)]^{3/2}}\,l\left(\frac{u}{z^{1/2}}\right)l\left(\frac{u}{(1-z)^{1/2}}\right)du.$$

Helyettesítve az $l(y)$ függvény (5) alatti sorát, az abszolút konvergencia miatt a kétszeresen végtelen sort tagonként integrálhatjuk:

$$\varphi(z)=\sqrt{\frac{32}{\pi}}\frac{1}{[z(1-z)]^{3/2}}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\mu+\nu}(2\mu+1)(2\nu+1)\int_{\alpha(z)}^{\infty}u^2e^{-\frac{u^2}{2}\left[\frac{(2\mu+1)^2}{z}+\frac{(2\nu+1)^2}{1-z}\right]}du.$$

Ebből jutunk az

$$y=u\left[\frac{(2\mu+1)^2z+(2\nu+1)^2(1-z)}{z(1-z)}\right]^{1/2}$$

helyettesítéssel a tételünkben megadott alakhoz. A $\varphi(z)$ sűrűségfüggvény — ellentétben a t_m^+ sűrűségfüggvényével — a $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ sajátsággal rendelkezik, továbbá a $z=0$ pontban végtelen rendben simul a z-tengelyhez, ami $\varphi(z)$ előállításából ugyancsak leolvasható.

3. §. Momentumok

Ebben a paragrafusban a t_m^+ és $\xi(t_m^+)$ valószínűségi változók néhány momentumát és egymásra vonatkozó regresszióját adjuk meg.

2. TÉTEL. *Az 1. tételben leírt $\xi(t)$ Gauss-folyamat t_m^+ maximum helyére és $\xi(t_m^+)$ maximumára érvényesek a következő relációk:*

$$\mathbf{M}(\xi(t_m^+)) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \tag{7}$$

$$\mathbf{D}^2(\xi(t_m^+)) = \frac{4-\pi}{8}, \tag{8}$$

$$\mathbf{M}(t_m^+\xi(t_m^+)) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \tag{9}$$

$$\mathbf{M}(t_m^+|\xi(t_m^+)=y) = \frac{1}{2}, \qquad y>0, \tag{10}$$

$$\mathbf{D}^2(t_m^+|\xi(t_m^+)=y) = \frac{1}{4} - \frac{y}{\sqrt{8\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-2y^2t}}{t^{1/2}(1+t)}\,dt, \tag{11}$$

$$\mathbf{M}(\xi(t_m^+)|t_m^+=z) = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\,[z(1-z)]^{1/2}, \tag{12}$$

$$\mathbf{D}^2(\xi(t_m^+)|t_m^+=z) = \frac{3\pi-8}{\pi}z(1-z). \tag{13}$$

KOROLLÁRIUM: *A t_m^+ és $\xi(t_m^+)$ valószínűségi változók korrelálatlanok.*

Megjegyezzük, hogy a (11) jobboldalán szereplő integrál a következő, ún. Whittaker-féle függvénnyel fejezhető ki (lásd pl. [11]):

$$W_{-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}}(z) = \frac{z^{\frac{1}{4}}e^{-z}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{t^{1/2}(1+t)}\,dt.$$

BIZONYÍTÁS: A (7) és (8) formula a Szmirnov-eloszlás

$$\mathbf{P}(\xi(t_m^+) < y) \doteq 1 - e^{-2y^2}$$

első két momentumából adódik. A (9) vegyes momentumot az együttes eloszlás (6) alatti alakjából közvetlenül nyerhetjük:

$$\mathbf{M}(t_m^+\xi(t_m^+)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\int_0^1 \frac{y^2 z}{[z(1-z)]^{3/2}}\,e^{-\frac{y^2}{2z(1-z)}}\,dy\,dz,$$

ahol az y szerinti, majd a z szerinti integrálás minden nehézség nélkül keresztülvihető.

A (10) formulát a következőképpen kapjuk:

$$\mathbf{M}(t_m^+ | \xi(t_m^+) = y) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \frac{y^2 z}{[z(1-z)]^{3/2}} e^{-\frac{y^2}{2z(1-z)}} dz}{4ye^{-2y^2}}.$$

A

$$z = \frac{t}{1+t}, \qquad dz = \frac{dt}{(1+t)^2}$$

helyettesítéssel az

$$\frac{1}{\sqrt{8\pi}} ye^{y^2} \int_0^\infty \frac{1}{t^{1/2}} e^{-\frac{y^2}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} dt$$

kifejezéshez jutunk, amelyből (lásd [11] 170. old.)

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^{1/2}} e^{-\frac{y^2}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{ye^{y^2}}$$

és így az $\frac{1}{2}$ értékhez jutunk.

A (11) formula levezetéséhez határozzuk meg a $t_m^+ - (t_m^+)^2$ várható értékét a $\xi(t_m^+) = y$ feltétel mellett:

$$\mathbf{M}(t_m^+ - (t_m^+)^2 | \xi(t_m^+) = y) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \frac{y^2 z(1-z)}{[z(1-z)]^{3/2}} e^{-\frac{y^2}{2z(1-z)}} dz}{4ye^{-2y^2}}.$$

Az integrálandó függvény szimmetrikus z-ben az $\frac{1}{2}$ pontra nézve és így $0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}$-ben alkalmazzuk a

$$z(1-z) = \frac{1}{4(t+1)}, \quad (1-2z)dz = -\frac{dt}{4(1+t)^2}$$

transzformációt, azonban

$$1-2z = \left(\frac{t}{1+t}\right)^{1/2}$$

és így

$$dz = -\frac{1}{4} \frac{1}{t^{1/2}(1+t)^{3/2}} dt.$$

Ily módon a keresett momentumra a következő — elemi függvényekkel véges alakban ki nem fejezhető — kifejezést nyerjük:

$$\mathbf{M}(t_m^+ - (t_m^+)^2 | \xi(t_m^+) = y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-2y^2t}}{t^{1/2}(1+t)}\, dt.$$

Minthogy t_m^+ várható értékét (1)-ből ismerjük, innen a négyzet várható értékét, végül pedig a szórásnégyzet (11) alatti alakját kapjuk.

A (12) és (13) relációk igazolása a (9)-re vonatkozó megjegyzésünk figyelembevételével egyszerűen történhet, ugyancsak a korolláriumé, amely (10)-ből azonnal leolvasható.

4. §. Az első átmetszés abszcisszájának eloszlása

A bevezetésben említett $\zeta(\tau)$ $(0 \leqq \tau < \infty)$ Einstein—Wiener-folyamattal foglalkozunk. Mint említettük, a $\xi(t)$ Gauss-folyamattal kapcsolatos bizonyos problémák a

$$\zeta(\tau) = (1+\tau)\xi\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)$$

összefüggés miatt a $\zeta(\tau)$-ra vonatkozó problémákba vihetők át. E problémák egy része a következő típusú: Legyen $g(\tau)$ valamely görbe egyenlete, amelyre vagy

a) $g(\tau) > b > 0, \quad 0 \leqq \tau < \infty$

vagy

b) $g(\tau) > 0 \quad 0 < \tau < \infty$

és $g(0) = 0$, ugyanakkor $g(\tau)$ a $\tau = 0$ pontban elég magas rendben érinti a függőleges tengelyt. Feladat a

$$\Phi(g(\tau)) = \mathbf{P}(\zeta(\tau) < g(\tau), \quad 0 < \tau < \infty)$$

$$\Phi(z; g(\tau)) = \mathbf{P}(\zeta(\tau) < g(\tau); \quad 0 \leqq \tau \leqq z)$$

valószínűségek meghatározása. Itt

$$\Phi(\infty; g(\tau)) = \Phi(g(\tau))$$

és $\Phi(g(\tau)) < 1$ esetén a $\zeta(\tau)$ folyamat $1 - \Phi(g(\tau))$ valószínűséggel átmetszi a $g(\tau)$ görbét valamely végesben fekvő τ értékre. Ez esetben jelölje $\tau_{g(\tau)}^+ = \tau^+$ az első ilyen helyet; ennek eloszlásfüggvényére a következő áll: $\mathbf{P}(\tau^+ < z) = \mathbf{P}(\zeta(\tau) \geqq g(\tau)$ valamely $\tau < z$-re$) = 1 - \Phi(z; g(\tau))$.

Tehát τ^+ sűrűségfüggvénye

$$\Psi(z; g(\tau)) = -\Phi'(z; g(\tau)).$$

E sűrűségfüggvény integrálja 0-tól ∞-ig csak akkor ad 1-et, ha a $\zeta(\tau)$ görbe pozitív valószínűséggel átmetszi valahol $g(\tau)$-t, tehát, ha $\Phi(g(\tau))=0$. Ahhoz, hogy a szokásos értelemben vett sűrűségfüggvényt kapjuk, osztani kell $1-\Phi(g(\tau))$-val:

$$\frac{-\Phi'(z;g(\tau))}{1-\Phi(z;g(\tau))}.$$

A bevezetésben mondottak szerint a

$$g(\tau)=a(1+\tau)$$

„fal", a Kolmogorov—Szmirnov határeloszlásnak felel meg, vagyis a

$$\{\zeta(\tau)<a(1+\tau),\quad 0\leqq\tau<\infty\}$$

esemény a

$$\{\xi(t)<a,\quad 0\leqq t\leqq 1\}$$

eseménynek felel meg.

A Rényi-féle egymintás relatív eltérés eloszlása [10] a

$$\{\xi(t)<at,\quad 0<f_0\leqq t\leqq 1\}$$

esemény valószínűségét adja meg, ha a mintaelemszám $n\to\infty$, ami a

$$\{\zeta(\tau)<a\tau,\quad f_0'\leqq\tau<\infty\}$$

eseménynek felel meg.

Az Anderson—Darling-féle relatív eltérés a

$$\left\{\frac{\xi(t)}{[t(1-t)]^{1/2}}<a,\quad 0\leqq t\leqq 1\right\}$$

eseményhez vezet, ha $n\to\infty$ és az a

$$\{\zeta(\tau)<a\sqrt{\tau},\ 0<\tau<\infty\}$$

eseményt adja.

Az alábbiakban egy egyszerű integrálegyenletet vezetünk be annak az első abszcisszának sűrűségfüggvényére, amelyben a $\zeta(\tau)$ folyamat mintagörbéje a $g(\tau)$ görbét metszi. Minthogy a $\zeta(\tau)$ folyamat, minden $a>0$-ra, a $g(\tau)=a\tau$ egyenest 1 valószínűséggel a $\tau=0$ pont tetszőleges kis környezetében metszi, az ilyen típusú falak esetében a $\tau^+_{g(\tau)}$ definíciója csak valamely $0<\tau_0<\tau<\infty$ intervallumra vonatkozhat. (A Rényi-féle esetben $\tau_0=f_0$ volt.) Az alábbiakban ezért a $g(\tau)$-ra a $g(0)=$ $=b_0>0$ kikötést tesszük, amely mellett a $\tau=0$ pont e kivételes helyzete nem forog fenn, azonban tételünk arra az esetre is áll, ha a $g(\tau)$ érintője a $\tau=0$-ban függőleges és $g(\tau)$ itt eléggé magas rendben simul az érintőhöz.

3. TÉTEL. *Legyen $g(\tau)$ a $(0,\infty)$ félegyenesen értelmezett folytonos görbe, amelyhez léteznek olyan $0<b_0<b$ és $0\leqq a$ számok, hogy $g(0)\geqq b_0$ és $0<g(\tau)<a\tau+b$ minden $\tau\geqq 0$-ra. Legyen τ_g^+ az első metszéspont abszcisszája, ahol a $g(\tau)$ görbe annak a $\zeta(\tau)$ Einstein—Wiener-folyamatnak mintagörbéjét metszi, amely folyamatra a*

$$\mathbf{P}(\zeta(0)=0)=1$$
$$\mathbf{M}(\zeta(\tau))=0,\qquad 0\leqq\tau<\infty$$
$$\mathbf{M}(\zeta(\tau)\zeta(\tau'))=\min(\tau,\tau')$$

relációk fennállanak. Akkor a τ_g^+ $\psi(x, g(\tau)) = \psi(x)$ sűrűségfüggvénye a következő integrálegyenletet elégíti ki:

$$\varphi(x; a, b) = \int_0^x \psi(\tau)\varphi(x-\tau, a, a\tau + b - g(\tau))d\tau, \tag{14}$$

ahol

$$\varphi(x; a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x^{1/2}} e^{-\frac{1}{2x}(b+ax)^2}. \tag{15}$$

BIZONYÍTÁS: Megemlítjük DOOB [5] következő lemmáját: Annak valószínűsége, hogy a $\zeta(\tau)$ folyamat az $a\tau + b$ egyenest $(b > 0, a \geqq 0)$ átmetszi e^{-2ab}.

Jelöljük most azt az első abszcisszát, ahol a $\zeta(\tau)$ folyamat az $a\tau + b$ egyenest metszi $\tau_{a,b}^+$-vel. A $\tau_{a,b}^+$ sűrűségfüggvényét egy előző dolgozatomban [13] meghatároztam, azonban ez a (6) formulából is levezethető, ha az abban szereplő $\xi(t)$ folyamatról a megfelelő transzformációval áttérünk a $\zeta(\tau)$ folyamatra. Ez a sűrűségfüggvény a (15) alatti $\varphi(x; a, b)$, amelyre tehát

$$\int_0^\infty \varphi(x; a, b)dx = e^{-2ab},$$

vagyis az integrál az $a\tau + b$ egyenes átmetszésének DOOB által levezetett valószínűségét adja.

Ahhoz, hogy a $\zeta(\tau)$ folyamat az $a\tau + b$ egyenest valamely (első) $\tau_{a,b}^+$ abszcisszájú pontban messe, először a $g(\tau)$ görbét kell valamely első τ_g^+ abszcisszájú pontban metszenie. Azonban a $\zeta(\tau)$ folyamat független növekményű és így $\zeta(\tau)$-nak az a része, amely a $(\tau_g^+; \zeta(\tau_g^+))$ pont után következik, úgy tekinthető, mint egy tételünkben leírt Einstein—Wiener-folyamat, csak a (0, 0) pont szerepét a $(\tau_g^+, \zeta(\tau_g^+))$ játssza és ehhez képest az $a\tau + b$ egyenes most egy az $a\tau_g^+ + b - g(\tau_g^+)$ magasságból és ugyancsak a iránytangenssel haladó egyenes, amely első átmetszésének a sűrűségét ugyancsak a (15) alatti formula adja az a és $b \sim a\tau_g^+ + b - g(\tau_g^+)$ paraméterekkel. Ezek után integrálegyenletünk a következőképpen nyerhető: Annak valószínűsége, hogy a $\zeta(\tau)$ folyamat az $a\tau + b$ egyenest először a $\tau = x$ pont $(x, x + dx)$ környezetében messe, egyrészt $\varphi(x; a, b)dx$. Másrészt ezt a következő módon is kifejezhetjük: annak valószínűsége, hogy a $\zeta(\tau)$ folyamat a $g(\tau)$ görbét először a $\tau_g^+ = \tau$ hely $(\tau, \tau + d\tau)$ környezetében messe $\psi(\tau)d\tau$, továbbá annak valószínűsége, hogy az innen kiinduló folyamat az $a\tau + b$ egyenest az $(x, x + dx)$ intervallumban messe

$$\varphi(x-\tau; a, a\tau + b - g(\tau)).$$

A független növekményűség miatt a két utóbbi valószínűséget szorozni és τ szerint a $(0, x)$ intervallumban integrálni kell, amit a $\varphi(x; a, b)dx$-vel összevetve, a (14) integrálegyenlethez jutunk. Ezzel a 3. tételt bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] ANDERSON, T. W.—DARLING, D. A.: „Asymptotic theory of certain „goodness of fit" criteria based on stochastic processes". *Annals of Mathematical Statistics* **23** (1952) 193—212.
[2] BLANC—LAPIERRE, A.—FORTET, R.: *Théorie des fonctions aléatoires.* Masson et Cie, Paris, 1953.
[3] DARLING, D. A.—SIEGERT, A. J. F.: „The first passage problem for a continuous Markov process". *Annals of Mathematical Statistics* **24** (1953) 624—639.
[4] DONSKER, M. D.: „Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov—Smirnov theorems". *Annals of Mathematical Statistics* **23** (1952), 277—281.
[5] DOOB, J. L.: „Heuristic approach to the Kolmogorov—Smirnov theorems". *Annals of Mathematical Statistics* **20** (1949) 393—403.
[6] DOOB, J. L.: *Stochastic Processes.* New York—London, 1953.
[7] LÉVY, P.: *Processus stochastiques et mouvement brownien.* Gauthier—Villars, Paris, 1948.
[8] Прохоров, Ю. В.: Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теорий вероятностей. Теория вероятностей и ее применения **1** (1956) 177—238.
[9] RÉNYI A.: Az $L(z)$ valószínűség-eloszlásfüggvényről. *MTA Matematikai Kutató Intézete Közleményei* **2** (1957) 43—50.
[10] RÉNYI A.: A rendezett minták elméletéről. *A MTA III. Oszt. Közleményei* **3** (1953) 467—503.
[11] Рыжик, И. М.—Градштейн, и. с.: Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва, 1951.
[12] VINCZE I.: „Einige zweidimensionale Verteilungs- und Grenzverteilungssätze in der Theorie der geordneten Stichproben." *MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **2** (1957) 183—209.
[13] VINCZE I.: „On some distributions and limiting distributions connected with two sample tests." (In chinese.) *The FU-TAN University Journal* (Shanghai), (1960), 1—13.

(Beérkezett: 1961. XI. 12.)

SZELE TIBOR EGY GYŰRŰELMÉLETI PROBLÉMÁJÁNAK A MEGOLDÁSA*

Hajós György professzor 50. születésnapjára ajánlva

Írta: SZÁSZ FERENC

Ebben a kis cikkben gyűrűn mindvégig asszociatív gyűrűt, radikálon pedig felső nilradikált értünk. A felhasznált fogalmakat illetően az [1], [2], [3] és [7] könyvekre hivatkozunk.

SZELE TIBORtól származik az a probléma (1949), hogy ha egy A gyűrűnek csak véges sok jobbideálja van, akkor a gyűrűnek vajon csak véges sok balideálja van-e? Ugyanezt a problémát RÉDEI LÁSZLÓ is felvetette egy más, de ekvivalens alakban a német nyelvű [3] algebra-könyvének az 56. §-a végén, a 211. oldalon: létezik-e olyan gyűrű, amelynek csak véges sok jobbideálja, de végtelen sok balideálja van? A probléma kellő értékeléséhez fontos megjegyezni azt, hogy bármilyen A gyűrűben 0 és maga A nyilván jobbideál és egyszersmind balideál is. Ezek az A gyűrű triviális jobb-, illetve balideáljai.** SZELE [6] vizsgálta azt az esetet, amikor az A gyűrűben csak triviális jobbideálok vannak (azaz amikor A nemtriviális jobbideálok nélkül való gyűrű), és így a jobbideálok száma pontosan kettő. Ez az eset pontosan akkor áll fenn, ha A vagy ferdetest, vagy prímszámrendű zérógyűrű. Ezek a gyűrűk egyszersmind csak triviális balideálokat tartalmaznak. Tehát SZELE T. megállapításának következményeként igaz az is, hogy ha az A gyűrű jobbideáljainak a száma legalább három, akkor a balideáljainak a száma is legalább három. Mármost megjegyzendő, hogy STEINFELD OTTÓ [4] cikke útmutatást ad arra, hogy a nemtriviális jobbideálokat tartalmazó A gyűrűben milyen speciális alakú részgyűrűk között lehet nemtriviális balideálokat is találni. Az eredeti Szele-féle [6] eredmény következménye a minimum-feltételű féligegyszerű gyűrűkről szóló Wedderburn—Artin-féle struktúratételnek. SZELE [6] tételének igen rövid elemi bizonyítása megtalálható a szerző [5] cikke 1. lemmájának a bizonyításánál.

Ezek szerint nagyon egyszerű viszonyok vannak a gyűrű egyoldali ideáljai közt, ha a jobbideálok száma kettő. Nagyon eltérő és lényegesen bonyolultabb kapcsolat lehet azonban a jobbideálháló és balideálháló közt akkor, ha az A gyűrű-

* Ennek a cikknek az anyagát a szerző a Bolyai János Matematikai Társulat budapesti tagozatában 1962. február 2-án előadta „SZELE TIBOR és RÉDEI LÁSZLÓ egy gyűrűelméleti problémájának a megoldása" címmel. A szerző már ebben az előadásában bebizonyította azt a még élesebb megállapítást, hogy a tételben szereplő gyűrűben mind a tetszőleges balideáloknak, mind pedig a főbalideáloknak a száma pontosan $\mathfrak{m}$, és ugyanakkor a jobbideálok száma három, és meghatározta a balideálháló és a jobbideálháló diagramját is. Ezeknek az eredményeknek a bizonyítását a szerző más további eredményekkel együtt németül szándékozik publikálni. Még nyitott probléma, hogy egy gyűrűben a jobbideálok számának a végességéből vajon szükségképpen folyik-e a balideálok minimum-feltétele. További nyitott kérdések is felmerülnek a balideálháló és a jobbideálháló viszonyával kapcsolatban.

** Ezért bármely $A \neq 0$ gyűrűben a jobbideálok száma (és persze a balideálok száma is) legalább kettő. Ha pedig A-ban pontosan egyetlen jobbideál van, akkor egyetlen balideál van, mert $A=0$.

nek legalább három jobbideálja van, miként ez látszik a Szele—Rédei-féle probléma megoldásának a késésén és a megoldást élesebb alakban adó alábbi eredményünkön:

TÉTEL. *Tetszőleges* $\mathfrak{m}$ *végtelen számossághoz létezik olyan gyűrű, amelynek pontosan három jobbideálja van (maga a gyűrű, továbbá a radikál és* 0*), és amelynek legalább* $\mathfrak{m}$ *különböző főbalideálja van. Ilyen tulajdonságú (asszociatív) A gyűrű explicit módon megadható még úgy is, hogy A egységelemes, bármely jobbideál főjobbideál, az N radikálnak mind a baloldali, mind a jobboldali annullátora maga N, továbbá A/N kommutatív test, végül az A^+ additív csoport vagy torziómentes osztható csoport* [1], *vagy elemi p-csoport legyen.*

BIZONYÍTÁS. Legyen K tetszőleges végtelen $\mathfrak{m}$-számosságú kommutatív test, pl. ilyen test a K_p prímtestnek az $\mathfrak{m}$-transzcendenciafokú tisztán transzcendens testbővítése, ahol p vagy nulla, vagy prímszám. Tekintsük a K testnek a $K(x)$ egyszerű transzcendens testbővítését és legyen B és C olyan additív Abel-féle csoport, amelyre $B \cong C \cong (K(x))^+$, ahol A^+ jelöli egy tetszőleges A gyűrű additív csoportját, és legyen $B \cap C = 0$, amely indexezéssel mindig elérhető. Legyen most speciálisan

$$A^+ = B \oplus C,$$

ahol $\oplus$ direkt összeg. Tehát A^+ elemei az összes (r, s) rendezett párként is felfoghatók, ahol $r = r(x)$, $s = s(x)$ mind a $K(x)$ test elemei, és a párok között egyenlőségi reláció és az összeadás komponensekként van értelmezve. Ha most bevezetjük az $\bar{r}(x) = r(x^2)$ operációt, amelyre nyilván $\overline{r_1 \cdot r_2} = \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2$ és $\overline{r_1 + r_2} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2$ érvényes, és ha a rendezett párok közt egy szorzást a $K(x)$-beli műveletekkel és az alábbi

$$(r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) = (r_1 \cdot r_2, \bar{r}_1 s_2 + r_2 s_1)$$

egyenlettel definiálunk, akkor a számolással belátható

$$\begin{aligned} \{(r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2)\} \cdot (r_3, s_3) &= \\ = (r_1 r_2 r_3, \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2 s_3 + \bar{r}_1 r_3 s_2 + r_2 r_3 s_1) &= \\ = (r_1, s_1) \cdot \{(r_2, s_2) \cdot (r_3, s_3)\} & \end{aligned}$$

egyenlőség miatt, valamint a hasonló könnyen igazolható baloldali és jobboldali disztributív egyenlőség miatt A^+ speciális A asszociatív gyűrű lett. Minthogy $r \in K$ esetén $\bar{r} = r$, nyilván $(1, 0)$ kétoldali egységelem A-ban, továbbá $(0, s_1) \cdot (0, s_2) = (0, 0)$ és $(r, 0) \cdot (0, s) = (0, \bar{r}s)$ is érvényes. Az összes $(0, s)$ elem egy N kétoldali ideált alkot, amelyre nézve $N^2 = 0$ és $A/N \cong K(x)$ is igazolható. Közvetlenül belátható, hogy $(r_1, s_1) \cdot (0, s) = (0, 0) = (0, s) \cdot (r_2, s_2)$ esetén szükségképpen $(r_1, s_1) \in N$ és $(r_2, s_2) \in N$, mert $\bar{r} = 0$ csak $r = 0$ esetén lehet. Ezért az N radikál egybeesik mind a balannullátorainak, mind a jobbannullátorainak a kétoldali ideáljával.

Az A gyűrű A^+ additív csoportjáról a tételben említett állítás nyilván teljesül $A^+ = B \oplus C$ és $B \cong C \cong (K(x))^+$ miatt.

Most meghatározzuk az A gyűrű összes jobbideálját. Ha $a = (0, 0)$, akkor az a elemmel generált $(a)_r$ főjobbideál (és $(a)_l$ főbalideál egyaránt) az A gyűrű zéruseleme. Ha $b = (0, s_1)$, ahol $s_1 \neq 0$, továbbá $s_2(x) \in K(x)$ tetszőleges elem, akkor

$$(0, s_1) \cdot \left(\frac{s_2}{s_1}, 0\right) = (0, s_2) \in (b)_r$$

miatt $N \subseteqq (b)_r$, továbbá a triviális $(b)_r \subseteqq N$ miatt $(b)_r = N$. Ha pedig $c = (r_1, s_1)$, ahol $r_1 \neq 0$, továbbá $r_2, s_2 \in K(x)$ tetszőleges elemek, akkor

$$(r_1, s_1) \cdot \left(\frac{r_2}{r_1}, \frac{s_2}{\bar{r}_1} - \frac{r_2 s_1}{r_1 \cdot \bar{r}_1} \right) = (r_2, s_2) \in (c)_r$$

miatt $(c)_r = A$. Ezért A-nak pontosan három jobbideálja van: (0), N, A, és mindegyik jobbideál főjobbideál.

Most megmutatjuk azt, hogy az A gyűrűben a különböző főbalideálok száma legalább $\mathfrak{m}$. Legyen ugyanis $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, $k_1 \in K$, $k_2 \in K$ és

$$L_{k_i} = ((0, 1 + k_i x))_l \qquad (i = 1, 2)$$

Ha $L_{k_1} = L_{k_2}$, akkor van olyan $s(x) \in K(x)$ és léteznek olyan $f(x), g(x) \in K[x]$ polinomok, hogy $g(x) \neq 0$ és

$$(0, 1 + k_2 x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}, s(x) \right) \cdot (0, 1 + k_1 x).$$

Ebből következik, hogy

$$(*) \qquad 1 + k_2 x = \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} + k_1 x \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}, \quad \text{illetve}$$

$$x(k_2 \bar{g}(x) - k_1 \bar{f}(x)) = \bar{f}(x) - \bar{g}(x).$$

Ha itten $k_2 \cdot \bar{g}(x) - k_1 \cdot \bar{f}(x) \neq 0$ volna, akkor

$$x = \frac{\bar{f} - \bar{g}}{k_2 \bar{g} - k_1 \bar{f}} = \frac{f(x^2) - g(x^2)}{k_2 g(x^2) - k_1 f(x^2)},$$

ami nyilván lehetetlen, mert x nem fejezhető ki x^2 racionális függvényeként, hiszen a bal oldal „páratlan függvény", a jobb oldal pedig „páros függvény" az x változóban. Ezért szükségképpen $k_2 \bar{g}(x) - k_1 \bar{f}(x) = 0$, tehát $(*)$ miatt $\bar{f}(x) = \bar{g}(x)$, $f(x) = g(x)$ és $f(x) \neq 0$ miatt $k_2 = k_1$. Ennélfogva $L_{k_1} = L_{k_2}$ $(k_1, k_2 \neq 0;\ \in K)$ esetén szükségképpen $k_1 = k_2$. Tehát $0 \neq k_1 \neq k_2 \neq 0$ esetén $L_{k_1} \neq L_{k_2}$, és minthogy K-nak a számossága $|K| = \mathfrak{m}$, ezért az A gyűrűben legalább $\mathfrak{m}$ számú különböző főbalideál létezik, amivel a tételt bebizonyítottuk.

M e g j e g y z é s e k.

1. Az $\bar{r}(x) = r(x^2)$ operáció helyett választható általánosabban $\bar{\bar{r}}(x) = r(y)$ is, ahol y olyan elem $K(x)$-ből, hogy a $K(x)|K(y)$ relatív test algebrai, de legalább másodfokú, és ezzel is megoldható SZELE és RÉDEI algebrai problémája.

2. Ha a K test helyett a $\bar{K}$ algebrai lezárást vesszük, és az előbbi gyűrűkonstrukciót K helyett a $\bar{K}$ testből kiindulva végezzük el, akkor az így kapott $\bar{A}$ gyűrű izomorf módon előállítható olyan gyűrűként, amelynek elemei $\bar{K}$ felett vett bizonyos sorvéges végtelen $\alpha \times \alpha$ típusú mátrixok, ahol $\alpha = 2(\beta\omega + \omega)$, továbbá β jelöli a legkisebb $\mathfrak{m}$-számosságú rendszámot és ω a legkisebb végtelen rendszámot.

3. A racionális számtest felett vett $\begin{pmatrix} \varrho_1 & 0 \\ \varrho_2 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixokból álló gyűrűben (amelyet

Hopkins-féle példának szoktak nevezni, bár Koethe-féle példának helyesebb volna nevezni), teljesül a jobbideálok minimum-feltétele, de nem teljesül a főbalideálok minimum-feltétele, mert a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2^k & 0 \end{pmatrix}$ mátrixokkal generált főbalideálok, ahol $k = 1, 2, 3, \ldots$ nyilván végtelen fogyó láncot alkotnak. Viszont ebben a gyűrűben már a főjobbideálok száma is végtelen, mert $\varrho_1 \neq \varrho_2$ esetén az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varrho_1 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varrho_2 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok egymástól különböző főjobbideálokat generálnak.

4. A tételben mondott tulajdonságú gyűrű nem lehet sem féligegyszerű, sem nilpotens.

5. Félcsoportok esetére triviális példa mutatja, hogy a jobbideálok számának a végességéből nem következik a balideálok számának a végessége. Legyen ugyanis $F = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ és bármely (m, n) párra legyen $x_m \cdot x_n = x_n$. Ez a szorzás asszociatív, és az F-ben F az egyetlen jobbideál, és minden részhalmaz balideál.

6. A tétel bizonyítása egy általánosabb gyűrűkonstrukcióhoz is elvezet, de ez az általánosítás a Szele—Rédei-féle problémára csak bizonyos esetekben ad (újabb) megoldást.

Az $A_0, \ldots, A_\gamma, \ldots$ $(\gamma \in \Gamma)$ adott asszociatív gyűrűk additív (komplett) direkt összegén egy asszociatív ferdeszorzat definiálható az

$$(a_0, \ldots, a_\gamma, \ldots)(b_0, \ldots, b_\gamma, \ldots) = (a_0^{\varepsilon_0} b_0^{\delta_0}, \ldots, a_0^{\varepsilon_0 \eta_\gamma \varepsilon_\gamma} b_\gamma^{\delta_\gamma} + a_\gamma^{\varepsilon_\gamma} b_0^{\delta_0 \vartheta_\gamma \delta_\gamma}, \ldots)$$

előírással, ahol $a_\gamma, b_\gamma \in A_\gamma$, továbbá ε_γ és δ_γ az A_γ olyan idempotens endomorfizmusai, amelyekre $\varepsilon_\gamma \delta_\gamma = \delta_\gamma \varepsilon_\gamma$ érvényes $(\gamma \in \Gamma)$, valamint η_γ és ϑ_γ az A_0 gyűrűnek az A_γ gyűrűbe való olyan homomorfizmusai, amelyekre nézve $\eta_\gamma \delta_\gamma = \delta_0 \eta_\gamma$ és $\vartheta_\gamma \varepsilon_\gamma = \varepsilon_0 \vartheta_\gamma$ teljesülnek $(\gamma \in \Gamma)$. Ez a ferdeszorzat a (komplett) direkt összegbeli összeadással disztributív, és ezáltal egy A asszociatív gyűrűhöz jutottunk.

IRODALOM

[1] L. Fuchs, *Abelian groups*, Budapest (1958)
[2] N. Jacobson, *Structure of rings*, Providence (1956)
[3] L. Rédei, *Algebra I.*, Leipzig (1959)
[4] O. Steinfeld, Bemerkungen zu einer Arbeit von T. Szele, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **6** (1955) 479—484.
[5] F. Szász, Note on rings in which every proper left ideal is cyclic, *Fund. Math.* **44** (1957) 330—332.
[6] T. Szele, Die Ringe ohne Linksideale, *Buletin Stiintific, Bucuresti*, **1** (1949) 783—789.
[7] B. L. van der Waerden, *Algebra, I., II.*, Berlin—Göttingen—Heidelberg (1959)

(Beérkezett: 1962. I. 3.)

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A SHANNON-FÉLE ALAPTÉTEL ÁLTALÁNOS MEGFOGALMAZÁSA AZ INFORMÁCIÓELMÉLETBEN (II)*

Írta: R. L. DOBRUSIN

2. §. Az információ alaptulajdonságai

E paragrafus eredményeinek jelentős része nem új. Ezek az eredmények először GELFAND, KOLMOGOROV és JAGLOM [4] munkájában, valamint KOLMOGOROV [11], [12] munkáiban nyertek világos megfogalmazást. Ezen eredmények egy részét kissé más alakban PEREZ fogalmazta meg és bizonyította be [17]. CZJAN-CZI-PEJ pedig az [5]-ben szereplő integrálos információ-képlet levezetésében található pontatlanságra mutatott rá és ki is javította azt. Ő kapta először — valamivel kevesebb általánosság mellett — a 2. 2 pontban kimondott tételt. A három változó információjára vonatkozó azonosság (2. 6 pont) feltehetően új. Az információ sok, minket érdeklő tulajdonsága megkapható a Burkill—Kolmogorov-féle integrál általános elmélete alapján (l. [10]), valamint a legújabb irodalom bizonyos eredményeiből ([13], [14]). Mindazonáltal a teljesség és a hozzáférhetőség kedvéért a levezetéseket más, elemibb meggondolások segítségével mutatjuk be.

2. 1. Az információ nem-negatív volta. Kezdetnek levezetjük az információ következő egyszerű, de fontos tulajdonságát.

1. TULAJDONSÁG. *Tetszőleges ξ és η változókat tekintve az $I(\xi, \eta)$ információra fennáll, hogy*

$$I(\xi, \eta) \geqq 0. \tag{2. 1. 1}$$

A bizonyításhoz levezetjük a következő, még sokszor felhasználásra kerülő általános egyenlőtlenséget: az $r_1, \ldots, r_m$; $u_1, \ldots, u_m$ nem-negatív számok tetszőleges megválasztása mellett

$$\sum_{i=1}^{m} r_i \log \frac{r_i}{u_i} \geqq (r_1 + \ldots + r_m) \log \frac{r_1 + \ldots + r_m}{u_1 + \ldots + u_m}. \tag{2. 1. 2}$$ [1]

Mindjárt megjegyezzük, hogy a (2. 1. 2) egyenlőtlenséget elegendő $m=2$ esetére igazolni, minthogy az általános eset ebből teljes indukciós következtetéssel adódik. Továbbá, hogy a (2. 1. 2) egyenlőtlenség változatlanul fennáll, ha az r_1, r_2 vagy az u_1, u_2 számokat egy állandó szorzóval megszorozzuk. Minthogy $r_1 + r_2 = 0$ vagy

* Uszpehi Matematicseszkih Nauk XIV. (1959), vip. 6 (90), 3—104. — Jelen közlemény az eredeti tanulmány 2.—4. §-ának a fordítását tartalmazza. Az 1. §. fordítása a MTA III. Oszt. Közl. XI/4 (1961) számának 427—456. oldalán található meg. Az idézett irodalom jegyzékét a következő számban fogjuk közölni.

[1] Emlékeztetünk arra, hogy itt és a továbbiakban $0 \log \frac{0}{a} = 0$ ha $a \geqq 0$ és $a \log \frac{a}{0} = +\infty$ ha $a > 0$.

$u_1+u_2=0$ esetén az egyenlőtlenség közvetlenül belátható, elegendő azt az esetet tekintenünk, midőn $r_1+r_2=1$ és $u_1+u_2=1$. Ebben a speciális esetben azonban állításunk arra redukálódik, hogy ha $1>u>0$, $1>r>0$, akkor

$$r\log\frac{r}{u}+(1-r)\log\frac{1-r}{1-u}\geqq 0. \tag{2.1.3}$$

A (2. 1. 3) egyenlőtlenség jobboldalát rögzített r mellett u szerint differenciálva láthatjuk, hogy minimumát $r=u$-nál éri el, amikor is zérussal egyenlő. Ebből már következik a (2. 1. 3) egyenlőtlenség, következésképp a kiindulási (2. 1. 2) egyenlőtlenség is. Ismertnek tételezve fel az 1. 2 pontban bevezetett jelöléseket, tegyük fel, hogy adva van az $X\times Y$ tér $C_1,\ldots, C_m$ felbontása. Alkalmazva a (2. 1. 2) egyenlőtlenséget, látjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} p_{\xi\eta}(C_i)\log\frac{p_{\xi\eta}(C_i)}{p_\xi\times p_\eta(C_i)}\geqq p_{\xi\eta}(X\times Y)\log\frac{p_{\xi\eta}(X\times Y)}{p_\xi\times p_\eta(X\times Y)}=0. \tag{2.1.4}$$

(2. 1. 4)-ből és az információ (1. 2. 3) definíciójából közvetlenül folyik az $I(\xi,\eta)$ információ nem-negatív volta.

2. 2. Az információ egy ekvivalens definíciója

Egymást nem metsző $C_i\in S_X\times S_Y$ $(i=1,\ldots, n)$ halmazok tetszőleges rendszerére legyen ármost

$$I(C_1,\ldots, C_n)=\sum_{i=1}^{n} p_{\xi\eta}(C_i)\log\frac{p_{\xi\eta}(C_i)}{p_\xi\times p_\eta(C_i)}. \tag{2.2.1}$$

Ebben a pontban be fogjuk bizonyítani, hogy

$$I(\xi,\eta)=\sup_{\{C_i\}} I(C_1,\ldots, C_n), \tag{2.2.2}$$

ahol a felső határ az $X\times Y$ tér összes lehetséges felbontásaira veendő. A (2. 2. 2) képlet az eredeti (1. 2. 3) definíciótól nyilvánvalóan abban különbözik, hogy az eredeti definícióban a felső határt bizonyos olyan speciális felbontások szerint vettük, amelyet szemléletes analógiákat felhasználva derékszögű négyszöghálózatra való felbontásnak fogunk nevezni. Ezek $\{A_1\times B_1, A_1\times B_2,\ldots, A_m\times B_n\}$ típusú felbontások, ahol $\{A_i\}$ az X tér egy felbontása és $\{B_j\}$ az Y tér egy felbontása.

A minket érdeklő eredmény egy általánosabb eredmény speciális eseteként adódik. Ezt az általánosabb eredményt — tekintettel sokoldalú alkalmazásaira — külön tétel alakjában mondjuk ki.

Azt fogjuk mondani, hogy a $C_1,\ldots, C_n$ felbontás a $D_1,\ldots, D_m$ felbontás részfelbontása, ha a C_i halmazok mindegyikét teljesen tartalmazza a D_j halmazok egyike.

TÉTEL. *Tekintsünk egy olyan $\mathfrak{B}\subset S_X\times S_Y$ algebrát, hogy a legkisebb σ-algebra, amely ezt tartalmazza, azonos legyen $S_X\times S_Y$-nal. Tegyük fel továbbá, hogy adva van az $X\times Y$ tér $\mathfrak{B}$-beli elemekből álló felbontásainak valamely olyan R osztálya,* *hogy tetszőleges $\mathfrak{B}$-ből való elemekkel bíró felbontáshoz található ennek R-be tartozó rész-felbontása. Akkor*

$$I(\xi, \eta) = \sup_{\{C_i\} \in R} I(C_1, \ldots, C_n), \tag{2.2.3}$$

ahol a felső határ az összes R-osztálybeli felbontásokra veendő.

Megjegyezzük, hogy a tétel feltételei teljesülnek, ha R az összes felbontásokból áll, és ezért a tételből következik a (2. 2. 2) összefüggés. E tétel alkalmazásának másik fontos példájaként megjegyezzük, hogy ha X és Y a valós tengely, S_X és S_Y a Borel-halmazok σ-algebrája, $\mathfrak{H}_X$ és $\mathfrak{H}_Y$ pedig az X, illetve Y tengelyen vett összes intervallumok összességei, akkor $X \times Y$ összes, $\{A_1 \times B_1, \ldots, A_m \times B_n\}$ típusú felbontásainak osztálya, — ahol $A_i \in \mathfrak{H}_X$, $B_j \in \mathfrak{H}_Y$ és $\{A_i\}$ az X felbontása, $\{B_j\}$ az Y felbontása —, eleget tesz a tétel feltételeinek (ehhez $\mathfrak{B}$-ként az $A \times B$, $A \in \mathfrak{H}_X$, $B \in \mathfrak{H}_Y$ típusú szorzatok véges összegeinek algebráját kell venni). Ebből következik, hogy ha ξ és η egydimenziós változók, akkor az információ (1. 2. 3) definíciójában elegendő csupán a tengelyek intervallumokra való felbontását tekinteni.

Ha $\mathfrak{B}$ gyanánt $A \times B$, $A \in S_X$, $B \in S_Y$ típusú halmazok véges összegeinek összességét vesszük, látjuk, hogy a tétel feltételeinek a derékszögű negyszöghálóra való összes felbontások osztálya is eleget tesz. Ennek következtében, $\bar{I}(\xi, \eta)$-val jelölve a (2. 2. 3) egyenlőség jobb oldalát, és $I_R(\xi, \eta)$-val jelölve a (2. 2. 3) egyenlőség jobb oldalát, látjuk, hogy a tétel levezetéséhez elegendő kimutatni, hogy tetszőleges olyan R osztályra, amely a tétel feltételeinek eleget tesz:

$$\bar{I}(\xi, \eta) = I_R(\xi, \eta). \tag{2.2.4}$$

Legyen

$$I_{\mathfrak{B}}(\xi, \eta) = \sup_{\{C_i\} \in \mathfrak{B}} I(C_1, \ldots, C_n), \tag{2.2.5}$$

ahol a felső határt azon felbontásokra kell venni, melyeknek minden eleme beletartozik $\mathfrak{B}$-be. Nyilvánvaló, hogy

$$I_R(\xi, \eta) \leqq I_{\mathfrak{B}}(\xi, \eta) \leqq \bar{I}(\xi, \eta). \tag{2.2.6}$$

A keresett (2. 2. 4) egyenlőség levezetését két lépésben végezzük el. Az első lépésben be fogjuk bizonyítani, hogy $I_R(\xi, \eta) = I_{\mathfrak{B}}(\xi, \eta)$, a másodikban pedig, hogy $I_{\mathfrak{B}}(\xi, \eta) = \bar{I}(\xi, \eta)$. A (2. 1. 2) egyenlőségből látható, hogyha $E = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$, ahol az F_i-k diszjunktak, akkor

$$\sum_{i=1}^{k} p_{\xi\eta}(F_i) \log \frac{p_{\xi\eta}(F_i)}{p_\xi \times p_\eta(F_i)} \geqq p_{\xi\eta}(E) \log \frac{p_{\xi\eta}(E)}{p_\xi \times p_\eta(E)}.$$

Alkalmazva ezt az egyenlőséget arra az esetre, amidőn a D_j-k mindegyikét a $\{C_i\}$ rendszer halmazaiból képezett összeg alakjában állítjuk elő, azután pedig összegezve az egyenlőségeket j szerint, észrevesszük, hogyha a $\{C_i\}$ felbontás részfelbontása a $\{D_j\}$ felbontásnak, akkor

$$I(C_1, \ldots, C_n) \geqq I(D_1, \ldots, D_m). \tag{2.2.7}$$

Ezért tetszőleges integrál-összeghez, amely a felső határ jele után áll a (2. 2. 5) kifejezésben, található egy nála nem kisebb, a (2. 2. 3) alatti felső határ-jel után álló összeg, úgyhogy $I_R(\xi, \eta) \geqq I_{\mathfrak{B}}(\xi, \eta)$. Összevetve (2. 2. 6)-tal, látjuk, hogy:

(2. 2. 8) $$I_R(\xi, \eta) = I_{\mathfrak{B}}(\xi, \eta).$$

$I_{\mathfrak{B}}(\xi, \eta)$ és $\bar{I}(\xi, \eta)$ egybevetéséhez szükségünk lesz a következő általános lemmára.

LEMMA. *Tegyük fel, hogy adva van a Z halmaz és e halmaz részhalmazainak S_Z σ-algebrája, valamint egy olyan $\mathfrak{A} \subset S_Z$ halmaz-algebra, hogy az a legkisebb σ-algebra, amely tartalmazza $\mathfrak{A}$-t, egybeesik S_Z-vel. Tegyük fel továbbá, hogy S_Z-n adva van két valószínűségi mérték, $p(C)$ és $\bar{p}(C)$, $C \in S_Z$. Akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz és tetszőleges $D \in S_Z$ halmazhoz található egy olyan $A \in \mathfrak{A}$ halmaz, hogy egyidejűleg*[2]

(2. 2. 9) $$p(A \Delta D) \leqq \varepsilon \quad \text{és} \quad \bar{p}(A \Delta D) \leqq \varepsilon.$$

Ez a lemma jól ismert a $p = \bar{p}$ esetben. Bizonyításához jelöljük $\tilde{S}$-mal azon D halmazok osztályát, melyekre tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $A \in \mathfrak{A}$, hogy a (2. 2. 9) egyenlőtlenségek fennállanak. Világos, hogy $\tilde{S} \supset \mathfrak{A}$. A lemma állításának levezetéséhez elég megmutatni, hogy (l. például [24], 6. §), $\tilde{S}$ elemeinek tetszőleges monoton sorozatával együtt annak határértéke is $\tilde{S}$-hez tartozik. Tekintsük például a következő monoton csökkenő sorozatot:

$$M_1 \supset M_2 \ldots \supset M_n \supset \ldots, \quad \bigcap M_n = D, \quad M_n \in \tilde{S}.$$

Ekkor, ha n elég nagy, az alábbi szimmetrikus differenciákra fennáll, hogy

$$p(M_n \Delta D) \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \bar{p}(M_n \Delta D) \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Válasszuk meg az $A \in \mathfrak{A}$ halmazt úgy, hogy

$$p(M_n \Delta A) \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \bar{p}(M_n \Delta A) \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

akkor látjuk, hogy A approximálja D-t, úgyhogy $D \in \tilde{S}$. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Tegyük fel mármost, hogy valamilyen $C \in S_X \times S_Y$-ra $p_\xi \times p_\eta(C) = 0$, de $p_{\xi\eta}(C) = a > 0$. Akkor $I(C, X \times Y \setminus C) = \infty$, úgyhogy $\bar{I}(\xi, \eta) = \infty$. A lemma értelmében tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra létezik egy olyan $\tilde{C} \in \mathfrak{B}$ halmaz, hogy $p_\xi \times p_\eta(\tilde{C}) \leqq \varepsilon$ és $p_{\xi\eta}(\tilde{C}) \geqq a - \varepsilon$. Elég kis ε mellett az $I(\tilde{C}, X \times Y \setminus \tilde{C})$ összeg tetszőlegesen nagy lesz, úgyhogy $I_{\mathfrak{B}}(\xi, \eta) = \infty = \bar{I}(\xi, \eta)$ is fennáll.

Az $X \times Y$ tér olyan $\{C_i\}$ felbontását tekintve, hogy a megfelelő $I(C_1, \ldots, C_n)$ integrálösszegre $I(C_1, \ldots, C_n) < \infty$ fennáll, a tétel állításának levezetéséhez elegendő annak megmutatása, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $D_1, \ldots, D_m$, $D_i \in \mathfrak{B}$

[2] Itt és a továbbiakban a szimmetrikus differenciát így értelmezzük:

$$U \Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U).$$

felbontás, hogy

(2. 2. 10) $$I(D_1,\dots, D_m) \geqq I(C_1,\dots, C_n) - \varepsilon.$$

Választva egy $\delta > 0$ számot, a $\mathfrak{B}$-be tartozó $\bar{D}_1,\dots, \bar{D}_n$ halmazokat úgy válasszuk meg, hogy

$$p_{\xi\eta}(C_i \Delta \bar{D}_i) \leqq \delta \quad \text{és} \quad p_\xi \times p_\eta (C_i \Delta \bar{D}_i) \leqq \delta \quad (i = 1, \dots, n)$$

fennálljon. Írjuk most a következőt:

$$D_i = \bar{D}_i \setminus \bigcup_{i \neq j} D_j \qquad (i = 1, \dots, n),$$

$$D_{n+1} = X \times Y \setminus \bigcup_{i=1}^{n} D_i .$$

Akkor $D_i \in \mathfrak{B}$ és a $\{D_i, i = 1,\dots, n+1\}$ halmazok az $X \times Y$ tér egy felbontását adják. Világos, hogy

(2. 2. 11) $$p_{\xi\eta}\{D_i \Delta C_i\} \leqq n\delta, \quad p_\xi \times p_\eta \{D_i \Delta C_i\} \leqq n\delta \qquad (i = 1,\dots, n)$$

és

(2. 2. 12) $$p_{\xi\eta}\{D_{n+1}\} \leqq n\delta, \quad p_\xi \times p_\eta \{D_{n+1}\} \leqq n\delta.$$

(2. 2. 11)-ből következik, hogy elég kis δ esetén az $I(C_1,\dots, C_n)$ és $I(D_1,\dots, D_n)$ összegek tetszőlegesen közel lesznek egymáshoz. Hogy az utolsó összeadandót az $I(D_1,\dots, D_{n+1})$ összegben megbecsüljük, elegendő megjegyezni, hogy (2. 2. 12)-nek megfelelően

$$p_{\xi\eta}\{D_{n+1}\} \log \frac{p_{\xi\eta}\{D_{n+1}\}}{p_\xi \times p_\eta \{D_{n+1}\}} \geqq p_{\xi\eta}\{D_{n+1}\} \log p_{\xi\eta}\{D_{n+1}\} \geqq n\delta \log n\delta,$$

úgyhogy ez az összeadandó kis δ esetén nagyobb lesz, mint egy tetszőlegesen kicsi, előre megadott negatív szám. Így tehát kimutattuk, hogy elég kis δ esetén a (2. 2. 10) egyenlőtlenség teljesül; következésképp bebizonyítottuk a tétel állítását.

2. 3. Az információ mint integrálösszegek határértéke

Legyen R az $X \times Y$ tér felbontásainak a 2. 2 pontban kimondott tétel feltételeinek eleget tevő osztálya. Akkor igaz az, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan, az R-be tartozó $\{B_i\}$ felbontás, hogy annak tetszőleges $\{\tilde{B}_i\}$ rész-felbontására

(2. 3. 1) $$|I(\xi, \eta) - I(\tilde{B}_1,\dots, \tilde{B}_n)| < \varepsilon.$$

Ez az állítás közvetlen folyománya az említett tételnek, a (2. 2. 7) egyenlőtlenségnek és a felső határ definíciójának.

Emlékeztetünk arra, hogy egy $\Gamma = \{\gamma\}$ absztrakt halmazt részben rendezettnek nevezünk, ha valamilyen γ_1 és γ_2 párra fennáll a $\gamma_1 \prec \gamma_2$ reláció (γ_1 megelőzi γ_2-t), amely a következő tulajdonságokkal bír:

I) abból, hogy $\gamma_1 \prec \gamma_2$ és $\gamma_2 \prec \gamma_1$, következik a γ_1 és γ_2 elemek azonossága,
II) ha $\gamma_1 \prec \gamma_2$ és $\gamma_2 \prec \gamma_3$, akkor $\gamma_1 \prec \gamma_3$,
III) tetszőleges két γ_1 és γ_2 elemhez található olyan γ_3 elem, hogy $\gamma_1 \prec \gamma_3$ és $\gamma_2 \prec \gamma_3$.

Az összes R-beli felbontások összességét részben-rendezett halmazzá lehet tenni, ha a $\prec$ relációt úgy definiáljuk, hogy

$$\{D_i\} \prec \{C_j\}$$

abban az esetben, amidőn a $\{C_j\}$ felbontás a $\{D_i\}$ felbontás rész-felbontása. Az I) és II) tulajdonságok teljesülése szemmel látható. A III) tulajdonság igazolásához elegendő megjegyezni, hogy a $\{B_i \cap C_j\}$ elemekkel rendelkező felbontás mind a $\{B_i\}$, mind a $\{C_j\}$ felbontásnak rész-felbontása. A $\{B_i \cap C_j\}$ felbontás esetleg nem tartozik bele R-be, mindamellett a tételben mondott követelményeknek megfelelően létezik olyan $\{D_l\} \in R$ felbontás, amely a $\{B_i \cap C_j\}$ felbontásnak rész-felbontása. Világos, hogy $\{B_i\} \prec \{D_l\}$ és $\{C_j\} \prec \{D_l\}$.

Ha Γ rendezett halmaz, az a_γ, $\gamma \in \Gamma$ számok összessége *határértékének* egy olyan a számot nevezünk, amelyre igaz, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $\gamma_0 \in \Gamma$, hogy minden olyan γ-ra, melyre $\gamma_0 \prec \gamma$,

$$|a_\gamma - a| < \varepsilon.$$

Ilyenkor azt fogjuk írni, hogy

$$a = \lim_{\Gamma} a_\gamma.$$

Könnyen bebizonyítható, hogy az adott definíció mellett a határérték összes megszokott tulajdonságai érvényben maradnak.

Mármost a (2. 3. 1) egyenlőtlenséget a következő limesz-összefüggésként is interpretálhatjuk,

$$I(\xi, \eta) = \lim_{R} I(C_1, \ldots, C_n). \tag{2. 3. 2}$$

Ez a limesz-egyenlőség igen hasznos lesz számunkra a következőkben.

2. 4. Integrál-képlet az információra

Ebben a pontban bizonyítjuk be GELFAND és JAGLOM, valamint PEREZ — az 1. 2 pontban már megfogalmazott — eredményét.

Először tegyük fel, hogy a $p_{\xi\eta}$ mérték nem abszolút folytonos a $p_\xi \times p_\eta$-ra vonatkozólag. Akkor létezik olyan $B \in S_X \times S_Y$ halmaz, amelyen

$$p_{\xi\eta}(B) = a > 0, \quad p_\xi \times p_\eta(B) = 0.$$

Az

$$I(B, X \times Y \setminus B) = a \log \frac{a}{0} + (1-a) \log \frac{1-a}{1} = \infty$$

integrálösszeg és a (2. 2. 2) képlet azt bizonyítja, hogy a tekintett esetben az $I(\xi, \eta)$ információ végtelen.

Ahhoz, hogy levezethessük a céljaink szempontjából alapvető (1. 2. 6) információra vonatkozó integrál-képletet abszolút folytonosság esetében, szükségünk van egy általános egyenlőtlenségre. A következő egyszerű megállapításból fogunk kiindulni: minthogy a $\varphi(x)=x\log x$, $0<x<\infty$ függvény konvex, azért tetszőleges $F(x)$ valószínűség-eloszlásfüggvényre

$$\int_0^\infty u\log u\,dF(u) \geqq \int_0^\infty u\,dF(u)\log\int_0^\infty u\,dF(u). \tag{2. 4. 1}$$

Rögzítve a $B\in S_X\times S_Y$ halmazt, amelyre $p_\xi\times p_\eta(B)>0$ és bevezetve az

$$F_B(u)=\frac{p_\xi\times p_\eta((a_{\xi\eta}(x,y)<u)\cap B)}{p_\xi\times p_\eta(B)}$$

jelölést, alkalmazzuk a (2. 4. 1) egyenlőtlenséget erre az eloszlásfüggvényre. Minthogy

$$\int_0^\infty u\,dF_B(u)=\frac{1}{p_\xi\times p_\eta(B)}\int_B a_{\xi\eta}(x,y)p_\xi\times p_\eta(dx,dy)=\frac{p_{\xi\eta}(B)}{p_\xi\times p_\eta(B)} \tag{2. 4. 2}$$

és

$$\int_0^\infty u\log u\,dF_B(u)=\frac{1}{p_\xi\times p_\eta(B)}\int_B \log a_{\xi\eta}(x,y)p_{\xi\eta}(dx,dy), \tag{2. 4. 3}$$

azért a (2. 4. 1) egyenlőtlenség alapján tetszőleges olyan B halmazra, amelyre $p_\xi\times p_\eta(B)>0$, fennáll, hogy

$$\int_B \log a_{\xi\eta}(x,y)p_{\xi\eta}(dx,dy)\geqq p_{\xi\eta}(B)\log\frac{p_{\xi\eta}(B)}{p_\xi\times p_\eta(B)}. \tag{2. 4. 4}$$

Figyelembe véve azt, hogy $p_{\xi\eta}$ abszolút folytonos $p_\xi\times p_\eta$-ra vonatkozólag és hogy a $0\log\frac{0}{a}=0$ összefüggést fogadtuk el, látjuk, hogy a (2. 4. 4) egyenlőtlenség igaz $p_\xi\times p_\eta(B)=0$ esetére is, azaz igaz tetszőleges $B\in S_X\times S_Y$-ra is. Megjegyezzük továbbá, hogy a (2. 4. 4) egyenlőtlenség jobb oldalán álló (esetleg divergens) integrálnak mindig van értelme, minthogy negatív része mindig véges. Ez például abból látható, hogy semilyen B-re nem lehet a (2. 4. 4) egyenlőtlenség bal oldala $-\frac{1}{e}$-nél kisebb, mivelhogy $-\frac{1}{e}$ épp az $x\log x$ függvény minimumával egyenlő.

Vegyük az $X\times Y$ tér valamilyen $\{C_i\}$ felbontását. Alkalmazva (2. 4.4)-et minden egyes C_i-re, látjuk, hogy

$$I(C_1,\dots,C_n)\leqq\sum_{i=1}^n\int_{C_i}\log a_{\xi\eta}(x,y)p_{\xi\eta}(dx,dy)=\int_{X\times Y}\log a_{\xi\eta}(x,y)p_{\xi\eta}(dx,dy).$$

Ezért

$$I(\xi,\eta)\leqq\int_{X\times Y}\log a_{\xi\eta}(x,y)p_{\xi\eta}(dx,dy). \tag{2. 4. 5}$$

Most be kell bizonyítanunk, hogy (2. 4. 5)-ben valójában az egyenlőség áll fenn. Adjunk meg valamilyen $\varepsilon > 0$ számot és válasszuk a $K > 0$ konstansot oly nagyra, hogy a

$$0 \geqq p_{\xi\eta}\{|\log a_{\xi\eta}(x, y)| > K\} \log p_{\xi\eta}\{|\log a_{\xi\eta}(x, y)| > K\} \geqq -\frac{\varepsilon}{2} \tag{2. 4. 6}$$

egyenlőtlenségek fennálljanak. Ez lehetséges, mert $x \log x \to 0$, ha $x \to 0$. Továbbá a

$$\{|\log a_{\xi\eta}(x, y)| \leqq K\}$$

halmaz előállítható egymást nem metsző $C_i \in S_X \times S_Y$ $(i = 1, \ldots, n)$ halmazok összege alakjában, úgy, hogy ha

$$\underline{h}_i = \inf_{(x, y) \in C_i} a_{\xi\eta}(x, y), \qquad \overline{h}_i = \sup_{(x, y) \in C_i} a_{\xi\eta}(x, y),$$

akkor minden i-re

$$\log \overline{h}_i - \log \underline{h}_i \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2. 4. 7}$$

Jegyezzük meg, hogy ekkor minden i-re

$$\overline{h}_i \geqq \frac{p_{\xi\eta}(C_i)}{p_\xi \times p_\eta(C_i)} \geqq \underline{h}_i. \tag{2. 4. 8}$$

Továbbá, hogy

$$p_{\xi\eta}(C_i) \log \overline{h}_i \geqq \int_{C_i} \log a_{\xi\eta}(x, y) p_{\xi\eta}(dx, dy) \geqq p_{\xi\eta}(C_i) \log \underline{h}_i. \tag{2. 4. 9}$$

(2. 4. 8)-ból és (2. 4. 9)-ből következik, hogy

$$\left| p_{\xi\eta}(C_i) \log \frac{p_{\xi\eta}(C_i)}{p_\xi \times p_\eta(C_i)} - \int_{C_i} \log a_{\xi\eta}(x, y) p_{\xi\eta}(dx, dy) \right| \leqq \leqq (\log \overline{h}_i - \log \underline{h}_i) p_{\xi\eta}(C_i). \tag{2. 4. 10}$$

Összegezve i szerint a (2. 4. 10) egyenlőtlenségeket és (2. 4. 7)-et figyelembe véve látjuk, hogy

$$\left| I(C_1, \ldots, C_n) - \int_{\{\log a_{\xi\eta}(x, y) \leqq K\}} \log a_{\xi\eta}(x, y) p_{\xi\eta}(dx, dy) \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2. 4. 11}$$

Legyen $C_{n+1} = \{\log_{\xi\eta}(x, y) < K\}$, ekkor a $C_1, \ldots, C_{n+1}$ halmazok rendszere az $X \times Y$ tér egy felbontása. (2. 4. 6)-ból és (2. 4. 11)-ből azt kapjuk, hogy

$$I(C_1, \ldots, C_{r+1}) \geqq \int_{\{\log a_{\xi\eta}(x, y) \leqq K\}} \log a_{\xi\eta}(x, y) p_{\xi\eta}(dx, dy) - \varepsilon. \tag{2. 4. 12}$$

Minthogy ε tetszőleges, K-t pedig tetszőlegesen nagyra lehet választani, azért (2. 2. 2)-ből következik, hogy

$$I(\xi, \eta) \geqq \int_{X \times Y} \log a_{\xi\eta}(x, y) p_{\xi\eta}(dx, dy). \tag{2.4.13}$$

A (2. 4. 5) és (2. 4. 13) egyenlőtlenségek együtt bizonyítják az (1. 2. 6) integrálképlet első felét. E képlet második fele a mértékelmélet egyes általános tételeiből következik (l. [23], 32. §. 2. tétel).

2. 5. Valószínűségi változó függvényének információja

Tegyük fel, hogy a ξ és η valószínűségi változók értékei az (X, S_X) illetve (Y, S_Y) mérhető terekbe esnek. Ezenkívül tegyük fel, hogy adva van az $(\bar{X}, S_{\bar{X}})$ mérhető tér és adva van az $f(x)$, $x \in X$ mérhető függvény, melynek értékei az $\bar{X}$ térbe tartoznak. Akkor az elemi események $f(\xi)$ összetett függvénye olyan valószínűségi változó lesz, melynek értékei $\bar{X}$-ba tartoznak. Be akarjuk bizonyítani, hogy

$$I(f(\xi), \eta) \leqq I(\xi, \eta). \tag{2.5.1}$$

Tetszőleges $B \subset \bar{X}$ halmazra jelöljük $f^{-1}(B)$-vel azon $x \in X$ pontok összességét, amelyekre $f(x) \in B$. A mérhető függvény definíciójából következik, hogy $B \in S_{\bar{X}}$ esetén az $f^{-1}(B)$ halmazra fennáll: $f^{-1}(B) \in S_X$. Világos, hogy

$$p_\xi(f^{-1}(B)) = p_{f(\xi)}(B), \tag{2.5.2}$$

és $C \in S_Y$ mellett

$$p_{\xi\eta}(f^{-1}(B) \times C) = p_{f(\xi)\eta}(B \times C). \tag{2.5.3}$$

Ha a $B_1, \ldots, B_n$ halmazok rendszere az $\bar{X}$ tér egy felbontását alkotja, akkor az $f^{-1}(B_1), \ldots, f^{-1}(B_n)$ halmazok rendszere az X tér egy felbontását fogja adni. (2. 5. 2) és (2. 5. 3)-mal együtt ez azt mutatja, hogy az a tetszőleges integrálösszeg, amely az $I(f(\xi), \eta)$-ra adott (1. 2. 3) definícióban a felső határ jele után áll, egyike lesz az $I(\xi, \eta)$-ra adott (1. 2. 3) definícióban szereplő integrálösszegeknek. Ebből rögtön következik a bennünket érdeklő (2. 5. 1) egyenlőtlenség.

2. 6. Egy azonosság három változó információjára

Tegyük fel, hogy adva van három valószínűségi változó, ξ, η és ζ, melyek értékei sorra az (X, S_X), (Y, S_Y) és (Z, S_Z) mérhető terekbe tartoznak. Akkor fennáll a következő általános azonosság:

$$I((\xi, \eta), \zeta) + I(\xi, \eta) = I(\xi, (\eta, \zeta)) + I(\eta, \zeta). \tag{2.6.1}$$

(A (ξ, η) és az (η, ζ) jelöléseket illetőleg lásd az 1. 2 pontot. Abban állapodunk meg, hogy $\infty + a = \infty$, ahol $0 \leqq a \leqq \infty$.)

Ennek az azonosságnak a levezetéséhez tekintsük az X, Y, illetve a Z terek $\{A_i\}$ $(i = 1, \ldots, m)$, $\{B_j\}$ $(j = 1, \ldots, n)$, illetve $\{C_k\}$ $(k = 1, \ldots, q)$ felbontásait. Alább megmutatjuk, hogy

$$I((\xi,\eta),\zeta)+I(\xi,\eta)=$$

$$(2.6.2)\qquad =\lim_{R_{XYZ}}\sum_{i,j,k} p_{\xi\eta\zeta}(A_i\times B_j\times C_k)\log\frac{p_{\xi\eta\zeta}(A_i\times B_j\times C_k)}{p_\xi\times p_\eta\times p_\zeta(A_i\times B_j\times C_k)},$$

ahol az egymásrakövetkezés fogalma az $X\times Y\times Z$ tér $\{A_i\times B_j\times C_k\}$ alakú felbontásainak R_{XYZ} összességére vonatkozólag ugyanúgy van bevezetve, mint ahogy ez a 2. 3 pontban történt. A $p_{\xi\eta\zeta}$ és $p_\xi\times p_\eta\times p_\zeta$ eloszlások definiálása valószínűségi változó-párok eloszlásainak az 1. 2 pontban megadott definíciója kézenfekvő analógiájaként történik. Minthogy a (2. 6. 2) egyenlőség jobb oldala nem változik meg a ξ,η,ζ változók permutálásakor, azért (2. 6. 2)-ből következik (2. 6. 1).

Megjegyezzük, hogy az $\{A_i\times B_j\}$ $(i=1,\dots,m; j=1,\dots,n)$ típusú felbontások R_{XY} osztálya eleget tesz a 2. 2 pontban kimondott tétel feltételeinek, úgyhogy a 2. 3 pont eredményeinek megfelelően

$$(2.6.3)\qquad I(\xi,\eta)=\lim_{R_{XY}}\sum_{i,j} p_{\xi\eta}(A_i\times B_j)\log\frac{p_{\xi\eta}(A_i\times B_j)}{p_\xi\times p_\eta(A_i\times B_j)}.$$

Hasonlóan az $(X\times Y)\times Z=X\times Y\times Z$ tér $\{A_i\times B_j\times C_k\}$ $(i=1,\dots,m; j=1,\dots,n; k=1,\dots,q)$ típusú felbontásainak R_{XYZ} osztálya eleget tesz az említett tétel feltételeinek, ha a (ξ,η) és ζ változókkal képezett párra akarjuk alkalmazni, úgyhogy (figyelembe véve, hogy $p_{(\xi,\eta)\zeta}(\cdot)=p_{\xi\eta\zeta}(\cdot)$)

$$(2.6.4)\qquad I((\xi,\eta),\zeta)=\lim_{R_{XYZ}}\sum_{i,j,k} p_{\xi\eta\zeta}(A_i\times B_j\times C_k)\log\frac{p_{\xi\eta\zeta}(A_i\times B_j\times C_k)}{p_{\xi\eta}(A_i\times B_i)p_\zeta(C_k)}.$$

Megjegyezzük, hogy

$$(2.6.5)\qquad p_{\xi\eta}(A_i\times B_j)=\sum_{k=1}^{q} p_{\xi\eta\zeta}(A_i\times B_j\times C_k)$$

és így (2. 6. 3)-at a következő alakra hozhatjuk:

$$(2.6.6)\qquad I(\xi,\eta)=\lim_{R_{XYZ}}\sum_{i,j,k} p_{\xi\eta\zeta}(A_i\times B_j\times C_k)\log\frac{p_{\xi\eta}(A_i\times B_j)}{p_\xi(A_i)\times p_\eta(B_j)}.$$

A (2. 6. 4) és (2. 6. 6) egyenlőségeket összevetve közvetlenül levezethetjük a keresett (2. 6. 2) egyenlőséget.

2. 7. A feltételes információ képlete

Ha ξ,η és ζ három valószínűségi változó, akkor fennáll a következő fontos összefüggés, amelyet A. N. KOLMOGOROV adott meg:

$$(2.7.1)\qquad I((\xi,\eta),\zeta)=I(\xi,\zeta)+MI(\eta,\zeta/\xi).$$

Itt $I(\eta,\zeta/\xi)$ az η és ζ változópár azon feltétel mellett kiszámított információja, hogy ξ valamilyen rögzített értéket vett fel. Mielőtt pontos meghatározását adnánk a

(2. 7. 1) képletben szereplő változóknak és bemutatnánk e képlet bizonyítását, tárgyalni fogjuk azt az egyszerű speciális esetet, amidőn a ξ, η és ζ változók eloszlásait eloszlás-sűrűségekkel adjuk meg. Tegyük fel, hogy $p_{\xi\eta\zeta}(x, y, z)$, $p_{\xi\eta}(x, y)$ $p_{\xi\zeta}(x, z)$, $p_\xi(x)$, $p_\zeta(z)$ a megfelelő valószínűségi változók együttes és egydimenziós sűrűségei. A feltételes sűrűségeket, mint szokásos, a következő összefüggések határozzák meg:

$$p_{\eta\zeta/\xi}(y, z; x) = \frac{p_{\xi\eta\zeta}(x, y, z)}{p_\xi(x)},$$

$$p_{\eta/\xi}(y; x) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_\xi(x)},$$

$$p_{\zeta/\xi}(z; x) = \frac{p_{\xi\zeta}(x, z)}{p_\xi(x)}.$$

Ebben az esetben

$$I((\xi, \eta), \zeta) = \iiint \left[\log \frac{p_{\xi\eta\zeta}(x, y, z)}{p_{\xi\eta}(x, y) p_\zeta(z)}\right] p_{\xi\eta\zeta}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint \left[\log \frac{p_{\eta\zeta/\xi}(y, z; x)}{p_{\eta/\xi}(y; x) p_{\zeta/\xi}(z; x)} \frac{p_{\xi\zeta}(x, z)}{p_\zeta(z) p_\xi(x)}\right] p_{\xi\eta\zeta}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

(2. 7. 2)

$$= \iint \left[\log \frac{p_{\xi\zeta}(x, z)}{p_\xi(x) p_\zeta(z)}\right] p_{\xi\zeta}(x, z)\, dx\, dz +$$

$$+ \int \left\{ \iint \left[\log \frac{p_{\eta\zeta/\xi}(y, z; x)}{p_{\eta/\xi}(y; x) p_{\zeta/\xi}(z; x)}\right] p_{\xi\eta\zeta}(x, y, z)\, dy\, dz \right\} dx.$$

Az összeadandó a (2. 7. 2) egyenlőség utolsóelőtti sorában nem más, mint az $I(\xi, \zeta)$ információ. A második összeadandó kapcsos zárójelei között szereplő kettős integrált kézenfekvő úgy interpretálni, mint az $I(\eta, \zeta/\xi)$ feltételes információt, úgyhogy a 2. 7. 2 képlet a (2. 7. 1) képlet egy variánsának tekinthető.

Térjünk most rá az általános esetre. Legyen adva három valószínűségi változó, ξ, η és ζ, amelyek értékei sorra az (X, S_X), (Y, S_Y), (Z, S_Z) mérhető terekbe tartoznak. Tetszőleges $A \in S_Y$ halmazra tekintsük most a következő feltételes valószínűséget:

$$P\{\eta \in A/\xi = x\} = p_{\eta/\xi}(A/x). \tag{2. 7. 3}$$

Mint ismeretes (l. [9]) a $p_{\eta/\xi}(A/x)$ függvény rögzített A esetén az $x \in X$ mérhető függvénye lesz, amely az x értékek 0 p_ξ-mértékű halmazától eltekintve egyértelműen van meghatározva. Ismeretes, hogy egymást nem metsző halmazok tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots, A_n \in S_Y$ sorozatára a p_ξ mérték szerint majdnem mindenütt fennáll a következő egyenlőség:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_{\eta/\xi}(A_i/x) = p_{\eta/\xi}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i/x\right) \tag{2. 7. 4}$$

(l. [9], 8. §). Analóg tulajdonságokkal rendelkeznek a

$$p_{\zeta/\xi}(B/x) = P\{\zeta \in B/\xi = x\} \tag{2. 7. 5}$$

feltételes valószínűségek is — úgyhogy diszjunkt halmazok tetszőleges $B_1, \ldots, B_n, \ldots$, $B_n \in S_Z$ sorozatára p_ξ szerint majdnem mindenütt

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_{\zeta/\xi}(B_i/x) = p_{\zeta/\xi}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i/x\right). \tag{2. 7. 6}$$

Most meg akarjuk határozni az általános esetben is az η és ζ változókból álló pár feltételes információ-sűrűségét, adott ξ mellett. Ehhez a legkézenfekvőbbnek a következő feltételes valószínűség-eloszlások felhasználása látszik:

$$p_{\eta \cdot \zeta/\xi}\{D/x\} \quad \text{és} \quad p_{\eta/\xi} \times p_{\zeta/\xi}\{D/x\}, \quad D \in S_Y \times S_Z$$

(e változók közül a másodikat kézenfekvő a $D = A \times B$ halmazokra — $A \in S_Y$, $B \in S_Z$ — úgy meghatározni, hogy $p_{\eta/\xi} \times p_{\zeta/\xi}(D/x) = p_{\zeta/\xi}(A/x) p_{\zeta/\xi}(B/x)$ legyen), és ezekkel ugyanúgy járunk el, mint ahogy azt a közönséges információ-sűrűség meghatározásában a feltétel nélküli valószínűség-eloszlásoknál tettük. Sajnos azonban, ha ezt ilyen direkt módon hajtanánk végre, le kellene szűkítenünk az általunk vizsgált valószínűségi változó-osztályt, minthogy a feltételes valószínűség-eloszlások távolról sem rendelkeznek mindig a számunkra szükséges és (szemléletes szempontból) kézenfekvő tulajdonságokkal (részletesebben l. [9], 9. §).

Épp ezért kissé más utat követünk. Tegyük fel, hogy adva vannak az $A \in S_Y$, $B \in S_Z$ és $C \in S_X$ halmazok. Legyen

$$p_{\eta \times \zeta/\xi}(C \times A \times B) = \int_C p_{\eta/\xi}(A/x) p_{\zeta/\xi}(B/x) p_\xi(dx). \tag{2. 7. 7}$$

(2. 7. 4) és (2. 7. 6)-ból nyilvánvalóan következik, hogy a $p_{\eta \times \zeta/\xi}$ függvény teljesen additív a $C \times A \times B$ típusú halmazok összességén, ahol $A \in S_Y$, $B \in S_Z$, $C \in S_X$. Ezért (l. [24]) egyértelműen kiterjeszthető olyan $p_{\eta \times \zeta/\xi}(\cdot)$ valószínűségi mértékké, amely az $S_X \times S_Y \times S_Z$ σ-algebra összes elemein definiálva van. Azt fogjuk mondani, hogy létezik az η, ζ változó-pár feltételes információ-sűrűsége adott ξ változó mellett, ha a $p_{\xi\eta\zeta}$ valószínűségi mérték abszolút folytonos a $p_{\eta \times \zeta/\xi}$ valószínűségi mértékre vonatkoztatva. Az η, ζ változó-pár feltételes információ-sűrűségének adott ξ mellett a következő kifejezést fogjuk nevezni:

$$i_{\eta\zeta/\xi}(.,.,.) = \log \frac{dp_{\xi\eta\zeta}(\cdot)}{dp_{\eta \times \zeta/\xi}(\cdot)}. \tag{2. 7. 8}$$

A feltételes információ-sűrűség olyan függvény, amely mérhető a $S_X \times S_Y \times S_Z$ σ-algebrára vonatkozólag és 0 $p_{\eta \times \zeta/\xi}$ mértékű halmaztól eltekintve — vagy: az abszolút folytonosság folytán 0 $p_{\xi\eta\zeta}$-mértékű halmaztól eltekintve — egyértelműen definiálva van. Meg fogjuk mutatni, hogy *ha létezik az $i_{(\xi,\eta),\zeta}$ információ-sűrűség, akkor létezik az $i_{\xi,\eta}$ információ-sűrűség és az $i_{\eta\zeta/\xi}$ feltételes információ-sűrűség is, emellett a $p_{\xi\eta\zeta}$ mérték szerint majdnem mindenütt fennáll a következő egyenlőség:*

$$i_{(\xi,\eta),\zeta}(x, y, z) = i_{\xi\eta}(x, y) + i_{\eta\zeta/\xi}(x, y, z). \tag{2. 7. 9}$$

Az η, ζ változókból álló pár ξ adott értéke mellett vett átlagos feltételes információjának fogjuk nevezni a következő integrált:

$$MI(\eta, \zeta/\xi) = \int\limits_{X\times Y\times Z} i_{\eta\zeta/\xi}(x, y, z)p_{\xi\zeta\eta}(dx, dy, dz) = Mi_{\eta\zeta/\xi}(\xi, \eta, \zeta), \tag{2. 7. 10}$$

amennyiben az integrál alatt álló információ-sűrűség létezik. Ha ez a sűrűség nem létezik, azt mondjuk, hogy

$$MI(\eta, \zeta/\xi) = +\infty. \tag{2. 7. 10'}$$

Meg fogjuk mutatni, hogy a

$$MI(\eta, \zeta/\xi) \geqq 0, \tag{2. 7. 11}$$

egyenlőtlenség mindig fennáll és le fogjuk vezetni a feltételes információra vonatkozó következő képletet:[3]

$$I((\xi, \eta), \zeta) = I(\xi, \zeta) + MI(\eta, \zeta/\xi). \tag{2. 7. 12}$$

Ha már ismertnek tekintjük a feltételes információ képletét, akkor a (2. 7. 11) egyenlőtlenséget abból is levezethetjük, hogy — a 2. 5 pont eredményeinek megfelelően —

$$I((\xi, \eta), \zeta) \geqq I(\xi, \zeta).$$

Másrészt a (2. 7. 11) egyenlőtlenséget közvetlenül is megkaphatjuk. Ugyanis a 2.1—2.5 pontokban szereplő gondolatmenet szó szerint átvihető a minket érdeklő esetre akkor, ha az ezen pontokban vizsgált $X\times Y$ teret és $p_\xi\times p_\eta$, valamint $p_{\xi\eta}$ mértékeket az $X\times Y\times Z$ térrel, illetve a $p_{\eta\times\zeta/\xi}$ és $p_{\xi\eta\zeta}$ mértékekkel helyettesítjük. Speciálisan, ezen a módon az átlagos feltételes információ előállítható mint információ összegek határértéke.

A most megfogalmazott állítások levezetését a következő állítás bizonyításával kezdjük: ha a $p_{\xi\zeta}$ mérték abszolút folytonos a $p_\xi\times p_\zeta$ mértékre vonatkozólag, azaz ha létezik az $i_{\xi\zeta}(x, z)$ információ-sűrűség, akkor a $p_{\eta\times\zeta/\xi}$ mérték abszolút folytonos a $p_{\xi\eta}\times p_\zeta$ mértékre vonatkozólag, és ha bevezetjük a

$$\frac{dp_{\xi\zeta}(\cdot)}{dp_\xi\times p_\zeta(\cdot)} = 2^{i_{\xi\zeta}(x,z)} = a_{\xi\zeta}(x, z),$$

$$\frac{dp_{\eta\times\zeta/\xi}(\cdot)}{dp_{\xi\eta}\times p_\zeta(\cdot)} = \hat{a}(x, y, z)$$

[3] Nem adtuk meg az $I(\eta, \zeta/\xi)$ feltételes információ definícióját. Ennek megfelelően az M szimbólumot, amely az átlagos feltételes információ jelölésében fellép, nem tekinthetjük úgy, mint a várható érték jelét. Abban az esetben, amidőn az $i_{\eta\zeta/\xi}$ sűrűség létezik, kézenfekvő a következőt írni:

$$I(\eta,\zeta/\xi) = M\{i_{\eta\zeta/\xi}(\xi, \eta, \zeta)/\xi\}.$$

Ekkor $MI(\eta, \zeta/\xi) = M\{I(\eta, \zeta/\xi)\}$. Mindazonáltal, ha az $i_{\eta\zeta/\xi}$ sűrűség nem létezik, további konstrukciókra lenne szükség. A következőkben csak az átlagos feltételes információt fogjuk használni.

A szokásnak megfelelően abban állapodunk meg, hogy $\infty + a = \infty$, ahol $0 \leqq a \leqq \infty$.

jelöléseket, akkor a $p_{\xi\eta}\times p_\zeta$ mérték szerint majdnem mindenütt fennáll a következő egyenlőség:

$$a_{\xi\zeta}(x, z) = \hat{a}(x, y, z). \tag{2. 7. 13}$$

Először is megjegyezzük, hogy tetszőleges $f(x, z)$ függvényre, mely mérhető az $S_X\times S_Z$ σ-algebrára vonatkozólag, valamint tetszőleges $A\in S_Y$ halmazra

$$\begin{aligned}&\int\limits_{X\times A\times Z} f(x, z)p_{\xi\eta}\times p_\zeta(dx, dy, dz) = \\ &= \int\limits_{X\times Z} f(x, z)p_{\eta/\xi}(A/x)p_\xi\times p_\zeta(dx, dz).\end{aligned} \tag{2. 7. 14}$$

Valóban, ha

$$f(x, z) = \begin{cases} 1, & (x, z)\in C\times B, \\ 0, & (x, z)\notin C\times B,\end{cases} \tag{2. 7. 15}$$

ahol $C\in S_X$, $B\in S_Z$, akkor (2. 7. 14) a következő egyenlőség sorozatra redukálódik:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{C\times A\times B} p_{\xi\eta}\times p_\zeta(dx, dy, dz) = \int\limits_{C\times A} p_{\xi\eta}(dx, dy)\int\limits_B p_\zeta(dz) = \\ &\int\limits_C p_{\eta/\xi}(A/x)p_\xi(dx)\int\limits_B p_\zeta(dz) = \int\limits_{C\times B} p_{\eta/\xi}(A/x)p_\xi\times p_\zeta(dx, dz).\end{aligned} \tag{2. 7. 16}$$

(2. 7. 16) közvetlenül adódik a mértékek szorzatának, valamint a feltételes valószínűségnek a definíciójából. Minthogy a $C\times B$ típusú halmazok generálják az egész $S_X\times S_Z$ σ-algebrát, a (2. 7. 16) típusú függvények lineáris kombinációival tetszőleges, az $S_X\times S_Z$-re vonatkozólag mérhető függvény megközelíthető. Ezért (2. 7. 16)-ból következik (2. 7. 14).

Alkalmazzuk most (2. 7. 14)-et $f(x, z)$ következő megválasztása mellett:

$$f(x, z) = \begin{cases} a_{\xi\zeta}(x, z), & (x, z)\in C\times B, \\ 0, & (x, z)\notin C\times B,\end{cases}$$

ahol $C\in S_X$, $B\in S_Z$. Akkor

$$\int\limits_{C\times A\times B} a_{\xi\zeta}(x, z)p_{\xi\eta}\times p_\zeta(dx, dy, dz) = \int\limits_{C\times B} a_{\xi\zeta}(x, z)p_{\eta/\xi}(A/x)p_\xi\times p_\zeta(dx, dz). \tag{2. 7. 17}$$

Felhasználva mérték mértékszerinti deriváltjának egy ismert tulajdonságát (l. [24], 32. §, I. tétel), (2. 7. 17)-et a következő alakra hozhatjuk:

$$\int\limits_{C\times A\times B} a_{\xi\zeta}(x, z)p_{\xi\eta}\times p_\zeta(dx, dy, dz) = \int\limits_{C\times B} p_{\eta/\xi}(A/x)p_{\xi\zeta}(dx, dz). \tag{2. 7. 18}$$

Mármost megjegyezzük, hogy tetszőleges $f(x)$ függvényre, mely S_X-re vonatkozólag mérhető és tetszőleges $B\in S_Z$-re

$$\int\limits_{X\times B} f(x)p_{\xi\zeta}(dx, dz) = \int\limits_X f(x)p_{\zeta/\xi}(B/x)p_\xi(dx). \tag{2. 7. 19}$$

A (2. 7. 19) egyenlőség ugyanazzal a módszerrel bizonyítható, amellyel a (2. 7. 14) egyenlőséget levezettük. Bevezetve az

$$f(x)=\begin{cases} p_{\eta/\xi}(A/x), & x\in C, \\ 0, & x\notin C \end{cases}$$

jelölést és alkalmazva (2. 7. 19)-et, (2. 7. 18)-ból, és (2. 7. 7)-ből levezethető, hogy

$$\begin{aligned} &\int\limits_{C\times A\times B} a_{\xi\zeta}(x, z)p_{\xi\eta}\times p_{\zeta}(dx, dy, dz) = \\ (2.7.20)\qquad &= \int\limits_{C} p_{\eta/\xi}(A/x)p_{\zeta/\xi}(B/x)p_{\xi}(dx) = p_{\eta\times\zeta/\xi}(C\times A\times B). \end{aligned}$$

Minthogy a $C\times A\times B$ (ahol $C\in S_X$, $A\in S_Y$, $B\in S_Z$) típusú halmazok generálják az egész $S_X\times S_Y\times S_Z$ σ-algebrát, azért (2. 7. 20)-ból következik, hogy tetszőleges $E\in S_X\times S_Y\times S_Z$-re

$$(2.7.21)\qquad \int\limits_{E} a_{\xi\zeta}(x, z)p_{\xi\eta}\times p_{\zeta}(dx, dy, dz) = p_{\eta\times\zeta/\xi}(E).$$

Az $\hat{a}(x, y, z)$ függvény definíciója folytán (2. 7. 21)-ből következik a (2. 7. 13) egyenlőség.

Most be fogjuk bizonyítani, hogy az $i_{(\xi,\eta),\zeta}$ információ-sűrűség létezéséből következik az $i_{\xi\zeta}$ információ-sűrűség létezése. Valóban, állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy a $p_{\xi\zeta}(\cdot)$ mérték nem abszolút folytonos a $p_{\xi}\times p_{\zeta}(\cdot)$ mértékre vonatkozólag. Akkor valamilyen $C\in S_X\times S_Z$-re fennállna, hogy

$$p_{\xi\zeta}(C)>0, \quad p_{\xi}\times p_{\zeta}(C)=0.$$

De akkor $\tilde{C}=C\times Y\in S_X\times S_Y\times S_Z$-re

$$p_{\xi\eta\zeta}(\tilde{C})=p_{\xi\zeta}(C)>0, \quad p_{\xi\eta}\times p_{\zeta}(\tilde{C})=p_{\xi}\times p_{\zeta}(C)=0,$$

ami nem egyeztethető össze a $p_{(\xi,\eta),\zeta}$ mértéknek a $p_{\xi\eta}\times p_{\zeta}$ mértékre vonatkoztatott abszolút folytonosságával, azaz nem egyeztethető össze az $i_{(\xi,\eta),\zeta}$ információ-sűrűség létezésével.

A következő lépésben az $i_{(\xi,\eta),\zeta}$ sűrűség létezéséből levezetjük az $i_{\xi\eta/\zeta}$ feltételes információ-sűrűség létezését. Ezzel kapcsolatban már tudjuk, hogy létezik az $a_{\xi\zeta}$ sűrűség, következésképp jogosult a (2. 7. 13) képlet felhasználása. Adjunk meg egy olyan tetszőleges $E\in S_X\times S_Y\times S_Z$ halmazt, amelyre

$$p_{\eta\times\zeta/\xi}(E)=0.$$

A (2. 7. 13) képlet szerint:

$$(2.7.22)\qquad p_{\eta\times\zeta/\xi}(E) = \iiint\limits_{E} a_{\xi\zeta}(x, z)p_{\xi\eta}\times p_{\zeta}(dx, dy, dz).$$

Ezért az E halmaz előállítható az

$$E=E_1+E_2$$

összeg formájában, úgy, hogy fennállnak a következők:

(2. 7. 23) $$p_{\xi\eta}\times p_{\zeta}(E_1)=0$$

és

(2. 7. 24) $$a_{\xi\zeta}(x, z)=0, \quad (x, y, z)\in E_2.$$

Az $i_{(\xi\eta)\zeta}$ információ-sűrűség létezésének feltevéséből és (2. 7. 23)-ból következik, hogy

(2. 7. 25) $$p_{\xi\eta\zeta}(E_1)=0.$$

Jelöljük D-vel azon (x, z) pontok halmazát, melyekre

$$a_{\xi\zeta}(x, z)=0.$$

Világos, hogy $E_2\subset D\times Y$, továbbá, hogy

$$p_{\xi\zeta}(D) = \int\int_D a_{\xi\zeta}(x, z)p_{\xi}\times p_{\zeta}(dx, dz) = 0.$$

Ezért

(2. 7. 26) $$p_{\xi\eta\zeta}(E_2)\leqq p_{\xi\eta\zeta}(D\times Y)=p_{\xi\zeta}(D)=0.$$

(2. 7. 25) és (2. 7. 26)-ból következik, hogy

$$p_{\xi\eta\zeta}(E)=0,$$

amivel bebizonyítottuk, hogy a $p_{\xi\eta\zeta}$ mérték abszulút folytonos a $p_{\eta\times\zeta/\xi}$ mértékre vonatkozólag.

Most tegyük fel, hogy léteznek az $i_{\xi\zeta}$ és $i_{\eta\zeta/\xi}$ információ-sűrűségek. Akkor léteznek a következő sűrűségek is:

$$a_{\eta\zeta/\xi}(\cdot) = \frac{dp_{\xi\eta\zeta}}{dp_{\eta\times\zeta/\xi}(\cdot)}, \quad \hat{a}(\cdot) = \frac{dp_{\eta\times\zeta/\xi}(\cdot)}{dp_{\xi\eta}\times p_{\zeta}(\cdot)}.$$

A mértékelmélet egy ismert tétele következtében (l. [24], 32. §, 1. tétel) ebben az esetben létezik a

(2. 7. 27) $$\frac{dp_{\xi\eta\zeta}(\cdot)}{dp_{\xi\eta}\times p_{\zeta}(\cdot)} = a_{\eta\zeta/\xi}(x, y, z)\,\hat{a}(x, y, z)$$

derivált is. Felhasználva (2. 7. 13)-at, majd logaritmust véve, (2. 7. 27)-ből levezethetjük a (2. 7. 9) képletet az információ-sűrűségre.

Hogy levezethessük magát a (2. 7. 12) feltételes információ képletét, meg kell jegyeznünk, hogy ha az $i_{(\xi,\eta),\zeta}$ információ-sűrűség létezik, akkor igaz a (2. 7. 9) képlet, s ebből (2. 7. 12) egyszerű integrálással levezethető. Ha ez a sűrűség nem létezik, akkor (2. 7. 13) és (2. 7. 27) azt mutatják, hogy az $i_{\xi\zeta}$ és $i_{\eta\zeta/\xi}$ sűrűségek egyike nem is létezhet, úgyhogy a (2. 7. 12) egyenlőség a különben is igaz $\infty+a=\infty$ képletre redukálódik.

2. 8. Markov-láncot képező változók információja

Most a következő általános tényt bizonyítjuk be. Ha a ξ_1, ξ_2, ξ_3 vátozók Markov-láncot képeznek (a definíciót l. az 1.6. pontban), akkor

$$I((\xi_1, \xi_2), \xi_3) = I(\xi_2, \xi_3). \tag{2. 8. 1}$$

A (2. 7. 1) feltételes információ képletének megfelelően a (2. 8. 1) egyenlőség az

$$MI((\xi_1, \xi_3)/\xi_2) = 0 \tag{2. 8. 2}$$

egyenlőség következménye lesz. Most felhasználjuk a Markov-láncok következő jól ismert tulajdonságát; azon feltétel mellett, hogy ξ_2 rögzített, a ξ_1 és ξ_3 változók függetlenek. Pontosabban, tetszőleges $A \in S_{X_1}$ és $B \in S_{X_3}$ halmazokra 1 valószínűséggel fennáll a feltételes valószínűségekre vonatkozó következő egyenlőség:

$$P\{\xi_1 \in A/\xi_2\}\, P\{\xi_3 \in B/\xi_2\} = P\{\xi_1 \in A,\, \xi_3 \in B/\xi_2\}. \tag{2. 8. 3}$$

(Ennek az állításnak a bizonyítása megtalálható DOOB [9] könyvében, II. fej. 6. §. Az a körülmény, hogy ott csupán valós értékű ξ_i változókat vizsgálnak, lényegtelen.) A feltételes valószínűség definíciója értelmében tetszőleges $C \in S_{X_2}$ halmazra fennáll:

$$\begin{aligned} P_{\xi_1\xi_2\xi_3}(A \times C \times B) &= P\{\xi_1 \in A,\, \xi_2 \in C,\, \xi_3 \in B\} = \\ &= \int_C P\{\xi_1 \in A,\, \xi_3 \in B/\xi_2\} p_{\xi_2}(dx_2). \end{aligned} \tag{2. 8. 4}$$

Ezért a (2. 8. 3) egyenlőségből és a $p_{\xi_1 \times \xi_3/\xi_2}$ mérték definíciójából (l. a (2. 7. 7) egyenlőséget) következik, hogy tetszőleges $A \in S_{X_1}$, $C \in S_{X_2}$, $B \in S_{X_3}$ halmazokra

$$p_{\xi_1\xi_2\xi_3}(A \times C \times B) = p_{\xi_1 \times \xi_3/\xi_2}(A \times C \times B). \tag{2. 8. 5}$$

Minthogy egy $A \times C \times B$ típusú halmaz generálja az egész $S_{X_1} \times S_{X_2} \times S_{X_3}$ σ-algebrát, a $p_{\xi_1\xi_2\xi_3}$ és $p_{\xi_1 \times \xi_3/\xi_2}$ mértékek egyszerűen egybeesnek. Ezért az $i_{\xi_1\xi_3/\xi_2}$ feltételes információ-sűrűségre fennáll

$$i_{\xi_1\xi_3/\xi_2} \equiv 0. \tag{2. 8. 6}$$

Ebből rögtön következik (2. 8. 2), következésképp a keresett (2. 8. 1) egyenlőség is.

2. 9. Valószínűségi változók független párjainak információja és információ-sűrűsége

Legyen adva négy valószínűségi változó, $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$, amelynek értékei sorra az (X_1, S_{X_1}), (X_2, S_{X_2}), (Y_1, S_{Y_1}), (Y_2, S_{Y_2}) mérhető terekbe tartoznak. Tegyük fel, hogy a (ξ_1, η_1) pár nem függ a (ξ_2, η_2) pártól. Akkor az $I((\xi_1\xi_2), (\eta_1\eta_2))$ információra fennáll:

$$I((\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)) = I(\xi_1, \eta_1) + I(\xi_2, \eta_2), \tag{2. 9. 1}$$

és a $p_{\xi_1\eta_1\xi_2\eta_2}$ mérték szerint majdnem mindenütt fennáll az információ-sűrűségekre vonatkozó következő egyenlőség:

$$(2.9.2) \qquad i_{(\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2)}(x_1, x_2, y_1, y_2) = i_{\xi_1\eta_1}(x_1, y_1) + i_{\xi_2\eta_2}(x_2, y_2).$$

A (2. 9. 1) képlet nyilvánvalóan következménye a (2. 9. 2) képletnek és az információra megadott integrál-képletnek. Ennek folytán csak a (2. 9. 2) képletet fogjuk bizonyítani.

A (ξ_1, η_1) és (ξ_2, η_2) párok függetlensége maga után vonja azt a tényt, hogy a $p_{\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2}(\cdot)$ mértékre fennáll:

$$(2.9.3) \qquad p_{\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2}(\cdot) = p_{\xi_1\eta_1} \times p_{\xi_2\eta_2}(\cdot).$$

Továbbá ugyanezen okból fennáll a következő:

$$(2.9.4) \qquad p_{\xi_1\xi_2} \times p_{\eta_1\eta_2}(\cdot) = p_{\xi_1} \times p_{\xi_2} \times p_{\eta_1} \times p_{\eta_2}(\cdot).$$

Most felhasználjuk azt az általános tényt, hogyha az (X, S_X) téren adva vannak a p_X és $\bar{p}_X$, az (Y, S_Y) téren pedig a p_Y és $\bar{p}_Y$ valószínűségi mértékek, és ha létezik az

$$(2.9.5) \qquad a_{XY}(x, y) = \frac{dP_X \times P_Y(\cdot)}{d\bar{P}_X \times \bar{P}_Y(\cdot)}$$

derivált, akkor léteznek a

$$(2.9.6) \qquad a_X(x) = \frac{dp_X(\cdot)}{d\bar{p}_X(\cdot)}, \quad a_Y(y) = \frac{dp_Y(\cdot)}{d\bar{p}_Y(\cdot)}$$

deriváltak is, és $\bar{p}_X \times \bar{p}_Y$ szerint majdnem mindenütt fennáll:

$$(2.9.7) \qquad a_{XY}(x, y) = a_X(x) a_Y(y).$$

Ennek az egyszerű állításnak a bebizonyításához elég megjegyezni azt, hogy tetszőleges $A \in S_X$-re

$$p_X \times p_Y(A \times Y) = p_X(A),$$

$$\bar{p}_X \times \bar{p}_Y(A \times Y) = \bar{p}_X(A),$$

következésképp ha a $p_X \times p_Y(\cdot)$ mérték abszolút folytonos a $\bar{p}_X \times \bar{p}_Y(\cdot)$ mértékre vonatkozólag, akkor a p_X mérték is abszolút folytonos a $\bar{p}_X$ mértékre vonatkozólag. Analóg módon bizonyítható, hogy a p_Y mérték abszolút folytonos a $\bar{p}_Y$ mértékre vonatkozólag. Továbbá Fubini tétele értelmében $A \in S_X$, $B \in S_Y$ mellett

$$(2.9.8) \qquad \begin{aligned} \int_{A \times B} a_X(x) a_Y(y) \bar{p}_X \times \bar{p}_Y(dx, dy) &= \int_A a_X(x) \bar{p}_X(dx) \int_B a_Y(y) \bar{p}_Y(dy) = \\ &= p_X(A) p_Y(B) = p_X \times p_Y(A \times B). \end{aligned}$$

Minthogy az $A \times B$ halmazok az egész $S_X \times S_Y$ σ-algebrát generálják, (2. 9. 8)-ból következik, hogy tetszőleges $C \in S_X \times S_Y$-ra

$$(2.9.9) \qquad \int_C a_X(x) a_Y(y) \bar{p}_X \times \bar{p}_Y(dx, dy) = p_X \times p_Y(C).$$

(2. 9. 9)-ből a (2. 9. 5) egyenlőség a mérték mértékszerinti deriváltjának definíciója alapján következik. A keresett (2. 9. 2) azonosság mármost közvetlen eredménye a (2. 9. 5) egyenlőségnek, ha azt a $p_X(\cdot)=p_{\xi_1\eta_1}(\cdot)$, $p_Y(\cdot)=p_{\xi_2\eta_2}(\cdot)$, $\bar{p}_X(\cdot)=p_{\xi_1}\times p_{\eta_1}(\cdot)$, $\bar{p}_Y=p_{\xi_2}\times p_{\eta_2}(\cdot)$ mértékekre alkalmazzuk, — valamint az információ-sűrűség definíciójának.

2. 10. A Shannon feltételek szükségességének bizonyítása

Ebben a pontban bizonyítjuk be azt az eredményt, amelyet az 1. 6 pontban fogalmaztunk meg. Az ott használt jelölésekkel ez az eredmény úgy szól, hogy ha a $\{W\}$ közlemény átvihető a $\{Q, V\}$ távközlési csatornán, akkor

(2. 10. 1) $$H(W) \leqq C(Q, V).$$

Legyen $\xi, \eta, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}$ (bemeneti közlemény, bemeneti jel, kimeneti jel, kimeneti közlemény) egy közlemény átvitele lehetőségének definíciójában felhasznált valószínűségi változók sorozata. Minthogy a (ξ, η) valószínűségi változó úgy tekinthető, mint a ξ valószínűségi változó függvénye, a $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ valószínűségi változó pedig mint a $\tilde{\xi}$ függvénye, azért — kétszer alkalmazva a 2. 5 pont eredményét — azt kapjuk, hogy

(2. 10. 2) $$I(\xi, \tilde{\xi}) \leqq I(\xi, (\tilde{\eta}, \tilde{\xi})) \leqq I((\xi, \eta), (\tilde{\eta}, \tilde{\xi})).$$

Feltevés szerint a $\xi, \eta, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}$ változók Markov-láncot képeznek. A Markov-láncok ismert tulajdonságai folytán a $\xi, \eta, (\tilde{\eta}, \tilde{\xi})$ és $\eta, \tilde{\eta}, \tilde{\xi}$ valószínűségi változó-összességek ugyancsak Markov-láncot képeznek. Kétszer alkalmazva a 2. 8 pont eredményét, azt kapjuk, hogy

(2. 10. 3) $$I((\xi, \eta), (\tilde{\eta}, \tilde{\xi})) = I(\eta, (\tilde{\eta}, \tilde{\xi})) = I(\eta, \tilde{\eta}).$$

(2. 10. 2) és (2. 10. 3)-ból következik, hogy

(2. 10. 4) $$I(\xi, \tilde{\xi}) \leqq I(\eta, \tilde{\eta}).$$

Minthogy a $\xi, \tilde{\xi}$ változók eleget tesznek a W pontossági feltételeknek, ezért (l. a közlemények entrópiája (1. 4. 8) definícióját)

(2. 10. 5) $$I(\xi, \tilde{\xi}) \geqq H(W).$$

Továbbá, minthogy az $(\eta, \tilde{\eta})$ változópár a (Q, V) átviteli berendezéssel van összekapcsolva (l. egy átviteli berendezés kapacitásának (1. 5. 3) definícióját),

(2. 10. 6) $$I(\eta, \tilde{\eta}) \leqq C(Q, V).$$

(2. 10. 4), (2. 10. 5) és (2. 10. 6)-ból következik a keresett (2. 10. 1) egyenlőtlenség.

3. §. Feinstein lemmája az átviteli berendezésekről

3. 1. Fenstein lemmájának megfogalmazása

FEINSTEIN [22] új utat mutatott SHANNON tételének megalapozásához. HINCSIN [26] ezen az úton szigorú matematikai bizonyítását adta SHANNON tételének véges memóriájú diszkrét átviteli berendezés esetére. Emellett HINCSIN kiemelte és megfogalmazta FEINSTEIN alapvetően új ötletét is, amelyet FEINSTEIN lemmájának nevezett el. Az ebben a paragrafusban levezetett eredmény Feinstein lemmájának az általunk vizsgált általános esetre szóló kiterjesztése.

Azokat a definíciókat és jelöléseket használjuk, amelyeket az 1. 5 és az 1. 7 pontokban vezettünk be.

FEINSTEIN LEMMÁJA. *Tekintsük átviteli berendezések olyan* $\{Q^t, V^t\}$ *sorozatát, hogy minden elegendően nagy t-re*

$$C^t(Q, V) < \infty, \tag{3. 1. 1}$$

de

$$\lim_{t \to \infty} C^t(Q, V) = \infty, \tag{3. 1. 2}$$

és hogy teljesülnek az 1. *tétel* (1. 7. 6) *és* IV. *feltételei.*

Tetszőleges adott $\varepsilon > 0$ *esetében vezessük be a következő jelölést:*

$$L_\varepsilon^t = [2^{(1-\varepsilon)C^t(Q,V)}].^4 \tag{3. 1. 3}$$

Legyen adva továbbá a $p_1^t, \ldots, p_{L_\varepsilon^t}^t$ *valószínűségek olyan összessége, amelyre fennáll, hogy*

$$\sum_{i=1}^{L_\varepsilon^t} p_i^t = 1 \tag{3. 1. 4}$$

és

$$\max_{i=1,\ldots,L_\varepsilon^t} p_i^t \leqq \frac{2}{L_\varepsilon^t}. \tag{3. 1. 5}$$

Akkor található olyan nagy T, hogy minden $t \geqq T$*-re megválasztható a bemeneti jelek* (Y^t, S_Y^t) *terében* L_ε^t *számú olyan* $y_1^t, \ldots, y_{L_\varepsilon}^t$ *pont, — és ezen* y_i^t $(i = 1, \ldots, L_\varepsilon^t)$ *pontok mindegyikéhez hozzárendelhető a kimeneti jelek* $(\tilde{Y}^t, S_{\tilde{Y}}^t)$ *terében egy olyan* A_i^t *mérhető halmaz* $(A_i^t \in S_{\tilde{Y}}^t)$, *— hogy*

I) *az* $A_1^t, A_2^t, \ldots, A_{L_\varepsilon}^t$ *halmazok rögzített t mellett páronként közös elemmel nem rendelkeznek,*

II) *tetszőleges* $t \geqq t$*-re*

$$\sum_{i=1}^{L_\varepsilon^t} p_i^t Q^t(y_i, A_i) \geqq 1 - \varepsilon, \tag{3. 1. 6}$$

III) *tetszőleges* $t \geqq T$*-re az alábbi vektorra fennáll:*

$$\left(\sum_{i=1}^{L_\varepsilon^t} p_i^t \int_{\tilde{Y}^t} \pi_1^t(y_i, \tilde{y}) Q^t(y_i, d\tilde{y}), \ldots, \sum_{i=1}^{L_\varepsilon^t} p_i^t \int_{\tilde{Y}^t} \pi_N^t(y_i, \tilde{y}) Q^t(y_i, d\tilde{y}) \right) \in [\overline{V}^t]_\varepsilon. \tag{3. 1. 7}$$

4 [ ] itt az egész rész jele.

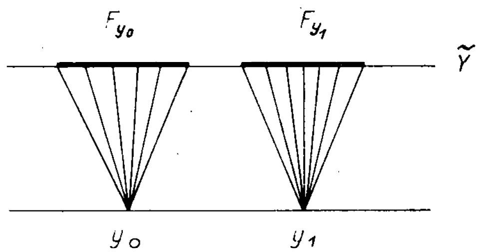
3. 2. Legyezők konstrukciója

A 3. 2—3. 7 pontokban rögzített t_0 indexű átviteli berendezésre vonatkozó konstrukciókat hajtunk végre, s el fogjuk hagyni a t indexet az átviteli berendezéssel kapcsolatos egyes objektumok jelöléseiben. Ugyancsak rögzítettnek fogjuk tekinteni az $\varepsilon > 0$ számot és mindenütt el fogjuk hagyni az ennek megfelelő indexet is. Legyen továbbá $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$.

Tekintsük az $(Y \times \tilde{Y}, S_Y \times S_{\tilde{Y}})$ tér-szorzatot. A jelölésekre fentebb tett megjegyzésekkel egyetértésben $(\eta, \tilde{\eta})$-mal jelöljük azon $(\eta^{t_0}, \tilde{\eta}^{t_0})$ valószínűségi változópárt, amely eleget tesz az (1. 7. 7) és (1. 7. 9) feltételeknek, s ahol a változók beletartoznak az $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ információstabilis sorozatba. Minthogy $(\eta, \tilde{\eta})$-t a (Q, V) átviteli berendezés kapcsolja össze, azért $I(\eta, \tilde{\eta}) \leqq C(Q, V)$. A (3. 1. 1) lemma feltételére tekintettel úgy számíthatjuk, hogy az $I(\eta, \tilde{\eta})$ információra fennáll $I(\eta, \tilde{\eta}) < \infty$. Következésképp létezik az $i_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y})$ információ-sűrűség, amely mérhető függvény az $S_Y \times S_{\tilde{Y}}$ σ-algebrára vonatkozólag. Ezért azon $(y, \tilde{y})$ pontok F halmaza, amelyet az

$$F = \{|i_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y}) - C(Q, V)| \leqq \delta C(Q, V)\} \tag{3. 2. 1}$$

feltétel határoz meg, az $S_Y \times S_{\tilde{Y}}$ σ-algebrához tartozik. Valamely $y_0 \in Y$ ponthoz tartozó *legyezőnek* az F halmaz azon metszetét fogjuk nevezni, melyet az y_0 pont



1. ábra

határoz meg (vagyis az olyan $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ pontok halmazát, melyekre $(y_0, \tilde{y}) \in F$); ezt F_{y_0}-val fogjuk jelölni. A mértékelmélet egyes jól ismert eredményeiből (l. [24], 34. §) következik, hogy tetszőleges $y \in Y$ pontra az F_y legyezőre fennáll, hogy $F_y \in S_{\tilde{Y}}$, azaz ez a legyező mérhető halmaz. Analóg módon az $\tilde{y}_0 \in \tilde{Y}$ pont $F_{\tilde{y}_0}$ legyezőjének nevezzük az F halmaz azon metszetét, amelyet az $\tilde{y}_0$ pont határoz meg. A $F_{\tilde{y}_0}$ legyezőre fennáll, hogy $F_{\tilde{y}_0} \in S_Y$.

Taglaljuk a legyező fogalmát szemléletes szempontból. Ezt a fogalmat lényegében véve maga SHANNON vezette be. Az $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ sorozat információ-stabilitásából és az (1. 7. 7) feltételből következik, hogy t nagy értékeire a $p_{\eta\tilde{\eta}}(F)$ mérték közel van 1-hez. Ezért az y bemeneti jelek túlnyomó többségére a megfelelő kimeneti jel nagy valószínűséggel tartozik amazok F_y legyezőjéhez. A *legyező* elnevezés azzal az illusztrációval kapcsolatban keletkezett, amelyet maga SHANNON közölt (l. a rajzot).

Bebizonyítjuk a következő fontos állítást: A $p_\eta(\cdot)$ mérték szerint majdnem minden y bemeneti jelre az F_y legyező olyan, hogy fennáll a

$$p_{\tilde{\eta}}(F_y) \leqq 2^{-C(Q,V)(1-\delta)} \tag{3. 2. 2}$$

egyenlőtlenség. Valóban, mindenek előtt megjegyezzük, hogy az információ definíciója (l. (1. 2. 7)) és az F halmaz (3. 2. 1) definíciója következtében

$$(3.2.3)\qquad a_{\eta\tilde{\eta}}(y,\tilde{y})=\frac{dp_{\eta\tilde{\eta}}(.,.)}{dp_\eta\times\tilde{p}_\eta(.,.)}\geqq 2^{C(Q,V)(1-\delta)}\quad \text{ha}\quad (y,\tilde{y})\in F.$$

Tetszőleges $G\subset F$ mérhető halmazra:

$$(3.2.4)\qquad p_{\eta\tilde{\eta}}(G)=\int_G a_{\eta\tilde{\eta}}(y,\tilde{y})p_\eta\times\tilde{p}_\eta(dy,d\tilde{y})\geqq 2^{C(Q,V)(1-\delta)}p_\eta\times p_{\tilde{\eta}}(G).$$

Tetszőleges $A\in S_Y$ mérhető halmazra jelöljük $\hat{A}$-kal az

$$(3.2.5)\qquad \hat{A}=A\times\tilde{Y}$$

hengerhalmazt; így a mértékek szorzatának definíciója értelmében $p_\eta(A)=p_{\eta\tilde{\eta}}(\hat{A})$. Akkor a mértékek szorzatáról szóló tétel (l. [24], 35. § 2. tétel) és a (3. 2. 3) egyenlőtlenség folytán

$$(3.2.6)\qquad \begin{aligned}&\int_A p_{\tilde{\eta}}(F_y)p_\eta(dy)=p_\eta\times p_\eta(\hat{A}\cap F)\leqq\\ &\leqq 2^{-C(Q,V)(1-\delta)}p_{\eta\tilde{\eta}}(\hat{A}\cap F)=2^{-C(Q,V)(1-\delta)}p_\eta(A).\end{aligned}$$

Minthogy (3. 2. 6) alapján igaz az

$$\int_A p_{\tilde{\eta}}(F_y)p_\eta(dy)\leqq 2^{-C(Q,V)(1-\delta)}p_\eta(A)$$

egyenlőtlenség tetszőleges mérhető $A\in S_Y$-ra, ebből már következik a fentebb megfogalmazott (3. 2. 2) állítás.

Annak pontos analógiájára, ahogy fentebb a (3. 2. 2) egyenlőtlenséget levezettük, kimutatható, hogy a $p_{\tilde{\eta}}(\cdot)$ mérték szerint majdnem minden $\tilde{\eta}$ kimeneti jelre az $F_{\tilde{y}}$ legyező olyan, hogy

$$(3.2.7)\qquad p_\eta(F_{\tilde{y}})\leqq 2^{-C(Q,V)(1-\delta)}$$

fennáll.

3. 3. A lemma bizonyításának alapgondolata

Tekintettel arra, hogy a további konstrukciók, amelyek a lemma bizonyításához szükségesek, eléggé nehézkesek és elködösítik ezen bizonyítás alapgondolatát, rövid szemléletes vázlatát adjuk ennek a bizonyításnak.

Amint már megjegyeztük, t nagy értékeire az y bemeneti jelek „jelentős része" az átviteli berendezés működésének eredményeként átmegy az F_y legyezőhöz tartozó kimeneti jelbe. Az L számú y_i pontot véletlenszerűen, p_η eloszlással, egymástól függetlenül választjuk meg, majd ezeket vesszük az F_{y_i} legyező keresett A_i halmazainak. Ekkor az esetek többségében teljesül a lemma II. állítása. Az alapvető nehézség abból ered, hogy az F_{y_i} legyezők metszik egymást és ezért nem teljesül a lemma I.

állítása. Ezt a nehézséget elhárítandó, F_{y_i}-t helyettesítsük az alábbi kifejezéssel:

$$\bar{F}_i = F_{y_i} \setminus \bigcup_{j \neq i} F_{y_j}.$$

Ekkor természetesen teljesül az I. feltétel, most azonban igazolni kell azt, hogy a II. feltétel továbbra is teljesül. Ehhez az kell, hogy az $F_{y_i} \cap F_{y_j}$ közös részek kicsik legyenek. Hogy ez tényleg így lesz, azt a (3. 2. 2) egyenlőtlenség mutatja, minthogy $p_{\tilde{\eta}}(\tilde{Y})$ 1-gyel egyenlő és az F_y legyezők mindegyike legfeljebb $2^{-C(Q,V)(1-\delta)}$-ad részét foglalja le az $\tilde{Y}$ térnek. Ezért ésszerű azt várni, hogy ott elhelyezhető egymás metszése nélkül $L = 2^{C(Q,V)(1-\varepsilon)}$ ilyen legyező (minthogy $\delta < \varepsilon$). Hogy pontosabbá tegyük ezt a megállapítást, megjegyezzük, hogy a rögzített $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ pont akkor és csak akkor tartozik bele egyszerre két F_{y_i} és F_{y_j} legyezőbe, ha mindkét pont, y_i és y_j az $F_{\tilde{y}}$ legyezőbe tartozik. Minthogy az η_i-ket véletlenszerűen választottuk és eloszlásuk ugyanaz, mint az y változó eloszlása, a (3. 2. 7) egyenlőtlenséget felhasználva felülről becsülhető annak a valószínűsége, hogy az y_i pontok közül egynél több esik $F_{\tilde{y}}$-ba. Ebből arra a következtetésre jutunk, hogy az y_i-k megválasztási lehetőségeinek túlnyomó részében az $\bar{F}_i$ halmazra teljesül a lemma II. feltétele.

A III. feltétel ugyancsak teljesül az y_i-k megválasztási lehetőségeinek jelentős részében, ugyanis a nagy számok törvénye szerint nagy L-re és tetszőleges $j = 1, \ldots, N$-re

$$\sum_{i=1}^{L} p_i \int_{\tilde{Y}} \pi_j(y_i, \tilde{y}) Q(y_i, d\tilde{y}) \approx \sum_{i=1}^{L} p_i M \left\{ \int_{\tilde{Y}} \pi_j(y_i, \tilde{y}) Q(y_i, d\tilde{y}) \right\} =$$

$$= M \left\{ \int_{\tilde{Y}} \pi_j(\eta, \tilde{y}) Q(\eta, d\tilde{y}) \right\} = M \pi_j(\eta, \tilde{\eta}).$$

Következésképp a lehetőségek jelentős részében úgy lehet megválasztani az y_i pontokat, hogy egyidejűleg igaz legyen mindhárom feltétel. E lehetőségek közül egyet kiválasztva, láthatjuk, hogy arra teljesülnek a lemma feltételei.

3. 4. A bemeneti jelek véletlenszerű megválasztása

A 3. 3 pontban kifejtett terv megvalósításához tekintsük L számú független valószínűségi változó, $\zeta_1, \ldots, \zeta_L$ összességét, ahol a változók értékei az (Y, S_Y) térbe tartoznak és mindegyiknek ugyanaz a $p_\eta(\cdot)$ eloszlása van. Ezek a változók $\zeta_i(\tilde{\omega})$ függvények, amelyek valamilyen $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{B}}, \tilde{P})$ valószínűségi térben vannak definiálva. Hangsúlyozzuk, hogy ez az új valószínűségi tér nem esik egybe az $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ térrel, amelyen az $\eta, \tilde{\eta}$ valószínűségi változók voltak definiálva. Minthogy minden egyes rögzített $\tilde{\omega}$ mellett a $\zeta_1(\tilde{\omega}), \ldots, \zeta_L(\tilde{\omega})$ pontok megválasztása L számú bemeneti jel megválasztását képviseli, azért a $\zeta_i(\tilde{\omega})$ változók összességét szemléletesen úgy interpretálhatjuk, mint L számú y_i bemeneti jel véletlen kiválasztásának egy módját. Ez esetben az a tény, hogy az Ω és $\tilde{\Omega}$ valószínűségi terek nem esnek egybe, matematikai visszatükrözése az arra vonatkozó szemléletes elképzelésnek, hogy egy, a kód összeállításakor alkalmazott y_i pontok megválasztására felhasznált kísérlet természete egészen különbözik ama kísérlet természetétől, amely a bemeneti jel kimeneti jelbe való átmenetét írja le.

Tekintsük most az $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{B}})$ és $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$ mérhető terek $(\tilde{\Omega}\times\tilde{Y}, \tilde{\mathfrak{B}}\times S_{\tilde{Y}})$ szorzatát. Tekintsük továbbá az $(\tilde{\Omega}\times\tilde{Y}, \tilde{\mathfrak{B}}\times S_{\tilde{Y}})$ mérhető teret az $(Y\times\tilde{Y}, S_Y\times S_{\tilde{Y}})$ mérhető térbe átvivő azon Z_i $(i=1,2,\dots,L)$ leképezéseket, amelyeket a következő képlet definiál:

$$Z_i(\tilde{\omega}, \tilde{y}) = (\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}). \tag{3.4.1}$$

Most megmutatjuk, hogy mindegyik ilyen leképezés mérhető, azaz, hogy tetszőleges $C\in S_Y\times S_{\tilde{Y}}$ halmaz $Z_i^{-1}(C)$ ős-képe beletartozik $\tilde{\mathfrak{B}}\times S_{\tilde{Y}}$-ba. Elegendő igazolni tetszőleges $A\times B$ típusú tégla ős-képének mérhetőségét $(A\in S_Y, B\in S_{\tilde{Y}})$, minthogy nyilvánvalóan az $S_Y\times S_{\tilde{Y}}$-ból való, mérhető ős-képpel rendelkező halmazok összessége σ-algebrát képez, a legkisebb σ-algebra pedig, amely az összes téglákat tartalmazza, egybeesik $S_Y\times S_{\tilde{Y}}$-mal. Ilyen $A\times B$ típusú halmazokra pedig

$$Z_i^{-1}(A\times B) = \{\zeta_i(\tilde{\omega})\in A\}\times B.$$

Minthogy $\{\zeta_i(\tilde{\omega})\in A\}\in\tilde{\mathfrak{B}}$, azért $\{\zeta_i(\tilde{\omega})\in A\}\times B\in\tilde{\mathfrak{B}}\times S_{\tilde{Y}}$, s ezzel bebizonyítottuk a Z_i leképezés mérhetőségét.

Tekintsünk most valamilyen $\mathfrak{G}\in\tilde{\mathfrak{B}}\times S_{\tilde{Y}}$ mérhető halmazt. Jelöljük $G(\tilde{\omega})$-mal a $\mathfrak{G}$ halmaz azon metszetét, amelyet az $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$ pont határoz meg. 3.2 pontban már felhasznált mértékelméleti tételnek megfelelően $G(\tilde{\omega})\in S_{\tilde{Y}}$ minden $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$-ra. Ezért definiálva van az $\tilde{\omega}$

$$q_{\mathfrak{G}}(\tilde{\omega}) \doteq Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), G(\tilde{\omega})) \tag{3.4.2}$$

függvénye. Megmutatjuk, hogy a $q_{\mathfrak{G}}(\tilde{\omega})$ függvény mérhető a $\tilde{\mathfrak{B}}$ σ-algebrára vonatkozólag. Valóban, ha $\mathfrak{G}_1,\dots,\mathfrak{G}_n,\dots$ a $\tilde{\mathfrak{B}}\times S_{\tilde{Y}}$-ba tartozó, közös elemmel nem bíró halmazok sorozata és $\mathfrak{G}=\bigcup_n \mathfrak{G}_n$, $G_n(\tilde{\omega})$ pedig ezek metszetei, akkor minden $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$-ra fennáll a $G(\tilde{\omega})=\bigcup_n G_n(\tilde{\omega})$ egyenlőség. Ezért minden $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$-ra fennáll, hogy

$$\sum_n Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), G_n(\tilde{\omega})) = Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), G(\tilde{\omega})). \tag{3.4.3}$$

Továbbá, ha $\bar{\mathfrak{G}}$ a $\mathfrak{G}$ halmaz kiegészítése és $\bar{G}(\tilde{\omega})$ ennek metszete, akkor minden $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$-ra fennáll:

$$Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), G(\tilde{\omega})) = 1 - Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), \bar{G}(\tilde{\omega})). \tag{3.4.4}$$

A (3. 4. 3) és (3. 4. 4) egyenlőségek azt mutatják, hogy azok a $\mathfrak{G}\in\tilde{\mathfrak{B}}\times S_{\tilde{Y}}$ halmazok, amelyekre a $q_{\mathfrak{G}}(\tilde{\omega})$ függvény mérhető, σ-algebrát képeznek. Ha $\mathfrak{G}=W\times B$, ahol $W\in\tilde{\mathfrak{B}}$, $B\in S_{\tilde{Y}}$, akkor

$$G(\tilde{\omega}) = \begin{cases} B, & \tilde{\omega}\in W, \\ \Lambda, & \tilde{\omega}\notin W, \end{cases}$$

ahol Λ az üres halmaz. Ekkor

$$q_{\mathfrak{G}}(\tilde{\omega}) = \begin{cases} Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), B), & \tilde{\omega}\in W, \\ 0, & \tilde{\omega}\notin W. \end{cases} \tag{3.4.5}$$

Annak következtében, hogy $Q(y, B)$ y mérhető függvénye, a (3. 4. 5) függvény két mérhető függvény szuperpozíciója, vagyis maga is mérhető. Ezért a $\mathfrak{G}$ halmazok azon σ-algebrájába, melyekre a $q_{\mathfrak{G}}(\tilde{\omega})$ függvény mérhető, beletartoznak az összes téglák, és ezért egy ilyen σ-algebra egybeesik $\tilde{\mathfrak{B}}\times S_{\tilde{Y}}$-mal.

Tetszőleges $\mathfrak{G}\in\tilde{\mathfrak{B}}\times S_{\tilde{Y}}$-ra legyen most

$$\mathfrak{P}_i(\mathfrak{G})=\int\limits_{\tilde{\Omega}} Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), G(\tilde{\omega}))\tilde{P}(d\tilde{\omega})=MQ(\zeta_i(\tilde{\omega}), G(\tilde{\omega})). \tag{3. 4. 6}$$

(3. 4. 3)-ból következik, hogy $\mathfrak{P}_i(\mathfrak{G})$ valószínűségi mérték lesz a $\tilde{\mathfrak{B}}\times S_{\tilde{Y}}$ σ-algebrán. Most megmutatjuk, hogy tetszőleges $C\in S_Y\times S_{\tilde{Y}}$ halmazra

$$p_{\eta\tilde{\eta}}(C)=\mathfrak{P}_i(Z_i^{-1}(C)), \tag{3. 4. 7}$$

azaz, hogy a Z_i leképezés a $\mathfrak{P}_i$ mértéket átviszi a $p_{\eta\tilde{\eta}}$ mértékbe. Elég igazolni azt, hogy a (3. 4. 7) egyenlőség igaz $C=A\times B$ mellett, ahol $A\in S_Y$, $B\in S_{\tilde{Y}}$. Ebben a bizonyításban a következő tényt használjuk fel: minthogy az η és $\tilde{\eta}$ változókat a $\{Q, V\}$ csatorna kapcsolja össze, azért tetszőleges $B\in S_{\tilde{Y}}$-ra a $p_\eta(\cdot)$ mérték szerint majdnem mindenütt

$$P\{\tilde{\eta}\in B/\eta\}=Q(\eta, B) \tag{3. 4. 8}$$

(l. az (1. 5. 1) egyenlőséget). Minthogy a $Z_i^{-1}(A\times B)$ halmaz azon metszete, amelyet az $\tilde{\omega}$ pont határoz meg, egyenlő Λ-val, ha $\zeta_i(\tilde{\omega})\notin A$ és egyenlő B-vel, ha $\zeta_i(\tilde{\omega})\in A$, azért fennáll

$$\mathfrak{P}_i(Z_i^{-1}(A\times B))=\int\limits_{\{\zeta_i(\tilde{\omega})\in A\}} Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), B)\tilde{P}(d\tilde{\omega})=\int\limits_A Q(y, B)p_\eta(dy) \tag{3. 4. 9}$$

(itt tekintetbe vettük, hogy $\zeta_i(\tilde{\omega})$ eloszlása $p_\eta(\cdot)$). Továbbá, felhasználva (3. 4. 8)-at és a feltételes valószínűség definícióját, látjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int\limits_A Q(y, B)p_\eta\, dy&=\int\limits_A P\{\tilde{\eta}\in B/\eta\}p_\eta(dy)=\\&=P\{\tilde{\eta}\in B, \eta\in A\}=p_{\eta\tilde{\eta}}(A\times B).\end{aligned} \tag{3. 4. 10}$$

(3. 4. 9) és (3. 4. 10)-ből következik a keresett (3. 4. 7) egyenlőség fennállása $C=A\times B$-re, vagyis tetszőleges C-re is.

A $\tilde{\mathfrak{B}}\times S_{\tilde{Y}}$ σ-algebrán definiálva van a $\tilde{P}\times p_{\tilde{\eta}}(\cdot)$ mérték. Most megmutatjuk a következő, a továbbiak szempontjából fontos tényt: tetszőleges $i=1,\ldots, L$ mellett a $\tilde{\mathfrak{P}}_i$ valószínűségi mérték abszolút folytonos a $\tilde{P}\times p_{\tilde{\eta}}(\cdot)$ mértékre vonatkozólag, és az

$$\tilde{a}_i(\tilde{\omega}, \tilde{y}) = \frac{d\mathfrak{P}_i(\cdot)}{d\tilde{P}\times p_{\tilde{\eta}}(\cdot)} \tag{3. 4. 11}$$

deriváltra a $\tilde{P}\times p_{\tilde{\eta}}(\cdot)$ mérték szerint majdnem mindenütt fennáll a következő egyenlőség:

$$\tilde{a}_i(\tilde{\omega}, \tilde{y})=a_{\eta\tilde{\eta}}(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}). \tag{3. 4. 12}$$

Emlékeztetünk arra, hogy ugyanúgy, mint a (3. 2. 3) egyenlőségnél is

$$a_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y}) = \frac{dp_{\eta\tilde{\eta}}(\cdot)}{dp_\eta \times p_{\tilde{\eta}}(\cdot)}.$$

A (3. 4. 12) egyenlőség bebizonyításához a mérték mértékszerinti deriváltja definíciójának megfelelően igazolnunk kell, hogy tetszőleges $C \in \tilde{\mathfrak{B}} \times S_{\tilde{Y}}$-ra fennáll, hogy

$$\mathfrak{P}_i(C) = \int_C a_{\eta\tilde{\eta}}(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}) \tilde{P} \times p_{\tilde{\eta}}(d\tilde{\omega}, d\tilde{y}). \tag{3. 4. 13}$$

Minthogy a (3. 4. 13) egyenlőség bal és jobb oldala egyaránt mérték, azért elég igazolni, hogy ez az egyenlőség teljesül az összes

$$C = W \times B, \quad W \in \tilde{\mathfrak{B}}, \quad B \in S_{\tilde{Y}}$$

téglákra, minthogy az ilyen téglák az egész $\tilde{\mathfrak{B}}$ σ-algebrát generálják. Tekintsük a következő feltételes valószínűség-eloszlást:

$$p^i_{\eta/W}(A) = \tilde{P}\{\zeta_i(\tilde{\omega}) \in A/W\}, \quad A \in S_Y. \tag{3. 4. 14}$$

Látható, hogy a $p^i_{\eta/W}$ mérték abszolút folytonos a p_η mértékre vonatkozólag. Vezessük be a következő kjelölést:

$$a^i_{\eta/W}(y) = \frac{dp^i_{\eta/W}(\cdot)}{dp_\eta(\cdot)}. \tag{3. 4. 15}$$

Akkor tetszőleges, S_Y-ra vonatkozólag mérhető $u(y)$ függvényre:

$$\begin{aligned} \int_Y u(y) a^i_{\eta/W}(y) p_\eta(dy) &= \int_Y u(y) p^i_{\eta/W}(dy) = \\ &= \frac{1}{\tilde{P}(W)} \int_W u(\zeta_i(\tilde{\omega})) \tilde{P}(d\tilde{\omega}). \end{aligned} \tag{3. 4. 16}$$

Alkalmazva Fubini tételét (l. [24], 35. § 2. tétel) és a (3. 4. 16) egyenlőséget $u(y) = a_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y})$ mellett, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_{W \times B} a_{\eta\tilde{\eta}}(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}) \tilde{P} \times p_{\tilde{\eta}}(d\tilde{\omega}, d\tilde{y}) &= \int_B p_{\tilde{\eta}}(dy) \int_W a_{\eta\tilde{\eta}}(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}) \tilde{P}(d\omega) = \\ &= \tilde{P}(W) \int_B p_{\tilde{\eta}}(dy) \int_Y a_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y}) a^i_{\eta/W}(y) p_\eta(dy) = \\ &= \frac{1}{\tilde{P}(W)} \int_{Y \times B} a^i_{\eta/W}(y) a_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y}) p_\eta \times p_{\tilde{\eta}}(dy, d\tilde{y}). \end{aligned} \tag{3. 4. 17}$$

Mérték mértékszerinti deriváltjának ismert tulajdonságát alkalmazva (l. [24], 32. § 2. tétel), azt kapjuk, hogy

$$\int_{Y\times B} a^i_{\eta/W}(y) a_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y}) p_\eta \times p_{\tilde{\eta}}(dy, d\tilde{y}) = \int_{Y\times B} a^i_{\eta/W}(y) p_{\eta\tilde{\eta}}(dy, d\tilde{y}). \tag{3.4.18}$$

Megjegyezzük még, hogy tetszőleges $u(y)$ függvényre, amely S_Y-ra vonatkozólag mérhető, fennáll:

$$\int_{Y\times B} u(y) p_{\eta\tilde{\eta}}(dy, d\tilde{y}) = \int_Y u(y) Q(y, B) p_\eta(dy). \tag{3.4.19}$$

Valóban, ha $u(y)$ valamilyen $A \in Y$ halmaz karakterisztikus függvénye, akkor (3. 4. 19) (3. 4. 8)-ból következik. Ez azt jelenti, hogy (3. 4. 19) igaz tetszőleges olyan függvényre, amely véges számú értéket vehet fel, és azt is jelenti, hogy tetszőleges integrálható függvényre is igaz. (3. 4. 19)-ben $u(y) = a^i_{\eta}/_W(y)$-t téve, kapjuk, hogy

$$\int_Y a^i_{\eta/W}(y) Q(y, B) p_\eta(dy) = \int_{Y\times B} a^i_{\eta/W}(y) p_{\eta\tilde{\eta}}(dy, d\tilde{y}). \tag{3.4.20}$$

(3. 4. 16)-ot most $u(y) = Q(y, B)$-re alkalmazva, kapjuk, hogy

$$\tilde{P}(W) \int_Y a^i_{\eta/W}(y) Q(y, B) p_\eta(dy) = \int_W Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), B) \tilde{P}(d\tilde{\omega}). \tag{3.4.21}$$

A (3. 4. 17), (3. 4. 18), (3. 4. 20), (3. 4. 21) egyenlőségeket egybevetve és felhasználva a (3. 4. 6) definíciót, az alábbi összefüggést nyerjük:

$$\int_{W\times B} a_{\eta\tilde{\eta}}(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}) \tilde{P} \times p_{\tilde{\eta}}(d\tilde{\omega}, dy) = \mathfrak{P}_i(W \times B). \tag{3.4.22}$$

Amint már megjegyeztük, ebből a keresett (3. 4. 12) egyenlőség következik.

3. 5. „Levágott" legyezők konstruálása

Tetszőleges $i = 1, \ldots, L$ mellett legyen

$$\mathfrak{F}_i = Z_i^{-1}(F), \tag{3.5.1}$$

ahol az F halmazt a (3. 2. 1) egyenlőség definiálja. A Z_i leképezéseknek a 3. 4. pontban bebizonyított mérhetősége következtében az $\mathfrak{F}_i$ halmazokra fennáll: $\mathfrak{F}_i \in \tilde{\mathfrak{B}} \times S_{\tilde{Y}}$. A (3. 4. 7) egyenlőség azt mutatja, hogy minden $i = 1, \ldots, L$-re

$$\mathfrak{P}_i(\mathfrak{F}_i) = p_{\eta\tilde{\eta}}(F). \tag{3.5.2}$$

A legyezők definíciója értelmében (l. a 3. 2 pontot) tetszőleges $\tilde{\omega}$ mellett az $\mathfrak{F}_i$ halmaznak az a metszete, amelyet az $\tilde{\omega}$ pont határoz meg, egybeesik az $F_{\zeta_i}(\tilde{\omega})$ legyezővel. Tekintsük most a következő halmazt:

$$\bar{\mathfrak{F}}_i = \mathfrak{F}_i \setminus \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{F}_j. \tag{3.5.3}$$

Világos, hogy $\bar{\mathfrak{F}}_i \in \tilde{\mathfrak{B}} \times S_{\tilde{Y}}$. Jelöljük $\bar{F}_i(\tilde{\omega})$-mal az $\bar{\mathfrak{F}}_i$ halmaznak azt a metszetét, amelyet az $\tilde{\omega}$ pont határoz meg. Nyilvánvaló, hogy minden $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$-ra fennáll, hogy

(3. 5. 4) $$\bar{F}_i(\tilde{\omega}) = F_{\zeta_i(\tilde{\omega})} \setminus \bigcup_{j \neq i} F_{\zeta_j}(\tilde{\omega}).$$

A páronként közös elemmel nem bíró $\bar{F}_1(\tilde{\omega}), \ldots, \bar{F}_L(\tilde{\omega})$ halmazok összességét *levágott legyezők rendszerének* fogjuk nevezni.

A (3. 4. 6) definíció értelmében

(3. 5. 5) $$\mathfrak{P}_i(\bar{\mathfrak{F}}_i) = MQ(\zeta_i(\tilde{\omega}), \bar{F}_i(\tilde{\omega})).$$

Most becsülni akarjuk alulról a (3. 5. 5) mennyiséget. Nyilvánvaló, hogy

(3. 5. 6) $$\mathfrak{P}_i(\bar{\mathfrak{F}}_i) \geqq \mathfrak{P}_i(\mathfrak{F}_i) - \sum_{j \neq i} \mathfrak{P}_i(\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j).$$

Annak folytán, hogy az $\mathfrak{F}_i$ halmazok definíciójában felhasznált ζ_i változók függetlenek és azonos eloszlásúak, szimmetria-meggondolásokból következik, hogy minden $i \neq j$-re

(3. 5. 7) $$\mathfrak{P}_i(\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j) = \mathfrak{P}_1(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2).$$

(3. 5. 2)-re tekintettel (3. 5. 6)-ból következik, hogy

(3. 5. 8) $$\mathfrak{P}_i(\bar{\mathfrak{F}}_i) \geqq p_{\eta\tilde{\eta}}(F) - L\mathfrak{P}_1(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2).$$

Megjegyezzük, hogy az $(\tilde{\omega}, \tilde{y})$ pont akkor és csak akkor tartozik bele $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$-be, amikor egyidejűleg fennáll $(\zeta_1(\tilde{\omega}), \tilde{y}) \in F$ és $(\zeta_2(\tilde{\omega}), \tilde{y}) \in F$. Ebből következik, hogy $(\tilde{\omega}, \tilde{y}) \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$ akkor és csak akkor áll fenn, amidőn egyidejűleg fennáll $\zeta_1(\tilde{\omega}) \in F_{\tilde{y}}$ és $\zeta_2(\tilde{\omega}) \in F_{\tilde{y}}$. Így tehát a $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$ halmaznak az a metszete, amelyet az $\tilde{y}$ pont határoz meg, egybeesik a következő eseménnyel:

(3. 5. 9) $$\{(\zeta_1(\omega) \in F_{\tilde{y}}) \cap (\zeta_2(\tilde{\omega}) \in F_{\tilde{y}})\}.$$

Becsüljük meg a (3. 5. 9) események valószínűségét. A ζ_i változók függetlensége folytán

(3. 5. 10) $$\tilde{P}\{(\zeta_1(\tilde{\omega}) \in F_{\tilde{y}}) \cap (\zeta_2(\tilde{\omega}) \in F_{\tilde{y}})\} = [\tilde{P}(\zeta_1(\tilde{\omega}) \in F_{\tilde{y}})]^2.$$

A (3. 2. 7) becslés azt mutatja, hogy majdnem minden $\tilde{y}$-ra (a $p_{\tilde{\eta}}(\cdot)$ mértékre vonatkoztatva)

(3. 5. 11) $$\tilde{P}\{(\zeta_1(\tilde{\omega}) \in F_{\tilde{y}}) \cap (\zeta_2(\tilde{\omega}) \in F_{\tilde{y}})\} \leqq 2^{-2C(Q,V)(1-\delta)}.$$

Alkalmazva a mértékek szorzatáról szóló tételt (l. [24], 35. § 2. tétel), kapjuk, hogy

(3. 5. 12) $$\tilde{P} \times p_{\tilde{\eta}}(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) = \int_{\tilde{Y}} \tilde{P}\{(\zeta_1(\tilde{\omega}) \in F_{\tilde{y}}) \cap (\zeta_2(\tilde{\omega}) \in F_{\tilde{y}})\} p_{\tilde{\eta}}(d\tilde{y}) \leqq 2^{-2C(Q,V)(1-\delta)}.$$

Megjegyezzük, hogy a (3. 4. 11) állítás értelmében

(3. 5. 13) $$\mathfrak{P}_1(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) = \int_{\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2} a_{\eta\tilde{\eta}}(\zeta_1(\tilde{\omega}), \tilde{y}) \tilde{P} \times p_{\tilde{\eta}}(\tilde{\omega}, d\tilde{y}).$$

Ha $(\tilde{\omega}, \tilde{y}) \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, akkor a $(\zeta_1(\tilde{\omega}), \tilde{y})$ párra az $\mathfrak{F}_1$ halmaz definíciója folytán $(\zeta_1(\tilde{\omega}), \tilde{y}) \in F$. Ezért, felhasználva az F halmaz definícióját (I. (3. 2. 1)) azt látjuk, hogy

$$a_{\eta\tilde{\eta}}(\zeta_1(\tilde{\omega}), \tilde{y}) \leqq 2^{C(Q,V)(1+\delta)}, \quad (\tilde{\omega}, \tilde{y}) \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2, \tag{3. 5. 14}$$

mivel

$$a_{\eta\tilde{\eta}}(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}) = 2^{i_{\eta\tilde{\eta}}(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y})}.$$

Felhasználva (3. 5. 12), (3. 5. 13) és (3. 5. 14)-et, levezethető, hogy

$$\mathfrak{P}_1(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) \leqq 2^{-C(Q,V)(1-3\delta)}. \tag{3. 5. 15}$$

Ezért (3. 5. 8)-ból következik, hogy minden $i = 1, \ldots, L$-re

$$\mathfrak{P}_1(\overline{\mathfrak{F}}_i) \geqq p_{\eta\tilde{\eta}}(F) - L \cdot 2^{-C(Q,V)(1-3\delta)}. \tag{3. 5. 16}$$

Végül, felhasználva (3. 5. 5)-öt, a következő fontos (a továbbiakban sokszor felhasznált) egyenlőtlenségre jutunk

$$M\left\{\sum_{i=1}^{L} p_i\, Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), \overline{F}_i(\tilde{\omega}))\right\} = M\{\mathfrak{P}_1(\overline{\mathfrak{F}}_1)\} \geqq p_{\eta\tilde{\eta}}(F) - L \cdot 2^{-C(Q,V)(1-3\delta)}. \tag{3. 5. 17}$$

3. 6. A nagy számok törvényének élesítése

A FEINSTEIN lemma III. feltételének teljesítéséhez szükségünk lesz a nagy számok törvényének következő élesítésére, amely minden nehézség nélkül levezethető:

LEMMA. *Legyenek $\gamma_1, \ldots, \gamma_L$ olyan független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyekre valamilyen $\bar{c} < \infty$ és $\bar{b} > 0$ mellett fennáll:*

$$M|\gamma_i - M\gamma_i|^{1+\bar{b}} \leqq \bar{c}. \tag{3. 6. 1}$$

Tegyük fel továbbá, hogy adva van az L számú $p_1, \ldots, p_L$ $(0 \leqq p_i \leqq 1)$ valószínűségek összessége, melyre fennáll

$$\sum_{i=1}^{L} p_i = 1 \tag{3. 6. 2}$$

és

$$\max_{i=1,\ldots,L} p_i \leqq \frac{2}{L}. \tag{3. 6. 3}$$

Akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz található olyan nagy N szám, hogy $L > N(\bar{c})^{\frac{1}{\bar{b}}}$ esetén

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{L} p_i\gamma_i - M\gamma_1\right| > \varepsilon\right\} \leqq \frac{D(\bar{c}+1)}{L^{\min(\bar{b},1)}}, \tag{3. 6. 4}$$

ahol a D és N konstansok csupán $\bar{b}$ és ε-tól függenek és nem függenek L és $\bar{c}$-től és a γ_i változók eloszlásától.

BIZONYÍTÁS. Mint szokásos is, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $M\gamma_i=0$. Először is tegyük fel, hogy $\bar{b}\geqq 1$. Akkor (3. 6. 1)-ből következik a $D\gamma_i$ szórásnégyzetre, hogy

(3. 6. 5) $$D\gamma_i \leqq \bar{c}+1.$$

Ezért (3. 6. 3)-ból következik, hogy

(3. 6. 6) $$D\left(\sum_{i=1}^{L} p_i\gamma_i\right) = D\gamma_1 \sum_{i=1}^{L} p_i^2 \leqq \frac{2(\bar{c}+1)}{L},$$

és (3. 6. 4) a Csebisev-féle egyenlőtlenség szokásos alkalmazásával (3. 6. 6)-ból adódik.

Ha $\bar{b}<1$, legyen

(3. 6. 7) $$F(x)=P\{\gamma_i<x\}.$$

Miként szokásos, vezessük be a következő csonkított valószínűségi változókat:

(3. 6. 8) $$\tilde{\gamma}_i=\begin{cases}\gamma_i & \text{ha } |\gamma_i|\leqq L\varepsilon,\\ 0 & \text{ha } |\gamma_i|>L\varepsilon.\end{cases}$$

Ekkor

(3. 6. 9) $$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{L} p_i\gamma_i\right|>\varepsilon\right\}\leqq \sum_{i=1}^{L} P\{|\gamma_i|>L\varepsilon\}+P\left\{\left|\sum_{i=1}^{L} p_i\tilde{\gamma}\right|>\varepsilon\right\}.$$

Megjegyezzük, hogy

(3. 6. 10) $$\sum_{i=1}^{L} P\{|\gamma_i|>L\varepsilon\}=L\int\limits_{|x|>L\varepsilon} dF(x)\leqq \frac{L}{(L\varepsilon)^{1+\bar{b}}}\int\limits_{|x|>L\varepsilon} |x|^{1+\bar{b}}dF(x)\leqq \frac{\bar{c}}{L^{\bar{b}}\varepsilon^{1+\bar{b}}}.$$

Továbbá,

(3. 6. 11) $$\begin{aligned}|M\tilde{\gamma}_i|&=\left|\int\limits_{|x|\leqq L\varepsilon} x\,dF(x)\right|=\\ &=\left|\int\limits_{|x|>L\varepsilon} x\,dF(x)\right|\leqq \frac{1}{(L\varepsilon)^{\bar{b}}}\int\limits_{|x|>L\varepsilon} |x|^{1+\bar{b}}dF(x)\leqq \frac{\bar{c}}{L^{\bar{b}}\varepsilon^{\bar{b}}}.\end{aligned}$$

Elég nagy N-t választva és (3. 6. 11)-et figyelembe véve, kapjuk, hogy $L>N\bar{c}^{\frac{1}{\bar{b}}}$ esetén

(3. 6. 12) $$\left|M\left\{\sum_{i=1}^{L} p_i\tilde{\gamma}_i\right\}\right|=|M\tilde{\gamma}_1|\leqq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Megjegyezzük, hogy (3. 6. 3) folytán a $D\left(\sum_{i=1}^{L} p_i\tilde{\gamma}_i\right)$ szórásnégyzetre fennáll, hogy

(3. 6. 13)
$$D\left(\sum_{i=1}^{L} p_i\tilde{\gamma}_i\right) = D\tilde{\gamma}_1 \sum_{i=1}^{L} p_i^2 \leqq \frac{D\tilde{\gamma}_1}{L} \leqq \frac{2M\tilde{\gamma}_1^2}{L} = \frac{2}{L} \int_{|x|\leqq L\varepsilon} x^2 dF(x) \leqq$$
$$\leqq \frac{2(L\varepsilon)^{1-\bar{b}}}{L} \int_{|x|\leqq L\varepsilon} |x|^{1+\bar{b}} dF(x) \leqq \frac{2\varepsilon^{1-\bar{b}}\bar{c}}{L^{\bar{b}}}.$$

Alkalmazva (3. 6. 12)-t, a Csebisev-egyenlőtlenséget és (3. 6. 13)-at, azt kapjuk, hogy

(3. 6. 14)
$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{L} p_i\tilde{\gamma}_i\right| > \varepsilon\right\} \leqq P\left\{\left|\sum_{i=1}^{L} p_i\tilde{\gamma}_i - M\tilde{\gamma}_1\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leqq$$
$$\leqq \frac{4D\left(\sum_{i=1}^{L} p_i\tilde{\gamma}_i\right)}{\varepsilon^2} \leqq \frac{8\bar{c}}{\varepsilon^{1+\bar{b}} L^{\bar{b}}}.$$

(3. 6. 9), (3. 6. 10) és (3. 6. 14)-ből következik a lemma állítása.

3. 7. A lemma III. állításának levezetéséhez szükséges néhány becslés

Legyen minden $y \in Y$-ra

(3. 7. 1)
$$\lambda_j(y) = \int_{\tilde{Y}} \pi_j(y, \tilde{y}) Q(y, d\tilde{y}) \qquad (j = 1, \ldots, N).$$

Mindenekelőtt bizonyítsuk be, hogy ez a függvény[5] mérhető az S_Y σ-algebrára vonatkozólag. Ennél azonban egy általánosabb állítást fogunk bebizonyítani: tetszőleges $q(y, \tilde{y})$ függvényre, amely mérhető az $S_Y \times S_{\tilde{Y}}$ σ-algebrára vonatkozólag, az

(3. 7. 2)
$$u(y) = \int_{\tilde{Y}} q(y, \tilde{y}) Q(y, d\tilde{y})$$

függvény mérhető az S_Y σ-algebrára vonatkozólag. Valóban, tetszőleges rögzített y mellett a $q(y, \tilde{y})$ függvény mérhető $S_{\tilde{Y}}$-ra vonatkozólag (l. [24], 34. § 2. tétel). Ezért a (3. 7. 2)-ben szereplő integrálnak van értelme. Ha a $q_n(y, \tilde{y})$ függvénysorozatra fennáll $q_n(y, \tilde{y}) \to q(y, \tilde{y})$ mindenütt $Y \times \tilde{Y}$-on és $q_n(y, \tilde{y}) \leqq q(y, \tilde{y})$, akkor a megfelelő $u_n(y)$ függvényekre fennáll, hogy $u_n(y) \to u(y)$ mindenütt, ahol $u(y)$ definiálva volt. Minthogy az $S_Y \times S_{\tilde{Y}}$ σ-algebrát $A \times B$ ($A \in S_Y$, $B \in S_{\tilde{Y}}$) típusú halmazok generálják, az előző megjegyzés következtében elég bizonyítani a (3. 7. 2) függvény mérhetőségét arra az esetre, amidőn $q(y, \tilde{y})$ végesszámú értéket vesz fel, mindegyiket valamilyen $A \times B$ típusú halmazon. Nyilvánvaló továbbá, hogy a $q(y, \tilde{y})$ függvények

[5] A $\lambda_j(y)$ függvények, ugyanúgy, mint az $u(y)$ (l. (3.7.2)) az integrál divergálása folytán esetleg nem minden y-ra vannak definiálva. A mérhető függvény fogalma velük kapcsolatban a szokásos definíciók nyilvánvaló analógiájaként vezethető be.

valamely lineáris kombinációjának megfelel az $u(y)$ függvények egy analóg lineáris kombinációja. Ezért elegendő csupán a következő függvényt vizsgálni:

$$q(y,\tilde{y})=\begin{cases}1, & (y,\tilde{y})\in A\times B,\\ 0, & (y,\tilde{y})\notin A\times B.\end{cases} \tag{3.7.3}$$

Ilyen függvény esetén azonban a minket érdeklő

$$u(y)=\begin{cases}Q(y,B), & y\in A,\\ 0, & y\notin A\end{cases}$$

függvény mérhető, minthogy a $Q(y, B)$ függvény mérhető első változója szerint (l. az 1. 5 pontot).

Legyen

$$\delta_j^i(\tilde{\omega})=\lambda_j(\zeta_i(\tilde{\omega})) \qquad (i=1,\dots,L;\ j=1,\dots,N).$$

A $\delta_j^i(\tilde{\omega})$ függvény a $\lambda_j(y)$ függvény mérhetősége folytán valószínűségi változó. Megmutatjuk, hogy az $M\delta_j^i(\tilde{\omega})$ várható értékre fennáll

$$M\delta_j^i(\tilde{\omega})=M\pi_j(\eta,\tilde{\eta}). \tag{3.7.4}$$

Minthogy a ζ_i valószínűségi változók ugyanolyan eloszlásúak, mint az η változó, azért (3. 7. 4) a következő általánosabb tény következménye: tetszőleges $q(y,\tilde{y})$ függvényre, mely mérhető $S_Y\times S_{\tilde{Y}}$-ra vonatkozólag

$$\int_Y\left[\int_{\tilde{Y}} q(y,\tilde{y})Q(y,d\tilde{y})\right]p_\eta(dy)=\int_{Y\times\tilde{Y}} q(y,\tilde{y})p_{\eta\tilde{\eta}}(dy,d\tilde{y}). \tag{3.7.5}$$

Hasonló gondolatmenettel, mint amit a (3. 7. 2) függvény mérhetőségének bizonyításánál követtünk, nem nehéz belátni, hogy elég a (3. 7. 5) egyenlőséget arra az esetre bizonyítani, amidőn a $q(y,\tilde{y})$ függvény (3. 7. 3) alakú. Most felhasználjuk, hogy η és $\tilde{\eta}$-t a $\{Q, V\}$ átviteli berendezés kapcsolja össze és ezért tetszőleges $B\in S_{\tilde{Y}}$-ra 1 valószínűséggel

$$P\{\tilde{\eta}\in B/\eta\}=Q(\eta,B). \tag{3.7.6}$$

Azt kapjuk, hogy ha $q(y,\tilde{y})$ (3. 7. 3) alakú, akkor

$$\int_Y\left[\int_{\tilde{Y}} q(y,\tilde{y})Q(y,d\tilde{y})\right]p_\eta(dy)=\int_A Q(y,B)p_\eta(dy)=$$

$$=\int_{\{\eta\in A\}} Q(\eta,B)P(d\tilde{\omega})=\int_{\{\eta\in A\}} P\{\tilde{\eta}\in B/\eta\}P(d\tilde{\omega})=P\{\eta\in A,\tilde{\eta}\in B\}=$$

$$=\int_{A\times B} p_{\eta\tilde{\eta}}(dy,d\tilde{y})=\int_{Y\times\tilde{Y}} q(y,\tilde{y})p_{\eta\tilde{\eta}}(dy,d\tilde{y}),$$

amit bizonyítanunk kellett. Írjuk a rövidség kedvéért a következőt:

$$M_j=M\pi_j(\eta,\tilde{\eta}).$$

Akkor az $|x-M_j|^{1+\bar{b}}$ függvény konvex volta miatt minden y-ra

$$(3.7.7)\quad \begin{aligned} \left|\int\limits_{\tilde{Y}} \pi_j(y,\tilde{y})Q(y,d\tilde{y})-M_j\right|^{1+\bar{b}} &= \left|\int\limits_{\tilde{Y}} [\pi_j(y,\tilde{y})-M_j]Q(y,d\tilde{y})\right|^{1+\bar{b}} \leqq \\ &\leqq \int\limits_{\tilde{Y}} |\pi_j(y,\tilde{y})-M_j|^{1+\bar{b}}Q(y,d\tilde{y}). \end{aligned}$$

Ebből (3. 7. 5)-öt $q(y,\tilde{y})=|\pi_j(y,\tilde{y})-M_j|^{1+\bar{b}}$-ra alkalmazva, levezethető, hogy

$$(3.7.8)\quad \begin{aligned} M|\delta_j^i(\tilde{\omega})-M_j|^{1+\bar{b}} &= \int\limits_{Y}\left|\int\limits_{\tilde{Y}} \pi_j(y,\tilde{y})Q(y,d\tilde{y})-M_j\right|^{1+\bar{b}} p_\eta(dy) \leqq \\ &\leqq \int\limits_{Y}\left[\int\limits_{\tilde{Y}} |\pi_j(y,\tilde{y})-M_j|^{1+\bar{b}}Q(y,d\tilde{y})\right]p_\eta(d\tilde{y}) = \\ &= \int\limits_{Y\times\tilde{Y}} |\pi_j(y,\tilde{y})-M_j|^{1+\bar{b}}p_{\eta\tilde{\eta}}(dy,d\tilde{y}) = M\{|\pi_j(\eta,\tilde{\eta})-M_j|^{1+\bar{b}}\}. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy rögzített j esetén a

$$(3.7.9)\quad \delta_j^1(\tilde{\omega}),\ldots,\delta_j^L(\tilde{\omega})$$

valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak. A (3. 7. 8) egyenlőtlenségből és a $\bar{c}$ állandó definíciójából (l. az 1. tétel 4. feltételét) következik, hogy

$$(3.7.10)\quad M|\delta_j^i(\tilde{\omega})-M\delta_j^i(\tilde{\omega})|^{1+\bar{b}} \leqq \bar{c} < \infty.$$

Ezért a (3. 7. 10) mennyiségekre alkalmazható a 3. 6 pont lemmája; ezt a következő pontban használjuk fel.

3. 8. Feinstein lemmája bizonyításának befejezése

Emlékezzünk most vissza arra, hogy a 3. 2, 3. 4, 3. 5, 3. 6 pontokban tanulmányozott összes objektumok a t indextől függtek. Minthogy az $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ párok szorzata információstabilis és az (1. 7. 7) feltétel teljesül, azért minden elég nagy t-re

$$(3.8.1)\quad p_{\eta\tilde{\eta}}^t(F)=P^t\left\{\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(\eta,\tilde{\eta})}{C(Q,V)}-1\right|\leqq\delta\right\}\geqq 1-\frac{\varepsilon}{8}.$$

A (3. 5. 17)-ben előforduló egyik tag,

$$L^t\cdot 2^{-C^t(Q,V)(1-3\delta)}\leqq 2^{-C^t(Q,V)(\varepsilon-3\delta)}=2^{-\frac{\varepsilon}{2}C^t(Q,V)}$$

$\left(\text{emlékezzünk vissza, hogy } \delta=\frac{\varepsilon}{6}\right)$ zérushoz tart, ha $t\to\infty$. Ezért a (3. 5. 17) egyenlőségből levezethető, hogy minden elég nagy t-re

$$(3.8.2)\quad M\left\{\sum_{i=1}^{L^t} p_i^t Q^t(\zeta_i(\tilde{\omega}),\bar{F}_i(\tilde{\omega}))\right\}\geqq 1-\frac{\varepsilon}{4}.$$

Figyelembe véve, hogy a várható érték jele után álló valószínűségi változó nem lépi túl az 1-et, (3. 8. 2)-ből levezethető, hogy minden elegendően nagy t-re

(3. 8. 3) $$\tilde{P}^t\left\{\sum_{i=1}^{L} p_i Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), \bar{F}_i(\tilde{\omega})) > 1-\varepsilon\right\} \geqq \frac{3}{4}.$$

Tekintsük most a $\delta_j^{i,t}(\tilde{\omega})$ valószínűségi változók összességét (l. a 3. 7 pontot). Ahogy már a 3. 7 pontban megjegyeztük, ezekre a változókra alkalmazható a 3. 6 pont lemmája. Minthogy az (1. 7. 9) feltételből következik, hogy $L^t(\bar{c}^t)^{\frac{1}{\bar{b}}} \to \infty$, ha $t \to \infty$, azért minden elegendően nagy t-re $L^t > N(\bar{c}^t)^{\frac{1}{\bar{b}}}$, és ezért minden elég nagy t és tetszőleges j-re (l. a (3. 6. 4) egyenlőséget)

(3. 8. 4) $$\tilde{P}^t\left\{\left|\sum_{i=1}^{L} p_i \delta_j^i(\tilde{\omega}) - M\pi_j(\eta, \tilde{\eta})\right| > \varepsilon\right\} \leqq \frac{D(\bar{c}^t+1)}{(L_\varepsilon^t)^{\min(1,\bar{b})}}.$$

(3. 8. 4)-ből és a FEINSTEIN lemmájában szereplő (1. 7. 6) és (1. 7. 9) feltételekből következik, hogy

(3. 8. 5) $$\tilde{P}^t\left\{\bigcup_{j=1}^{N}\left|\sum_{i=1}^{L} p_i \delta_j^i(\tilde{\omega}) - M\pi_j(\eta, \tilde{\eta})\right| > \varepsilon\right\} \leqq \frac{DN^t(\bar{c}^t+1)}{(L_t^\varepsilon)^{\min(1,\bar{b})}} \to 0 \qquad (t \to \infty).$$

Minthogy feltevés szerint az $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ sorozatot a $\{Q^t, V^t\}$ csatorna kapcsolja össze, azért a következő vektorra fennáll:

(3. 8. 6) $$(M\pi_1^t(\eta, \tilde{\eta}), \ldots, M\pi_{N^t}^t(\eta, \tilde{\eta})) \in \bar{V}^t$$

(l. az (1. 5. 2) definíciót). A $[\bar{V}^t]_\varepsilon$ halmazok definíciójának megfelelően (l. az 1.7 pontot) (3. 8. 5) és (3. 8. 6)-ból következik, hogy minden elég nagy t-re

(3. 8. 7) $$\tilde{P}^t\left\{\left(\sum_{i=1}^{L} p_i \delta_1^i(\tilde{\omega}), \ldots, \sum_{i=1}^{L} p_i \delta_N^i(\tilde{\omega}) \in [\bar{V}]_\varepsilon\right)\right\} \geqq \frac{3}{4}.$$

A $\delta_j^{i,t}(\tilde{\omega})$ változók definíciója folytán

(3. 8. 8) $$\delta_j^{i,t}(\tilde{\omega}) = \int_{\tilde{Y}^t} \pi_j^t(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}) Q^t(\zeta_i(\tilde{\omega}), d\tilde{y}).$$

Ezért (3. 8. 7) azt fejezi ki, hogy

(3. 8. 9) $$\tilde{P}^t\left\{\left(\sum_{i=1}^{L} p_i \int_{\tilde{Y}} \pi_i(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}) Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), d\tilde{y}), \ldots \right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots, \sum_{i=1}^{L} p_i \int_{\tilde{Y}} \pi_N(\zeta_i(\tilde{\omega}), \tilde{y}) Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), d\tilde{y})\right) \in [\bar{V}]_\varepsilon\right\} \geqq \frac{3}{4}.$$

(3. 8. 3) és (3. 8. 9)-ből következik, hogy tetszőleges elegendően nagy t-re létezik egy olyan $\tilde{\omega}_0^t \in \tilde{\Omega}^t$ elemi esemény, hogy egyidejűleg fennáll

$$\sum_{i=1}^{L^t} p_i^t Q^t(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), \bar{F}_i(\tilde{\omega}_0)) \geqq 1 - \varepsilon,$$

(3. 8. 10)
$$\left(\sum_{i=1}^{L^t} p_i^t \int_{\tilde{Y}^t} \pi_1^t(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), \tilde{y}) Q^t(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), d\tilde{y}), \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \sum_{i=1}^{L^t} p_i^t \int_{\tilde{Y}^t} \pi_N^t(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), \tilde{y}) Q^t(\zeta_i(\tilde{\omega}), d\tilde{y})\right) \in [\bar{V}^t]_\varepsilon.$$

Legyen

$$y_i^t = \zeta_i^t(\tilde{\omega}_0),$$
$$A_i^t = \bar{F}_i^t(\tilde{\omega}_0),$$

akkor megkapjuk azon pontok és halmazok rendszerét, amelyek eleget tesznek a lemma mindhárom feltételének. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

3. 9. Feinstein lemmája végtelen kapacitású átviteli berendezés esetére

FEINSTEIN lemmája, melyet a 3. 1 pontban fogalmaztunk meg, véges kapacitású átviteli berendezésekre vonatkozott. Most le akarunk vezetni egy állítást, amely analogonja ennek a lemmának, azonban végtelen kapacitású csatornákra alkalmazható.

FEINSTEIN LEMMÁJA. *Legyen adva egy olyan $\{Q, V\}$ átviteli berendezés, hogy az ezen átviteli berendezéssel összekapcsolt valószínűségi változók valamilyen $\eta, \tilde{\eta}$ párjára a $p_{\eta\tilde{\eta}}(\cdot)$ eloszlás szinguláris a $p_\eta \times p_{\tilde{\eta}}(\cdot)$ eloszlásra vonatkozólag. (Ebben az esetben az $I(\eta, \tilde{\eta})$ információra fennáll: $I(\eta, \tilde{\eta}) = \infty$ és a kapacitásra $C(Q, V) = \infty$.) Legyen adva az L számú $p_1^L, \ldots, p_L^L$ valószínűségek egy olyan összessége, hogy fennálljon:*

(3. 9. 1)
$$\sum_{i=1}^{L} p_i^L = 1$$

és

(3. 9. 2)
$$\max_{i=1,\ldots,L} p_i^L \leqq \frac{2}{L}.$$

Akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra és minden elegendően nagy L-re létezik a bemeneti jelek (Y, S_Y) terében L számú olyan $y_1, \ldots, y_L$ pont, valamint a kimeneti jelek $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$ terében e pontoknak megfeleltetett $A_1, A_2, \ldots, A_L$ halmaz-összesség, hogy fennállnak a következők:

I) *az $A_1, A_2, \ldots, A_L$ halmazok páronként diszjunktak*

II) *minden i-re*

(3. 9. 3)
$$Q(y_i, A_i) = 1,$$

III) *a következő vektorra fennáll, hogy*

$$\left(\sum_{i=1}^{L} p_i^L \int\limits_{\tilde{Y}} \pi_1(y_i, \tilde{y}) Q(y, d\tilde{y}), \ldots, \sum_{i=1}^{L} p_i^L \int\limits_{\tilde{Y}} \pi_N(y_i, \tilde{y}) Q(y_i, \tilde{y})\right) \in [\overline{V}]_\varepsilon. \tag{3.9.4}$$

BIZONYÍTÁS. A lemma feltételei szerint a $p_{\eta\tilde{\eta}}(\cdot)$ mérték szinguláris a $p_\eta \times p_{\tilde{\eta}}(\cdot)$ mértékre vonatkozólag. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $F \in S_Y \times S_{\tilde{Y}}$ halmaz, hogy

$$\left.\begin{aligned} p_{\eta\tilde{\eta}}(F) &= 1, \\ p_\eta \times p_{\tilde{\eta}}(F) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.9.5}$$

Jelöljük F_y-nal és nevezzük az y pont legyezőjének az F halmaz azon metszetét, amelyet az $y \in Y$ pont határoz meg. Analóg módon az $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ pont $F_{\tilde{y}}$ legyezőjének fogjuk nevezni az F halmaz azon metszetét, amelyet az $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ pont határoz meg. Minden $y \in Y$-ra az F_y legyezőre fennáll $F_y \in S_{\tilde{Y}}$ és minden $\tilde{y} \in \tilde{Y}$-ra $F_{\tilde{y}} \in S_Y$ (l. [24], 34. §).

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a $p_\eta(\cdot)$ mérték szerint majdnem minden $y \in Y$ pontra a $Q(y, F_y)$ valószínűségre fennáll

$$Q(y, F_y) = 1. \tag{3.9.6}$$

Valóban, legyen

$$q(y, \tilde{y}) = \begin{cases} 1, & (y, \tilde{y}) \in F, \\ 0, & (y, \tilde{y}) \notin F \end{cases}$$

és alkalmazzuk a (3. 7. 5) egyenlőséget. Ezen egyenlőség szerint

$$\int\limits_{Y} Q(y, F_y) p_\eta(dy) = 1.$$

Ebből már következik a keresett állítás.

Éppúgy, mint a 2. 2 pontban, vezessük most be az $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{B}}, \tilde{P})$ valószínűségi segédteret, valamint ezen a téren definiált független és közös $p_\eta(\cdot)$ eloszlású $\zeta_1(\omega), \ldots$ $\ldots, \zeta_L(\tilde{\omega})$ valószínűségi változók sorozatát. Ugyanúgy, ahogy az a 3. 7 pontban történt, legyen most

$$\lambda_j(y) = \int\limits_{\tilde{Y}} \pi_j(y, \tilde{y}) Q(y, d\tilde{y}) \qquad (j = 1, \ldots, N)$$

és

$$M\delta_j^i(\tilde{\omega}) = M\pi_j(\eta, \tilde{\eta}).$$

A 3. 7 pont meggondolásaiból adódik, hogy a $\delta_j^i(\tilde{\omega})$-ok független, egyforma eloszlású valószínűségi változók és hogy

$$\delta_j^i(\tilde{\omega}) = \lambda_j(\zeta_i(\tilde{\omega})). \tag{3.9.7}$$

Szükségünk lesz a következő lemmára.

LEMMA. $\gamma_1,\dots,\gamma_n,\dots$ *legyen független, egyforma eloszlású, nulla várható értékű valószínűségi változók egy sorozata, továbbá legyen adva a* $p_1^L,\dots,p_L^L$ *számok egy olyan sorozata, amelyre*

$$\sum_{i=1}^{L} p_i^L = 1, \quad 0 \leqq p_i^L \leqq \frac{2}{L}. \tag{3.9.8}$$

Akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$*-ra*

$$\lim_{L\to\infty} P\left\{\left|\sum_{i=1}^{L} p_i^L \gamma_i\right| > \varepsilon\right\} = 0. \tag{3.9.9}$$

Ezt a lemmát könnyen levezethetjük a független valószínűségi változók összegének elméletében szereplő egyes jól ismert eredményekből. Például a lemma feltételei mellett teljesülnek a [6] könyv, 27. §-ban megfogalmazott 1. tételhez fűzött 3. megjegyzés feltételei, amiről könnyű meggyőződnünk akkor, ha azzal analóg módon okoskodunk, ahogy az a [6] könyv ugyanazon paragrafusában szereplő 3. tétel 2. következményének a levezetésében történik.

A most megfogalmazott lemmát esetünkre alkalmazva, azt kapjuk, hogy

$$\tilde{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^{L} p_i^L \delta_j^i(\tilde{\omega}) - M\pi_j(\eta,\tilde{\eta})\right| > \varepsilon\right\} \to 0 \qquad (L\to\infty), \tag{3.9.10}$$

illetve, hogy

$$\tilde{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{N}\left|\sum_{i=1}^{L} p_i^L \delta_j^i(\tilde{\omega}) - M\pi_j(\eta,\tilde{\eta})\right| > \varepsilon\right\} \to 0 \qquad (L\to\infty). \tag{3.9.11}$$

Ezért a 3. 8 pont végén követett meggondoláshoz hasonló okoskodással arra a következtetésre jutunk, hogy

$$\begin{aligned}\tilde{P}\Bigg\{\Bigg(&\sum_{i=1}^{L} p_i^L \int_{\tilde{Y}} \pi_1(\zeta_i(\tilde{\omega}),\tilde{y})Q(\zeta_i(\tilde{\omega}),d\tilde{y}),\dots \\ &\dots,\sum_{i=1}^{L} p_i^L \int_{\tilde{Y}} \pi_N(\zeta_i(\tilde{\omega}),\tilde{y})Q(\zeta_i(\tilde{\omega}),d\tilde{y})\Bigg)\in[\tilde{V}]_\varepsilon\Bigg\} \to 1 \qquad (L\to\infty).\end{aligned} \tag{3.9.12}$$

Szükségünk lesz a következő könnyen bizonyítható tényre. Legyenek (Y^1, S_{Y^1}) és (Y^2, S_{Y^2}) az (Y, S_Y) tér két reprezentánsa. Tekintsük a $Q(y^1, F_{y^2})$, $(y^1, y^2)\in \in Y^1\times Y^2$ függvényt. Meg akarjuk mutatni, hogy ez a függvény mérhető az $S_{Y^1}\times S_{Y^2}$ σ-algebrára vonatkozólag. Ennél azonban általánosabb állítást bizonyítunk be. Legyen $G\in S_Y\times S_{\tilde{Y}}$ és G_y a G halmaznak az a metszete, amelyet az $y\in Y$ pont határoz meg. Akkor a

$$q_G(y^1, y^2) = Q(y_1, Gy_2) \tag{3.9.13}$$

függvény mérhető a $S_{Y^1}\times S_{Y^2}$ σ-algebrára vonatkozólag. Valóban, ha a $G^i\in S_Y\times S_{\tilde{Y}}$ halmazok páronként diszjunktak és $G=\bigcup_i G^i$, akkor minden y-ra $G_y=\bigcup_i G_y^i$, és ezért

$$q_G(y_1, y_2) = \sum_i q_{G^i}(y_1, y_2).$$

Ebből az következik, hogy azon G halmazok összessége, amelyekre a (3. 9. 13) függvény mérhető, σ-algebrát képez, és ezért mérhetőségét elegendő bebizonyítani arra az esetre, midőn $G=A\times B$, $A\in S_Y$, $B\in S_{\tilde{Y}}$. De akkor $G_y=B$, ha $y\in A$ és G_y üres, ha $y\notin A$. Ezért

$$q_G(y_1, y_2)=\begin{cases} 0, & y_2\notin A, \\ Q(y_1, B), & y_2\in A. \end{cases}$$

Ennek mérhetősége abból következik, hogy a Q függvény első változója szerint mérhető.

Megjegyezzük, hogy a $Q(y^1, F_{y^2})$ függvény fentebb bebizonyított mérhetőségéből és abból a tényből, hogy mérhető függvények szuperpozíciója mérhető, következik, hogy a

$$Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), F_{\zeta_j}(\tilde{\omega}))$$

függvény tetszőleges i és j-re mérhető függvény a $\mathfrak{B}$ σ-algebrára vonatkozólag. Számítsuk ki ennek várható értékét $i\neq j$ esetében. Nyilvánvaló, hogy a ζ_i, ζ_j változók függetlensége következtében fennáll, hogy

$$MQ(\zeta_i(\tilde{\omega}), F_{\zeta_j}(\tilde{\omega}))=\int_{Y^1}\int_{Y^2} Q(y^1, F_{y^2})p_\eta(dy^1)p_\eta(dy^2). \tag{3.9.14}$$

Felhasználva Fubini tételét (l. [9], 30. §), kapjuk, hogy

$$MQ(\zeta_i(\tilde{\omega}), F_{\zeta_j}(\tilde{\omega}))=\int_{Y^2}\left[\int_{Y^1} Q(y^1, F_{y^2})p_\eta(dy^1)\right]p_\eta(dy^2), \tag{3.9.15}$$

mivel azonban az $(\eta, \tilde{\eta})$ változókat a $\{Q, V\}$ csatorna kapcsolja össze, és így fennáll (3. 7. 6), következik:

$$\int_{Y^1} Q(y^1, F_{y^2})p_\eta(dy^1)=MQ(\eta, F_{y^2})=M\{P\{\tilde{\eta}\in F_{y^2}/\eta\}\}=p_{\tilde{\eta}}(F_{y^2}). \tag{3.9.16}$$

(3. 9. 15), (3. 9. 16)-ból, a mértékek szorzatáról szóló tételből (l. [24], 36. § 2. tétel) és a (3. 9. 5) egyenlőségből következik, hogy

$$MQ(\zeta_i(\tilde{\omega}), F_{\zeta_j}(\tilde{\omega}))=\int_{Y^2} p_{\tilde{\eta}}(F_{y^2})p_{\tilde{\eta}}(dy^2)=p_{\tilde{\eta}}\times p_{\tilde{\eta}}(F)=0. \tag{3.9.17}$$

(3. 9. 17)-ből levezethető, hogy

$$\tilde{P}\{Q(\zeta(\tilde{\omega}), F_{\zeta_j}(\tilde{\omega}))=0\}=1 \qquad (i\neq j). \tag{3.9.18}$$

Következésképp 1 valószínűséggel egyidejűleg teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

$$Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), F_{\zeta_j}(\tilde{\omega}))=0 \qquad (i\neq j;\ i=1,\dots,L;\ j=1,\dots,L). \tag{3.9.19}$$

(3. 9. 6), (3. 9. 12) és (3. 9. 19) értelmében elég nagy L esetén megválaszthatjuk az $\tilde{\omega}_0$ pontot úgy, hogy egyidejűleg fennálljanak:

$$\begin{cases} Q(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), F_{\zeta_j}(\tilde{\omega}_0))=0 & (i\neq j;\ i=1,\dots,L;\ j=1,\dots,L), \\ Q(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), F_{\zeta_j}(\omega_0))=1 & (i=1,\dots,L), \end{cases} \tag{3.9.20}$$

a következő vektorra pedig fennálljon:

$$\left(\sum_{i=1}^{L} p_i^L \int_{\tilde{Y}} \pi_1(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), \tilde{y}) Q(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), d\tilde{y}), \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \sum_{i=1}^{L} p_i^L \int_{\tilde{Y}} \pi_N(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), \tilde{y}) Q(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), d\tilde{y}) \in [\overline{V}]_\varepsilon. \right. \tag{3.9.21}$$

Legyen most

$$y_i = \zeta_i(\tilde{\omega}_0), \; A_i = F_{\zeta_i}(\tilde{\omega}_0) \setminus \bigcup_{j \neq i} F_{\zeta_j}(\tilde{\omega}_0), \tag{3.9.22}$$

akkor az y_i pontok és az A_i halmazok egy olyan rendszerét kapjuk, amely eleget tesz a tétel feltételeinek.

4. § Közleményekre vonatkozó alaplemma

4.1. A lemma megfogalmazása

FEINSTEINnek az előző paragrafusban bebizonyított lemmája durván szólva azt mondja ki, hogy egy C kapacitású csatornán, ha a hibás reprodukálás kis valószínűségű, körülbelül 2^C különböző jelet lehet átvinni. A közleményekről szóló alaplemma tartalma — durván szólva — az, hogy egy H entrópiájú közlemény átvitelét helyettesíteni lehet 2^H különböző közlemény átvitelével. E lemma megfogalmazásának és bizonyításának alapgondolata analogonja a FEINSTEIN lemma alapgondolatának.

Azokat a definíciókat és jelöléseket használjuk itt is, amelyeket az 1.4 és 1.7 pontban vezettünk be.

KÖZLEMÉNYEKRE VONATKOZÓ ALAPLEMMA. *Legyen adva egy olyan* $\{W^t\}$ *információ-stabilis közleménysorozat, amelyre a* $H^t(W)$ *entrópiára fennáll* $H^t(W) \to \infty$, *ha* $t \to \infty$, *de* $H^t(W) < \infty$.

Tegyük fel, hogy a $\varrho_j^t(x, \tilde{x})$ *függvények* M^t *száma olyan, hogy teljesül az* 1. *tétel* (1.7.5) *feltétele. Tegyük fel azt is, hogy e tétel* V. *feltevése is teljesül.*

Legyen $i_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x})$ *az* V. *feltételben használt* ξ^t, $\tilde{\xi}^t$ *változó-pár információ sűrűsége.*[6] *Adjunk meg egy tetszőleges* $\varepsilon > 0$*-t és jelöljük* F_ε^t*-nal az* $X^t \times \tilde{X}^t$ *tér* $(x^t, \tilde{x}^t)$ *pontjainak azon halmazát, amelyet a*

$$F_\varepsilon^t = \left\{ \left| \frac{i_{\xi\tilde{\xi}}^t(x, \tilde{x})}{H^t(W)} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \right\} \tag{4.1.1}$$

összefüggés definiál.

Jelöljük $r_\varepsilon^t(x)$*-vel a következő feltételes valószínűség egyik variánsát:*

$$r_\varepsilon^t(x) = P^t\{(\xi, \tilde{\xi}) \notin F_\varepsilon | \xi = x\}. \tag{4.1.2}$$

[6] A 4.2 pontban bebizonyítjuk, hogy ez az információ-sűrűség létezik minden elegendően nagy t-re.

Ekkor megadható olyan elegendően nagy T, hogy minden $t \geqq T$-re kiválasztható

$$K_\varepsilon^t = [2^{(1+\varepsilon)H^t(W)}] \tag{4.1.3}$$

számú $\tilde{x}_1^t, \ldots, \tilde{x}_{K_\varepsilon}^t$ pont a kimeneti közlemények $\tilde{X}^t$ terében, továbbá e pontok mindegyikének megfeleltethető egy, az S_X^t-re vonatkozólag mérhető $q_i^t(x)$, $x^t \in X^t$ függvény, oly módon, hogy fennállnak a következők:

I) *minden $x^t \in X^t$, $i = 1, \ldots, K_\varepsilon^t$ és $t \geqq T$-re:*

$$0 \leqq q_i^t(x) \leqq 1 \tag{4.1.4}$$

és

$$Q^t(x) = \sum_{i=1}^{K_\varepsilon^t} q_i^t(x) + r_\varepsilon^t(x) \leqq 1, \tag{4.1.5}$$

II) *valamilyen rögzített $\varkappa > 0$-ra és minden $t \geqq T$-re*

$$Q^t = \int_{X^t} Q^t(x) p_\xi^t(dx) \geqq 1 - 2^{-\varkappa H^t(W)}. \tag{4.1.6}$$

III) *Ha $t \geqq T$, akkor a következő vektorra fennáll, hogy*

$$(S_1^t, \ldots, S_M^t) \in [\overline{W}^t]_\varepsilon, \tag{4.1.7}$$

ahol

$$S_k^t = \sum_{i=1}^{K_\varepsilon^t} \int_{X^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x}_i) q_i^t(x) p_\xi^t(dx) + \tag{4.1.7'}$$
$$+ \iint_{X^t \times \tilde{X}^t / F_\varepsilon^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) + [1 - Q^t] M \varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}).$$

Hogy a lemmában bevezetett $q_i^t(x)$ függvények szemléletes jelentésére rávilágítsunk, kissé elébe vágva a későbbieknek, megjegyezzük, hogy SHANNON tételének bizonyításában a kódot úgy szerkesztjük meg, hogy — durván szólva —, amidőn az x^t közlemény $q_i^t(x)$ valószínűséggel „belép", akkor olyan jelet vigyünk át, amelyet helyes vételkor $\tilde{x}_i^t$ közleményként fogunk visszakódolni. A csatorna információ-stabilitásából következik, hogy t nagy értékeire az $r^t(x)$ valószínűségek kicsik és (4. 1. 5)-tel összhangban az $1 - \sum_i q_i^t(x)$ különbség kicsi lesz. Kis valószínűséggel ($1 - \sum_i q_i^t(x)$ valószínűséggel) a közlemény egyáltalán nem fog átvivődni. A lemma III. állítása lehetővé teszi, hogy utóbb kimutassuk, hogy ilyen átviteli módszernél teljesül a közlemény reprodukálási pontosságának a feltétele.

A bizonyítás alapgondolatát a 4. 3 pontban adjuk meg, miután a 4. 2 fejezetben bevezetünk bizonyos fontos fogalmakat, amelyeket majd a bizonyításban felhasználunk. Sok, számunkra szükséges megállapítás analogonja lesz azoknak a megállapításoknak, amelyeket a 3. §-ban FEINSTEIN lemmájának bizonyításában tettünk. Ezeket a gondolatmeneteket átfogóbban fejtjük ki.

4. 2. Legyezők konstrukciója

E pont minden konstrukciója (valamint a 4. 4, 4. 5 pontoké is) rögzített t_0 indexű közleményekre vonatkozik. Ezt az indexet el is hagyjuk majd azokban a jelölésekben, amelyeket ezekben a fejezetekben használunk.

A $\varepsilon > 0$ szám legyen rögzítve. A megfelelő indexet ugyancsak el fogjuk hagyni mindenütt. Rögzítünk továbbá bizonyos pozitív számokat is: (β, γ, t); ezek a 4. 4, 4. 5 pontban tetszőlegesek lesznek. A 4. 6 pontban viszont rögzített értéket adunk nekik, amelyet ott majd közlünk. $(\xi, \tilde{\xi})$-mal fogjuk jelölni azt a $(\xi^{t_0}, \tilde{\xi}^{t_0})$ valószínűségi változó-párt, amely az V. feltételben használt $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ információ-stabilis sorozatban fellép. Minthogy $H^t(\tilde{W}) < \infty$, az (1. 7. 10) feltételből következik, hogy elegendően nagy t mellett az $I(\xi, \tilde{\xi})$ információra $I(\xi, \tilde{\xi}) < \infty$ fennáll. Minthogy a lemma megfogalmazásának megfelelően minket csupán elegendően nagy t-k érdekelnek, úgy vehetjük, hogy $I(\tilde{\xi}, \xi) < \infty$. Következésképp létezik az $i_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x})$ információ-sűrűség. Legyen ismét (vö. (4. 1. 1)) F az $(x, \tilde{x})$ azon pontok halmaza, amelyet a következő feltétel definiál:

$$F = \left\{ i_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) - H(W) | \leqq \frac{\varepsilon}{4} H(W) \right\}. \tag{4. 2. 1}$$

Az F halmazra fennáll: $F \in S_X \times S_{\tilde{X}}$. Minden $x \in X$-re az x pont legyezőjének hívjuk és F_x-szel jelöljük az F halmaznak azt a metszetét, amelyet az x pont határoz meg. Minden $\tilde{x} \in \tilde{X}$-ra az $\tilde{x}$ pont legyezőjének nevezzük és $F_{\tilde{x}}$-mal jelöljük az F halmaznak azt a metszetét, amelyet az $\tilde{x}$ pont határoz meg. Ugyanúgy, mint a 3. 2 pontban is, megmutatható, hogy minden $x \in X$-re $F_x \in S_{\tilde{X}}$, és minden $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mellett $F_{\tilde{x}} \in S_X$.

A további meggondolásokhoz szükségünk van a következő tényre. Legyen $A \in S_X \times S_{\tilde{X}}$ és $A \subset F$, továbbá

$$p_{\xi\tilde{\xi}}(A / \xi = x) \tag{4. 2. 2}$$

a $(\xi, \tilde{\xi}) \in A$ eseménynek a ξ változóra vonatkoztatott feltételes valószínűsége. Ezt a feltételes valószínűséget x olyan függvényének tekinthetjük, amely mérhető az S_X-re vonatkozólag. Legyen A_x az A halmaznak az a metszete, amelyet az x pont határoz meg. Akkor a p_ξ mérték szerint majdnem minden x-re

$$p_{\tilde{\xi}}(A_x) \geqq 2^{-H(W)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)} p_{\xi\tilde{\xi}}(A | \xi = x). \tag{4. 2. 3}$$

Az a meggondolás, amely a (4. 2. 3) egyenlőség levezetéséhez szükséges, analogonja a (3. 2. 2) egyenlőtlenség levezetésében alkalmazott meggondolásnak. Nevezetesen, vegyük észre, hogy (4. 2. 1), és az információ-sűrűség definíciója következtében

$$a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) = \frac{dp_{\xi\tilde{\xi}}}{dp_\xi \times p_{\tilde{\xi}}}(x, \tilde{x}) \leqq 2^{H(W)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}, \quad (x, \tilde{x}) \in F. \tag{4. 2. 4}$$

Tetszőleges G mérhető halmazra, amelyre $G \subset A \subset F$, fennáll, hogy

$$p_{\xi\tilde{\xi}}(G) = \int_G a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) p_\xi \times p_{\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) \leqq 2^{H(W)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)} p_\xi \times p_{\tilde{\xi}}(G). \tag{4. 2. 5}$$

Tetszőleges mérhető $B \in S_X$-re jelölje $\hat{B}$ a következő hengerhalmazt:

$$\hat{B} = B \times \tilde{X}.$$

Akkor $p_\xi(B) = p_{\xi\tilde{\xi}}(\hat{B})$, továbbá, (4. 2. 5) és a feltételes valószínűség definíciója értelmében:

$$\text{(4. 2. 6)} \quad \begin{aligned} \int_B p_{\tilde{\xi}}(A_x) p_\xi(dx) &= p_\xi \times p_{\tilde{\xi}}(A \cap \hat{B}) \geqq 2^{-H(W)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)} p_{\xi\tilde{\xi}}(A \cap \hat{B}) = \\ &= 2^{-H(W)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)} \int_B p_{\xi\tilde{\xi}}(A/\xi = x) p_\xi(dx). \end{aligned}$$

Minthogy (4. 2. 6) tetszőleges B mellett igaz, következik, hogy (4. 2. 3) majdnem mindenütt fennáll.

Alkalmazva (4. 2. 3)-at $A = F$-re, látjuk, hogy a $p_\xi(\cdot)$ mérték szerint majdnem minden x bemeneti közleményre az F_x legyező olyan, hogy fennáll

$$\text{(4. 2. 7)} \qquad p_{\tilde{\xi}}(F_x) \geqq 2^{-H(W)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)} p_{\xi\tilde{\xi}}(F/\xi = x).$$

Analóg módon bizonyítható, hogy a $p_{\tilde{\xi}}(\cdot)$ mérték szerint majdnem minden $\tilde{x}$ kimeneti közleményre az $F_{\tilde{x}}$ legyező olyan, hogy fennáll

$$\text{(4. 2. 8)} \qquad p_\xi(F_{\tilde{x}}) \geqq 2^{-H(W)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)} p_{\xi\tilde{\xi}}(F/\tilde{\xi} = \tilde{x}),$$

végül, analóg módon:

$$\text{(4. 2. 9)} \qquad p_{\tilde{\xi}}(F_x) \leqq 2^{-H(W)\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)}.$$

4. 3. A lemma bizonyításának alapgondolata

Ennek a pontnak a definíciói és megállapításai semmiféle matematikai szigorúságra nem tartanak igényt; a további pontokban nem is fogjuk felhasználni őket.

Annak analógiájára, ahogy az a FEINSTEIN lemma bizonyításakor történt, véletlenszerűen kiválasztunk egymástól függetlenül K számú $\tilde{x}_i$ pontot, $p_{\tilde{\xi}}$ eloszlással. A $q_i(x)$ valószínűségeket úgy választjuk meg, hogy csupán azok a $q_i(x)$-ek legyenek zérustól különbözők, amelyekre $\tilde{x}_i \in F_x$. Nagy t esetén $p_{\xi\tilde{\xi}}(F) \approx 1$. Ennek folytán $p_{\xi\tilde{\xi}}(F/\xi = x) \approx 1$, azaz $r^t(x) \approx 0$ (l. (4. 1. 2)-t) az x-ek túlnyomó többségére és ezért a (4. 2. 7) egyenlőtlenség azt mutatja, hogy $p_{\tilde{\xi}}(F_x)$ rendje nagyobb mint K^{-1}, úgyhogy számítani lehet arra, hogy találhatók olyan $\tilde{x}_i$ pontok, melyek beleesnek az F_x legyezőbe. Méghozzá azon $\tilde{x}_i$ pontok száma, melyek beleesnek az F_x legyezőbe, exponenciálisan nő $H^t(W)$ növekedésével.

Az alapvető nehézség abban áll, hogyan érjük el a reprodukálási pontosság alapfeltételét utánzó (4. 1. 7) feltétel teljesülését. Feltevés szerint a következő vektorra fennáll, hogy

$$\left(\iint \varrho_1(x,\tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}(dx,d\tilde{x}),\ldots,\iint \varrho_M(x,\tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}(dx,d\tilde{x})\right)\in\overline{W}. \tag{4.3.1}$$

Jelöljük $p_{\tilde{\xi}/\xi}(d\tilde{x}/x)$-szel a $\tilde{\xi}$ változó feltételes eloszlását a $\xi=x$ feltétel mellett; ekkor

$$\iint \varrho_j(x,\tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}(dx,d\tilde{x})=\int_X\left[\int_{\tilde{X}}\varrho_j(x,\tilde{x})p_{\tilde{\xi}/\xi}(d\tilde{x}/x)\right]p_\xi(dx). \tag{4.3.2}$$

A már említett egyenlőségből, $p_{\xi\tilde{\xi}}(F)\approx 1$-ből következik, hogy

$$\iint_{X\times\tilde{X}\setminus F}\varrho_j(x,\tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}(dx,d\tilde{x})\approx 0, \tag{4.3.3}$$

és ezért a (4. 1. 7) alapfeltétel teljesül, ha minden x-re és minden j-re

$$\int_{\tilde{X}}\varrho_j(x,\tilde{x})p_{\tilde{\xi}/\xi}(d\tilde{x}/x)\approx\sum_{i=1}^{K}\varrho_j(x,\tilde{x}_i)q_i(x). \tag{4.3.4}$$

Nagy t-kre az F halmaz majdnem egybeesik $X\times\tilde{X}$-mal. Ezért (4. 3. 4) helyettesíthető a következővel:

$$\int_{F_x}\varrho_j(x,\tilde{x})p_{\tilde{\xi}/\xi}(d\tilde{x}/x)\approx\sum_{i=1}^{K}\varrho_j(x,\tilde{x}_i)q_i(x). \tag{4.3.5}$$

Tekintsük most azokat az $\tilde{x}_i$ pontokat, amelyek F_x-be beleesnek, és legyen

$$q_i(x)=\frac{1}{K}a_{\xi\tilde{\xi}}(x,\tilde{x}_i). \tag{4.3.6}$$

(Amint a következőkben látni fogjuk, annak a valószínűsége, hogy a pontok úgy vannak kiválasztva, hogy $\sum_i q_i(x)>1$ legyen, nem nagy, és ezt el lehet hanyagolni.) Ekkor a (4. 3. 5) összegben mindegyik összeadandó várható értéke egyenlő a következővel (minthogy $\tilde{x}_i$ eloszlása $p_{\tilde{\xi}}$):

$$\frac{1}{K}\int_{F_x}\varrho_j(x,\tilde{x})a_{\xi\tilde{\xi}}(x,\tilde{x})p_{\tilde{\xi}}(dx)=\int_{F_x}\varrho_j(x,\tilde{x})p_{\tilde{\xi}/\xi}(d\tilde{x}/x).$$

Ezért — átlagban véve — a (4. 3. 5) jobb oldalán álló összeg egyenlő ez utóbbi egyenlőség jobb oldalával. Továbbá, ez az összeg K számú független valószínűségi változó összege is és a nagy számok törvénye értelmében (ez a törvény alkalmazható, minthogy $(x,\tilde{x})\in F$, az $a_{\xi\tilde{\xi}}(x,\tilde{x})$ változó pedig az F definíciója folytán oly értékeket vesz fel, melyek nem lépik túl $2^{H\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}$-et és $(K^t)^{-1}\,2^{H^t\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}\to 0$) ez közel van saját várható értékéhez. Létezik tehát az $\tilde{x}_i$ pontok olyan konkrét megválasztása, amelyre (4. 3. 5) igaz.

4.4. A bemeneti közlemények véletlenszerű megválasztása

Éppúgy, mint a 3.4 pontban, tekintsük most az $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{B}}, \tilde{P})$ valószínűségi segédteret és K számú olyan független, $\zeta_1(\tilde{\omega}), \ldots, \zeta_K(\tilde{\omega})$ valószínűségi változó összességét, amelyek az $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{B}}, \tilde{P})$ téren vannak megadva és értékeik az $(\tilde{X}, S_{\tilde{X}})$ térbe esnek; legyen ezenkívül mindegyiknek az eloszlása ugyanaz: $p_{\tilde{\xi}}(\cdot)$.

Jelöljük most D_k-val $(k=1, \ldots, M)$ az $(x, \tilde{x})$ párok azon halmazát, amelyet a következő egyenlőtlenség definiál:

$$D_k = \{|\varrho_k(x, \tilde{x}) - M_{\varrho_k}(\xi, \tilde{\xi})| > \beta\}. \tag{4.4.1}$$

Felhasználva az (1.7.11) definíciót és a Csebisev-féle egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

$$p_{\xi\tilde{\xi}}(D_k) \leq \frac{c}{\beta^{1+b}}. \tag{4.4.2}$$

Továbbá, hogy

$$\iint_{D_k} |\varrho_k(x, \tilde{x}) - M_{\varrho_k}(\xi, \tilde{\xi})| \, p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) \leq \frac{c}{\beta^b}. \tag{4.4.3}$$

Vezessük most be a következő halmazt:

$$G = (D_1 \cup \ldots \cup D_M) \cap F. \tag{4.4.4}$$

(4.4.2)-ből következik, hogy

$$p_{\xi\tilde{\xi}}(G) \leq \frac{Mc}{\beta^{1+b}}. \tag{4.4.5}$$

Minthogy a $G \setminus D_k$ halmazon belül $|\varrho_k(x, \tilde{x}) - M\varrho_k(\xi, \tilde{\xi})| \leq \beta$, azért (4.4.3)-ból és (4.4.5)-ből következik, hogy

$$\iint_G |\varrho_k(x, \tilde{x}) - M_{\varrho_k}(\xi, \tilde{\xi})| \, p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) \leq \frac{c}{\beta^b} + \frac{\beta M c}{\beta^{1+b}} = \frac{c(M+1)}{\beta^b}. \tag{4.4.6}$$

Végül legyen

$$\bar{F} = F \setminus G \tag{4.4.7}$$

és

$$\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) = \begin{cases} a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}), & (x, \tilde{x}) \in \bar{F}, \\ 0, & (x, \tilde{x}) \notin \bar{F}. \end{cases} \tag{4.4.8}$$

Az F halmaz definíciójának megfelelően (l. (4.2.4))

$$0 \leq \hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x}) \leq 2^{H(W)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}. \tag{4.4.9}$$

Legyen most (vö. (4.1.2)-vel,)

$$\bar{r}(x) = P\{(\xi, \tilde{\xi}) \in \bar{F} / \xi = x\}. \tag{4.4.10}$$

Minthogy $F\supset\bar{F}$, $F\setminus\bar{F}\subset G$, azért $r(x)\leqq\bar{r}(x)$, és (4. 4. 5)-ből következik, hogy

$$(4.4.11)\qquad \int_X(\bar{r}(x)-r(x))p_\xi(dx)=\int_X P\{(\xi,\tilde{\xi})\in G/\xi=x\}p_\xi(dx)\leqq\frac{Mc}{\beta^{1+b}}.$$

Vezessük be az $(x,\tilde{\omega})$ párok C halmazát a következő módon:

$$(4.4.12)\qquad C=\left\{\left|\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x,\zeta_i(\tilde{\omega}))+\bar{r}(x)-1\right|>\gamma\right\}.$$

Legyen most tetszőleges $\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$ és $x\in X$ mellett

$$(4.4.13)\qquad q_i(x,\tilde{\omega})=\begin{cases}\dfrac{\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x,\zeta_i(\tilde{\omega}))}{K}\,\dfrac{1-\bar{r}(x)}{1-\bar{r}(x)+\gamma}, & \text{ha}\quad (x,\tilde{\omega})\notin C,\\ 0, & \text{ha}\quad (x,\tilde{\omega})\in C.\end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy minden x és $\tilde{\omega}$-ra

$$(4.4.14)\qquad 0\leqq q_i(x,\tilde{\omega})\leqq 1,\quad 0\leqq\sum_{i=1}^{K}q_i(x,\tilde{\omega})\leqq 1-\bar{r}(x).$$

Tekintsük a következő valószínűségi változót:

$$(4.4.15)\qquad \sum_{i=1}^{K}\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x,\zeta_i(\tilde{\omega})).$$

Ennek az összegnek az összeadandói rögzített $x\in X$ mellett független, egyforma eloszlású valószínűségi változók. Minthogy $\zeta_i(\tilde{\omega})$ eloszlása $p_{\tilde{\xi}}(\cdot)$, azért a (4. 4. 15) összegben valamely összeadandó várható értéke a következővel egyenlő:

$$(4.4.16)\qquad M\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x,\zeta_i(\tilde{\omega}))=\int_{\bar{F}_x}a_{\xi\tilde{\xi}}(x,\tilde{x})p_{\tilde{\xi}}(d\tilde{x}),$$

ahol $\bar{F}_x$ az $\bar{F}$ halmaznak az a metszete, amelyet az x pont határoz meg. Megjegyezzük, hogy a p_ξ mérték szerint majdnem mindenütt fennáll a következő egyenlőség:

$$(4.4.17)\qquad \int_{\bar{F}_x}a_{\xi\tilde{\xi}}(x,\tilde{x})p_{\tilde{\xi}}(d\tilde{x})=1-\bar{r}(x).$$

Valóban, felhasználva (4. 4. 10)-et, a feltételes valószínűség definícióját, az $a_{\xi\tilde{\xi}}(x,\tilde{x})$ sűrűség meghatározását és FUBINI tételét, azt kapjuk, hogy tetszőleges $A\in S_X$-re

$$(4.4.18)\qquad \begin{aligned}\int_A[1-\bar{r}(x)]p_\xi(dx)&=\int_A P\{(\xi,\tilde{\xi})\in\bar{F}/x\}p_\xi(dx)=\\ &=p_{\xi\tilde{\xi}}(\bar{F}\cap A\times\tilde{X})=\int_{\bar{F}\cap A\times\tilde{X}}a_{\xi\tilde{\xi}}(x,\tilde{x})p_\xi\times p_{\tilde{\xi}}(dx,d\tilde{x})=\\ &=\int_A\Big[\int_{\bar{F}_x}a_{\xi\tilde{\xi}}(x,\tilde{x})p_{\tilde{\xi}}(d\tilde{x})\Big]p_\xi(dx),\end{aligned}$$

ebből azonban közvetlenül folyik (4. 4. 17). Így tehát kimutattuk, hogy a p_ξ mérték szerint majdnem minden $x \in X$-re

$$(4.4.19)\qquad M\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) = 1 - \bar{r}(x).$$

Minthogy (4. 4. 8) és (4. 2. 9)-ből az következik, hogy

$$\tilde{P}\{\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) \neq 0\} \leqq 2^{-H(W)\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)},$$

azért (4. 4. 9)-ből nyilvánvaló, hogy

$$(4.4.20)\qquad D\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) \leqq 2^{H(W)\left(1+\frac{3}{4}\varepsilon\right)}.$$

A Csebisev-féle egyenlőtlenséget alkalmazva, azt kapjuk, hogy majdnem minden $x \in X$-re

$$(4.4.21)\qquad \tilde{P}\left\{\left|\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} \hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) - [1 - \bar{r}(x)]\right| > \gamma\right\} \leqq \frac{2^{H(W)\left(1+\frac{3\varepsilon}{4}\right)}}{K\gamma^2}.$$

(4. 4. 12)-ből közvetlenül adódik, hogy

$$(4.4.22)\qquad p_\xi \times \tilde{P}(C) \leqq \frac{2^{H(W)\left(1+\frac{3\varepsilon}{4}\right)}}{K\gamma^2}.$$

Ezt a becslést a következő pontban használjuk fel.

Most megjegyezzük, hogy a (4. 4. 13) definícióból következik, hogy

$$(4.4.23)\qquad \sum_{i=1}^{K} q_i(x, \tilde{\omega}) \begin{cases} \geqq \dfrac{(1-\bar{r}(x)-\gamma)(1-\bar{r}(x))}{1-\bar{r}(x)+\gamma}, & \text{ha} \quad (x, \tilde{\omega}) \notin C, \\ = 0, & \text{ha} \quad (x, \tilde{\omega}) \in C. \end{cases}$$

(4. 4. 23)-ból látható, hogy

$$(4.4.24)\qquad \bar{r}(x) + \sum_{i=1}^{K} q_i(x, \tilde{\omega}) \geqq 1 - 2\gamma, \qquad (x, \tilde{\omega}) \notin C.$$

(4. 4. 24), (4. 4. 23) és (4. 4. 22)-ből, ha bevezetjük a

$$(4.4.25)\qquad \bar{Q}(x, \tilde{\omega}) = \sum_{i=1}^{K} q_i(x, \tilde{\omega}) + \bar{r}(x)$$

és

$$(4.4.26)\qquad \bar{Q}(\tilde{\omega}) = \int_X \bar{Q}(x, \tilde{\omega}) p_\xi(dx)$$

jelöléseket, következik, hogy az alábbi várható értékre

$$(4.4.27)\qquad M\bar{Q}(\tilde{\omega}) \geqq (1-2\gamma)(1-p_\xi \times \tilde{P}(C)) \geqq (1-2\gamma)\left(1 - \frac{2^{H(W)\left(1+\frac{3\varepsilon}{4}\right)}}{K\gamma^2}\right)$$

fennáll. Továbbá, bevezetve a következő jelöléseket (vö. (4. 1. 5), (4. 1. 6)):

$$Q(x, \tilde{\omega}) = \sum_{i=1}^{K} q_i(x, \tilde{\omega}) + r(x) \tag{4. 4. 28}$$

és

$$\bar{Q}(\tilde{\omega}) = \int_X Q(x, \tilde{\omega}) p_\xi(dx),$$

(4. 4. 27) és (4. 4. 11)-ből levezethetjük az alábbi becslést:

$$M\bar{Q}(\tilde{\omega}) \geqq (1-2\gamma)\left(1 - \frac{2^{H(W)\left(1+\frac{3\varepsilon}{4}\right)}}{K\gamma^2} - \frac{Mc}{\beta^{1+b}}\right). \tag{4. 4. 29}$$

4. 5. Az alap-becslések levezetése

A következő valószínűségi változóval foglalkozunk:

$$\begin{aligned} v_k(\tilde{\omega}) = {} & \sum_{i=1}^{K} \int_X \varrho_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) q_i(x, \tilde{\omega}) p_\xi(dx) + \\ & + \int_{X \times \tilde{X} \setminus \bar{F}} \varrho_k(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) + [1 - \bar{Q}(\tilde{\omega})] M_{\varrho_k}(\xi, \tilde{\xi}), \end{aligned} \tag{4. 5. 1}$$

ahol $k = 1, \ldots, M$ értéke ebben az egész pontban rögzítve lesz. Vezessük be a következő normál függvényt:

$$\bar{\varrho}_k(x, \tilde{x}) = \varrho_k(x, \tilde{x}) - M_{\varrho_k}(\xi, \tilde{\xi}). \tag{4. 5. 2}$$

Akkor (l. (4. 4. 25), (4. 4. 26) és (4. 4. 10)-et)

$$\begin{aligned} \bar{v}_k(\tilde{\omega}) = {} & \sum_{i=1}^{K} \int_X \bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) q_i(x, \tilde{\omega}) p_\xi(dx) + \iint_{X \times \tilde{X} \setminus \bar{F}} \bar{\varrho}_k(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) = \\ & = v_k(\tilde{\omega}) - M_{\varrho_k}(\xi, \tilde{\xi}) \left[\sum_{i=1}^{K} \int_X q_i(x, \tilde{\omega}) p_\xi(dx) + \right. \\ & \left. + p_{\xi\tilde{\xi}}(X \times \tilde{X} \setminus \bar{F}) + 1 - \bar{Q}(\tilde{\omega}) \right] = v_k(\tilde{\omega}) - M_{\varrho_k}(\xi, \tilde{\xi}). \end{aligned} \tag{4. 5. 3}$$

Vezessük be továbbá a következő valószínűségi változókat is:

$$\mu_k(x, \tilde{\omega}) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} \bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) \hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega})). \tag{4. 5. 4}$$

Meghatározásunknak megfelelően a $\zeta_i(\tilde{\omega})$ valószínűségi változók függetlenek, azért a (4. 5. 4) összeg összeadandói független valószínűségi változók. Minthogy

$\zeta_i(\tilde{\omega})$ eloszlása $p_\xi(\cdot)$, ezen összeg egy összeadandójának várható értéke a következő:

$$m_k(x) = M\{\bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))\} =$$

$$= \int_{\tilde{X}} \hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x})\bar{\varrho}_k(x, \tilde{x})p_{\tilde{\xi}}(d\tilde{x}) = \int_{\bar{F}_x} a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x})\bar{\varrho}_k(x, \tilde{x})p_{\tilde{\xi}}(d\tilde{x}). \tag{4. 5. 5}$$

Az $\bar{F}$ halmaz definíciójának megfelelően (l. (4. 4. 1), (4. 4. 4.), (4. 4. 7)-et)

$$|\bar{\varrho}_k(x, \tilde{x})| \leqq \beta, \quad (x, \tilde{x}) \in \bar{F}, \tag{4. 5. 6}$$

azért (4. 4. 9)-ből következik, hogy

$$|\bar{\varrho}_k(x, \tilde{x})\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x})| \leqq \beta \cdot 2^{H(W)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}. \tag{4. 5. 7}$$

Felhasználva ugyanazokat a meggondolásokat, mint a (4. 4. 21) egyenlőtlenség levezetésében, azt kapjuk, hogy tetszőleges $x \in X$-re:

$$\tilde{P}\{|\mu_k(x, \tilde{\omega}) - m_k(x)| > \delta\} \leqq \frac{\beta^2 2^{H(W)\left(1+\frac{3\varepsilon}{4}\right)}}{\delta^2 K}. \tag{4. 5. 8}$$

Ha most H_k-val jelöljük az $(x, \tilde{\omega})$ pontok következőképp definiált halmazát:

$$H_k = \{|\mu_k(x, \tilde{\omega}) - m_k(x)| > \delta\}, \tag{4. 5. 9}$$

akkor (4. 5. 8)-ból levezethetjük a

$$p_\xi \times \tilde{P}\{H_k\} \leqq \frac{\beta^2 \cdot 2^{H(W)\left(1+\frac{3\varepsilon}{4}\right)}}{\delta^2 K} \tag{4. 5. 10}$$

egyenlőtlenséget. Megjegyezzük továbbá, hogy alkalmazva (4. 5. 5)-öt, FUBINI tételét és (4. 4. 8)-at, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_X m_k(x)p_\xi(dx) &= \int_X M\{\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))\bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))\}p_\xi(dx) = \\ &= M\left\{\int_X \hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))\bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))p_\xi(dx)\right\} = \\ &= \int_X \int_{\tilde{X}} \hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x})\bar{\varrho}_k(x, \tilde{x})p_\xi \times p_{\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) = \\ &= \iint_{\bar{F}} a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x})\bar{\varrho}_k(x, \tilde{x})p_\xi(dx)p_{\tilde{\xi}}(d\tilde{x}) = \iint_{\bar{F}} \bar{\varrho}_k(x, \tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}). \end{aligned} \tag{4. 5. 11}$$

Minthogy

$$\iint_{X \times \tilde{X}} \bar{\varrho}_k(x, \tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) = M\bar{\varrho}_k(\xi, \tilde{\xi}) = 0, \tag{4. 5. 12}$$

azért (l. (4. 5. 3) és (4. 5. 11)-et)

$$\bar{v}_k(\tilde{\omega}) = \sum_{i=1}^{K} \int_X \bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))q_i(x, \tilde{\omega})p_\xi(dx) -$$

(4. 5. 13)

$$- \iint_{\tilde{F}} \bar{\varrho}_k(x, \tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) = \int_X \left(\sum_{i=1}^{K} \bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))q_i(x, \tilde{\omega}) - m_k(x) \right) p_\xi(dx).$$

Most felső becslést akarunk adni az $M|\bar{v}_k(\tilde{\omega})|$ mennyiségre.

$$M|\bar{v}_k(\tilde{\omega})| \leqq \iint_{X\times\tilde{\Omega}} \left| \sum_{i=1}^{K} \bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))q_i(x, \tilde{\omega}) - m_k(x) \right| p_\xi \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) \leqq$$

$$\leqq \iint_{X\times\tilde{\Omega}\setminus(C\cup H_k)} |\mu_k(x, \tilde{\omega}) - m_k(x)|\, p_\xi \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) +$$

(4. 5. 14)

$$+ \iint_{X\times\tilde{\Omega}\setminus(C\cup H_k)} \left| \sum_{i=1}^{K} \bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))q_i(x, \tilde{\omega}) - \mu_k(x, \tilde{\omega}) \right| p_\xi \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) +$$

$$+ \iint_{C\cup H_k} \left| \sum_{i=1}^{K} \bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))q_i(x, \tilde{\omega}) \right| p_\xi \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) +$$

$$+ \iint_{C\cup H_k} |m_k(x)|\, p_\xi \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}).$$

Rendre becsülni fogjuk a (4. 5. 14) egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő összeadandókat. A H_k halmaz definíciójából közvetlenül következik, hogy (l. (4. 5. 9)-et)

(4. 5. 15)

$$\iint_{X\times\tilde{\Omega}\setminus(C\cup H_k)} |\mu_k(x, \tilde{\omega}) - m_k(x)|\, p_\xi \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) \leqq \delta.$$

Ahhoz, hogy a (4. 5. 14) összeg második tagját becsülhessük, először is megjegyezzük, hogy (l. (4. 4. 13)-at)

(4. 5. 16)

$$\frac{\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))}{K} - q_i(x, \tilde{\omega}) = \frac{\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))}{K} \frac{\gamma}{1 - \bar{r}(x) + \gamma}, \qquad (x, \tilde{\omega}) \notin C.$$

(4. 5. 16) és (4. 5. 4)-ből

$$\mu_k(x, \tilde{\omega}) - \sum_{i=1}^{K} \bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))q_i(x, \tilde{\omega}) =$$

(4. 5. 17)

$$= \sum_{i=1}^{K} \bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) \left[\frac{\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))}{K} - q_i(x, \tilde{\omega}) \right] =$$

$$= \frac{\gamma}{1 - \bar{r}(x) + \gamma} \sum_{i=1}^{K} \frac{\hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))\bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))}{K} = \frac{\gamma}{1 - \bar{r}(x) + \gamma} \mu_k(x, \tilde{\omega}), \qquad (x, \tilde{\omega}) \notin C.$$

(4. 5. 17) és (4. 5. 9)-ből következik, hogy

$$\iint\limits_{X\times\tilde{\Omega}\setminus(C\cup H_k)} \left|\sum_{i=1}^{K} \bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))q_i(x, \tilde{\omega}) - \mu_k(x, \tilde{\omega})\right| p_\xi \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) \leqq$$

$$\leqq \gamma \iint\limits_{X\times\tilde{\Omega}\setminus(C\cup H_k)} \frac{|\mu_k(x, \tilde{\omega})|}{1-\bar{r}(x)+\gamma} p_\xi \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) \leqq \tag{4. 5. 18}$$

$$\leqq \gamma \iint\limits_{X\times\tilde{\Omega}} \frac{\delta+|m_k(x)|}{1-\bar{r}(x)+\gamma} p_\xi \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) \leqq \gamma \int\limits_X \frac{\delta+|m_k(x)|}{\gamma+1-\bar{r}(x)} p_\xi(dx).$$

Felhasználva a (4. 5. 6) egyenlőtlenséget, a (4. 5. 5) definíciót és a (4. 4. 17) egyenlőséget, azt kapjuk, hogy a p_ξ mérték szerint majdnem minden $x \in X$ értékre:

$$|m_k(x)| = \left|\int\limits_{\bar{F}_x} a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x})\bar{\varrho}_k(x, \tilde{x})\, p_{\tilde{\xi}}(d\tilde{x})\right| \leqq$$

$$\leqq \beta \int\limits_{\bar{F}_x} a_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x})p_{\tilde{\xi}}(d\tilde{x}) = \beta[1-\bar{r}(x)]. \tag{4. 5. 19}$$

Ezért majdnem minden $x \in X$-re

$$\frac{\delta+|m_k(x)|}{\gamma+1-\bar{r}(x)} \leqq \frac{\delta+\beta[1-\bar{r}(x)]}{\gamma+[1-\bar{r}(x)]} = \frac{\delta}{\gamma+[1-\bar{r}(x)]} + \beta\frac{1-\bar{r}(x)}{\gamma+1-\bar{r}(x)} \leqq \frac{\delta}{\gamma}+\beta. \tag{4. 5. 20}$$

Alkalmazva (4. 5. 20) és (4. 5. 18)-at, megállapíthatjuk, hogy

$$\iint\limits_{X\times\tilde{\Omega}\setminus(C\cup H_k)} \left|\sum_{i=1}^{K} \bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))q_i(x, \tilde{\omega}) - \mu_k(x, \tilde{\omega})\right| p_\xi \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) \leqq$$

$$\leqq \gamma\left(\frac{\delta}{\gamma}+\beta\right)\int\limits_X p_\xi(dx) = \delta+\gamma\beta. \tag{4. 5. 21}$$

Foglalkozzunk most a (4. 5. 14) összeg harmadik tagjával. Megjegyezzük, hogy a (4. 4. 8) és a (4. 4. 13) definíciók értelmében

$$q_i(x, \tilde{\omega}) = \hat{a}_{\xi\tilde{\xi}}(x, \zeta_i(\tilde{\omega})) = 0, \quad \text{ha} \quad |\bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))| > \beta. \tag{4. 5. 22}$$

Minthogy $\sum_{i=1}^{K} q_i(x, \tilde{\omega}) \leqq 1$ (l. (4. 4. 14)-et), azért (4. 5. 22)-ből következik, hogy

$$\left|\sum_{i=1}^{K} \bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))q_i(x, \tilde{\omega})\right| \leqq \beta. \tag{4. 5. 23}$$

Mármost (4. 5. 23), (4. 5. 10) és (4. 4. 22)-ből következik, hogy

$$\tag{4. 5. 24} \begin{aligned} &\iint\limits_{C \cup H_k} \left| \sum_{i=1}^{K} \bar{\varrho}_k(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))q_i(x, \tilde{\omega}) \right| p_\xi \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) \leqq \\ &\leqq \beta[p_\xi \times \tilde{P}(C) + p_\xi \times \tilde{P}(H_k)] \leqq \beta \left[\frac{2^{H(W)\left(1+\frac{3\varepsilon}{4}\right)}}{K\gamma^2} + \frac{\beta^2 \cdot 2^{H(W)\left(1+\frac{3\varepsilon}{4}\right)}}{K\delta^2} \right]. \end{aligned}$$

Végül (4. 5. 19), (4. 5. 10) és (4. 4. 22)-ből kapjuk, hogy

$$\tag{4. 5. 25} \iint\limits_{C \cup H_k} |m_k(x)| \, p_\xi \times \tilde{P}(dx, d\tilde{\omega}) \leqq \beta \left[\frac{2^{H(W)\left(1+\frac{3\varepsilon}{4}\right)}}{K\gamma^2} + \frac{\beta^2 \cdot 2^{H(W)\left(1+\frac{3\varepsilon}{4}\right)}}{K\delta^2} \right].$$

Egybevetve mármost a (4. 5. 14), (4. 5. 15), (4. 5. 21), (4. 5. 24), (4. 5. 25) egyenlőtlenségeket, megállapíthatjuk, hogy

$$\tag{4. 5. 26} M|\bar{v}_k(\tilde{\omega})| \leqq 2\delta + \gamma\beta + 2 \frac{\beta \cdot 2^{H(W)\left(1+\frac{3\varepsilon}{4}\right)}}{K} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\beta^2}{\delta^2} \right).$$

Ezt a becslést a következő pontban használjuk fel.

4. 6. A közleményekre vonatkozó alaplemma bizonyításának befejezése

Emlékezzünk most vissza arra, hogy a korábbi pontokban rögzített összes mennyiségek a t indextől függtek. A β, γ, δ számoknak, amelyeket a megelőző pontokban tetszőlegeseknek tekintettünk, adjuk most a következő konkrét értékeket:

$$\tag{4. 6. 1} \left. \begin{aligned} \beta^t &= 2^{H^t(W)\frac{\varepsilon}{200}}, \\ \gamma^t &= 2^{-H^t(W)\frac{\varepsilon}{100}}, \\ \delta^t &= 2^{-H^t(W)\frac{\varepsilon}{100}}. \end{aligned} \right\}$$

Az (1. 7. 5) és (1. 7. 12) feltételekből, amelyeket lemmánkban kikötöttünk, valamint (4. 6. 1)-ből következik, hogy elég nagy t értékekre

$$\tag{4. 6. 2} \frac{M^t c^t}{(\beta^t)^{1+h}} \leqq 2^{-H^t(W)\frac{\varepsilon}{500}}.$$

A (4. 1. 3), (4. 6. 1) definíciókból, a (4. 6. 2) egyenlőtlenségből, a $H^t(W) \to \infty$ feltételből és a (4. 4. 29) egyenlőtlenségből levezethető, hogy minden elegendően nagy t-re

$$\tag{4. 6. 3} MQ^t(\tilde{\omega}) \geqq 1 - 2^{-H^t(W)\frac{\varepsilon}{1000}}.$$

Továbbá, a (4. 1. 3) definícióból, a (4. 6. 1) definícióból és a (4. 5. 26) becslésből következik, hogy minden elegendően nagy t-re

$$M|\bar{v}_k^t(\tilde{\omega})| \leq 2^{-H^t(W)\frac{\varepsilon}{1000}}. \tag{4. 6. 4}$$

Megjegyezzük, hogy a (4. 5. 1) és (4. 5. 3) definícióknak megfelelően

$$\begin{aligned}\bar{v}_k^t(\tilde{\omega}) &= v_k^t(\tilde{\omega}) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}) = \sum_{i=1}^{K^t} \int\limits_{X^t} \varrho_k^t(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))q_i^t(x, \tilde{\omega})p_\xi^t(dx) + \\ &+ \iint\limits_{X^t \times \tilde{X}^t \setminus \bar{F}_\varepsilon^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) + [1 - \bar{Q}^t(\tilde{\omega})]M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}).\end{aligned} \tag{4. 6. 5}$$

Vegyük észre azt is, hogy

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{X^t \times \tilde{X}^t \setminus \bar{F}_\varepsilon^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) + [1 - \bar{Q}^t(\tilde{\omega})]M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}) = \\ &= \iint\limits_{X^t \times \tilde{X}^t \setminus \bar{F}_\varepsilon^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) + [1 - Q^t(\tilde{\omega})]M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}) + \\ &+ \iint\limits_{F_\varepsilon^t \times \bar{F}_\varepsilon^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) + [Q^t(\tilde{\omega}) - \bar{Q}^t(\tilde{\omega})]M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}).\end{aligned} \tag{4. 6. 6}$$

Minthogy a (4. 4. 28), (4. 4. 25), (4. 4. 10), (4. 1. 2) definíciók következtében

$$\begin{aligned}Q^t(\tilde{\omega}) - \bar{Q}^t(\tilde{\omega}) &= \int\limits_{X^t} [r^t(x) - \bar{r}^t(x)]p_\xi^t(dx) = \\ &= -\int\limits_{X^t} P^t\{(\xi, \tilde{\xi}) \in F_\varepsilon \setminus \bar{F}_\varepsilon / \xi = x\} p_\xi^t(dx) = -\iint\limits_{F_\varepsilon^t \setminus \bar{F}_\varepsilon^t} p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}),\end{aligned} \tag{4. 6. 7}$$

tehát (4. 6. 6) járulékos tagjára fennáll, hogy

$$\begin{aligned}&\left| \iint\limits_{F_\varepsilon^t \setminus \bar{F}_\varepsilon^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) + [Q^t(\tilde{\omega}) - \bar{Q}^t(\tilde{\omega})]M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}) \right| = \\ &= \left| \iint\limits_{F_\varepsilon^t \setminus \bar{F}_\varepsilon^t} [\varrho_k^t(x, \tilde{x}) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi})]p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) \right| \leq \frac{c^t(M^t + 1)}{(\beta^t)^b}.\end{aligned} \tag{4. 6. 8}$$

Ezért (4. 6. 5), (4. 6. 6.), (4. 6. 8) és (4. 6. 4)-ből következik, hogy minden elegendően nagy t-re, — bevezetve a

$$S_k^t(\tilde{\omega}) = \sum_{i=1}^{K^t} \int_{X^t} \varrho_k^t(x, \zeta_i(\tilde{\omega}))q_i^t(x, \tilde{\omega})p_\xi^t(dx) + \tag{4.6.9}$$
$$+ \iint_{X^t\times\tilde{X}^t\setminus F_\varepsilon^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) + [1 - Q^t(\tilde{\omega})]M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi})$$

mennyiségeket és az $M|S_k^t(\omega) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi})|$ várható értékeket képezve,

$$M|S_k^t(\tilde{\omega}) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi})| \leqq M|\tilde{\nu}_k^t(\tilde{\omega})| + \frac{c^t(M^t+1)}{(\beta^t)^b} \leqq 2^{-\frac{H^t(W)a\varepsilon}{2000}}, \tag{4.6.10}$$

ahol $a = \min(b, 1)$. (4. 6. 10)-ből és a lemma (1. 7. 5) feltételéből következik, hogy minden elegendően nagy t-re

$$\tilde{P}^t\{\max_{k=1,\dots,M} |S_k(\tilde{\omega}) - M\varrho_k(\xi, \tilde{\xi})| > \varepsilon\} \leqq \frac{1}{4}. \tag{4.6.11}$$

Minthogy a $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ valószínűségi változók sorozata eleget tesz a $\{\overline{W^t}\}$ reprodukálás-pontossági feltételnek, azért a $(M\varrho_1^t(\xi, \tilde{\xi}),\dots, M\varrho_{M^t}^t(\xi, \tilde{\xi}))$ vektorra fennáll:

$$(M\varrho_1^t(\xi, \tilde{\xi}), \dots, M\varrho_{M^t}^t(\xi, \tilde{\xi})) \in \overline{W^t}. \tag{4.6.12}$$

Ezért, a $[\overline{W^t}]_\varepsilon$ halmaz definíciója folytán a (4. 6. 11) egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy minden elegendően nagy t-re

$$\tilde{P}^t\{(S_1(\tilde{\omega}), \dots, S_M(\tilde{\omega})) \in [\overline{W}]_\varepsilon\} \geqq \frac{3}{4}. \tag{4.6.13}$$

A (4. 6. 3) egyenlőtlenségből $\varkappa = \frac{\varepsilon}{2000}$ mellett és minden elegendően nagy t-re következik, hogy

$$\tilde{P}^t\{Q(\tilde{\omega}) \geqq 1 - 2^{-\varkappa H(W)}\} \geqq \frac{3}{4}. \tag{4.6.14}$$

(4. 6. 13) és (4. 6. 14)-ből következik, hogy létezik legalább egy olyan $\tilde{\omega}_0^t$, hogy

$$(S_1^t(\tilde{\omega}_0), \dots, S_{M^t}^t(\tilde{\omega}_0)) \in [\overline{W^t}]_\varepsilon, \quad Q^t(\tilde{\omega}_0) \geqq 1 - 2^{\varkappa H^t(W)} \tag{4.6.15}$$

egyidejűleg fennáll. Legyen most

$$\tilde{x}_i^t = \zeta_i^t(\tilde{\omega}_0), \quad q_i^t(x) = q_i^t(x, \tilde{\omega}_0), \tag{4.6.16}$$

akkor oly változók rendszerét kapjuk, amelyek eleget tesznek a közleményekre vonatkozó alaplemma feltételeinek.

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1962. I. 10. — Terjedelem: 9 (A/5) ív, 1 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 62-239

Ára: 20,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XII. KÖTET 2. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1962

// A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XII. kötet 2. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

EGY MEGFIGYELÉSSOROZAT KIEMELKEDŐ ELEMEIRŐL

Írta: RÉNYI ALFRÉD

Bevezetés

Végezzünk független megfigyeléseket egy véletlentől függő mennyiségre vonatkozólag. Legyen ξ_k ($k=1, 2,\ldots$) a k-adik megfigyelés. Más szóval tegyük fel, hogy a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak. Közös eloszlásfüggvényüket jelölje $F(x)$. Tegyük fel, hogy $F(x)$ x minden értékére folytonos (vagyis, hogy a ξ_k változók minden x valós értéket 0 valószínűséggel vesznek fel). Más szóval: vegyünk egy végtelen mintát egy folytonos eloszlású sokaságból és legyen ξ_k a minta k-adik eleme. Nevezzük a ξ_k megfigyelést a megfigyeléssorozat *kiemelkedő elem*ének, ha $\xi_k > \xi_j$ midőn $j<k$. Más szóval kiemelkedőnek nevezünk egy megfigyelést, ha az az összes megelőző megfigyeléseknél nagyobb. E definíció szerint ξ_1 mindig (triviálisan) kiemelkedő. Legyen $\nu_0=1$; jelölje ν_1 az első 1-nél nagyobb sorszámú (tehát az első nem triviális) kiemelkedő megfigyelés sorszámát, ν_2 az első ν_1-nél nagyobb (tehát a második nemtriviális) kiemelkedő elem sorszáma és általában jelölje ν_n az n-edik nemtriviális kiemelkedő elem sorszámát ($n=1, 2, 3,\ldots$). E dolgozat tárgyát a ν_n valószínűségi változókra vonatkozó határérték- és határeloszlástételek vizsgálata képezi.

Mielőtt a ν_n ($n=1, 2, 3, \ldots$) valószínűségi változó-sorozatra vonatkozó tételeket kimondanók, néhány általános jellegű megállapítást kívánunk tenni. Először is nyilvánvaló, hogy a ν_n változók viselkedése nem függhet az $F(x)$ eloszlásfüggvénytől. Ugyanis, ha ξ_{ν_n} a ξ_k sorozatnak n-edik kiemelkedő eleme, akkor $F(\xi_{\nu_n})$ az $F(\xi_k)$ sorozatnak ugyancsak n-edik kiemelkedő eleme. Mivel azonban az $F(\xi_k)$ ($k=1, 2, \ldots$) változók egyenletes eloszlásúak a (0, 1) intervallumban, tehát a ξ_k változókról az általánosság megszorítása nélkül eleve feltehetjük, hogy azok egyenletes eloszlásúak a (0, 1) intervallumban. Az ezen feltevés mellett a ν_n változókra bebizonyított határeloszlástételek e feltevés nélkül is érvényesek lesznek az $F(x)$ folytonos eloszlásfüggvény bármely választása mellett. A ν_n változó sorozat tulajdonságai tehát „eloszlásmentesek". Ebből következik, hogy minden olyan statisztikai próba, amely a ν_n változók megfigyelésén alapszik, szintén „eloszlásmentes" lesz. Az egész problémakör rokon a rendezett minták elméletével; a rendezett minták elméletének szokásos problematikájától azonban elsősorban abban térünk el, hogy egy *végtelen* megfigyeléssorozatból indulunk ki.

Az 1. §-ban a ν_n változók közötti függőséget vizsgáljuk, és kimutatjuk, hogy a ν_n változók homogén Markov-láncot alkotnak. A 2. §-ban meghatározzuk annak valószínűségét, hogy a ξ_k sorozat első N eleme között megadott számú kiemelkedő elem legyen. A 3. §-ban bebizonyítjuk azt a meglepő tényt, hogy ha A_k jelöli azt az eseményt, hogy a ξ_k elem kiemelkedő, akkor az A_k ($k=1, 2, 3, \ldots$) események teljesen függetlenek (annak ellenére, hogy A_k a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ változók mindegyikétől függ). Ez a tény alkotja az alapját az összes további vizsgálatainknak. E tényből az 1. és 2. §. eredményeire is adódik egy újabb bizonyítás. Bebizonyítjuk, hogy 1 valószínűséggel $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{v_n}=e$; ez felfogható, mint a nagy számok erős törvénye a $\log\frac{v_n}{v_{n-1}}$ gyengén függő változókra vonatkozólag.

Az 5. §-ban bebizonyítjuk, hogy $\log v_n$ határértékben normális eloszlású n várható értékkel és $\sqrt{n}$ szórással; ez felfogható mint a $\log\frac{v_n}{v_{n-1}}$ gyengén függő változókra vonatkozó centrális határeloszlástétel. A 6. § a v_n változókra vonatkozó iterált logaritmus tétellel foglalkozik, míg a 7. §-ban bizonyos, a v_n változók és permutációk ciklusok szorzatakénti előállítása közötti érdekes összefüggésekre mutatunk rá. Végül a 8. §-ban a v_n változók és a valós számok módosított Engel-féle sorral történő előállítása közötti meglepő összefüggést vizsgáljuk.

1. §. A kiemelkedő elemek sorszámának együttes eloszlása

Bebizonyítjuk, hogy a v_n változók homogén Markov-láncot alkotnak és egyben meghatározzuk ennek a Markov-láncnak az átmenet-valószínűségeit. Ehhez azonban szükségünk van a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ változók együttes eloszlásának a meghatározására. Mint már a bevezetésben megmutattuk, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a ξ_k változók egyenletes eloszlásúak a (0, 1) intervallumban. Legyen $1<k_1<k_2<\ldots<k_n$, ahol $k_1, k_2, \ldots, k_n$ egész számok. Könnyen belátható, hogy ha[1]

$$G(k_1, \ldots, k_n; x_0, x_1, \ldots, x_n)=\mathbf{P}(v_1=k_1, \ldots, v_n=k_n, \xi_1<x_0, \xi_{k_1}<x_1, \ldots \xi_{k_n}<x_n) \tag{1.1}$$

és

$$g(k_1, \ldots, k_n; x_0, x_1, \ldots, x_n)=\frac{\partial^{n+1}G(k_1, \ldots, k_n; x_0, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_0\partial x_1 \ldots \partial x_n}, \tag{1.2}$$

akkor

$$g(k_1, \ldots, k_n; x_0, x_1, \ldots, x_n)=x_0^{k_1-2}x_1^{k_2-k_1-1} \ldots x_{n-1}^{k_n-k_{n-1}-1}, \tag{1.3}$$

hacsak $0<x_0<x_1<\ldots<x_n$, és így

$$\mathbf{P}(v_1=k_1, \ldots, v_n=k_r)=\int\int_{0<x_0<x_1<\ldots<x_n<1}\cdots\int x_0^{k_1-2}x_1^{k_2-k_1-1} \ldots x_{n-1}^{k_n-k_{n-1}-1}\,dx_0dx_1\ldots dx_n. \tag{1.4}$$

Ennélfogva

$$\mathbf{P}(v_1=k_1, v_2=k_2, \ldots, v_n=k_n)=\frac{1}{(k_1-1)(k_2-1)\ldots(k_{n-1}-1)(k_n-1)k_n}. \tag{1.5}$$

Ilyen módon

$$\mathbf{P}(v_n=k_n|v_1=k_1, \ldots, v_{n-1}=k_{n-1})=\frac{k_{n-1}}{(k_n-1)k_n}. \tag{1.6}$$

[1] Itt és a következőkben $\mathbf{P}(\ldots)$ mindig a zárójelben álló esemény valószínűségét jelöli.

(1. 6)-ból leolvasható, hogy a ν_n $(n=0, 1, \ldots)$ változók homogén Markov-láncot alkotnak, melynek átmenetvalószínűségei

$$\mathbf{P}(\nu_n=k|\nu_{n-1}=l)=\frac{l}{(k-1)k}, \quad \text{ha} \quad k\geqq l+1\geqq n+1, \quad \text{és } n=1, 2, 3, \ldots. \tag{1.7}$$

Speciálisan, ha $n=1$ (mivel $\nu_0\equiv 1$) (1. 7)-ből következik, hogy

$$\mathbf{P}(\nu_1=k)=\frac{1}{(k-1)k}, \quad \text{ha} \quad k\geqq 2. \tag{1.8}$$

(1. 8)-ból leolvasható, hogy ν_1 *várható értéke végtelen nagy*. Erre a paradox tényre először S. S. WILKS [12] mutatott rá, részletesebben pedig E. J. GUMBEL [13] elemezte.

(1. 5) és (1. 7) alapján megválaszolható számos, a ν_n sorozatra vonatkozó kérdés. Meghatározhatjuk például ν_n eloszlását. Nyilvánvalóan, ha $k\geqq n+1$, akkor

$$\mathbf{P}(\nu_n=k)=\sum_{1<k_1<k_2<\ldots<k_{n-1}<k}\frac{1}{(k_1-1)(k_2-1)\ldots(k_{n-1}-1)(k-1)k}. \tag{1.9}$$

Határozzuk most meg rögzített $k\geqq 2$ mellett a $\mathbf{P}(\nu_n=k)$ $(n=1, 2, \ldots, k-1)$ számsorozat generátorfüggvényét, vagyis a

$$G_k(z)=\sum_{n=1}^{k-1}\mathbf{P}(\nu_n=k)z^n \qquad (k=2, 3, \ldots) \tag{1.10}$$

polinomot.

Könnyen belátható, hogy

$$G_k(z)=\frac{z}{k(k-1)}\prod_{j=1}^{k-2}\left(1+\frac{z}{j}\right)=(-1)^k\frac{\binom{1-z}{k}}{z-1}. \tag{1.11}$$

Nyilvánvaló, hogy

$$G_k(1)=\sum_{n=1}^{k-1}\mathbf{P}(\nu_n=k) \tag{1.12}$$

annak a valószínűsége, hogy a k szám előforduljon a ν_n számsorozatban. (1. 11)-ből

$$G_k(1)=\frac{1}{k(k-1)}\prod_{j=1}^{k-2}\left(\frac{j+1}{j}\right)=\frac{1}{k}. \tag{1.13}$$

Fennáll tehát a következő

1. LEMMA. *Annak valószínűsége, hogy egy folytonos eloszlású sokaságból vett végtelen minta k-adik eleme kiemelkedő legyen,* $\frac{1}{k}$*-val egyenlő.*

Az (1. 11) összefüggésből kiindulva meghatározhatjuk bármely rögzített n-re a $\mathbf{P}(\nu_n=k)$ $(k=n+1, n+2, \ldots)$ számsorozat generátorfüggvényét is.

Legyen

$$H(z, w)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbf{P}(\nu_n=k)z^n w^k, \tag{1.14}$$

akkor

(1.15) $$H(z,w)=w+\sum_{k=2}^{\infty}G_k(z)w^k=\frac{(1-w)^{1-z}-1}{z-1}.$$

Ennélfogva

$$H(z,w)=\left(\frac{1-w}{z-1}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n\left(\log\frac{1}{1-w}\right)^n}{n!}-\frac{1}{z-1},$$

tehát, ha $n\geqq 1$,

(1.16) $$\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbf{P}(\nu_n=k)w^k=(w-1)\sum_{l=0}^{n}\frac{\left(\log\frac{1}{1-w}\right)^l}{l!}+1.$$

2. §. A kiemelkedő elemek számának eloszlása megadott elemszámú megfigyeléssorozatban

E §-ban a következő kérdéssel foglalkozunk: Jelölje μ_N a $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N$ sorozatban a kiemelkedő elemek számát; meghatározandó μ_N eloszlása. (1. 1)-hez hasonlóan belátható, hogy ha $1<k_1<k_2<\ldots<k_n\leqq N$, midőn $k_1,k_2,\ldots,k_n$ egész számok, és

(2.1) $$G_N(k_1,\ldots,k_n;\,x_0,x_1,\ldots,x_n)=$$
$$=\mathbf{P}(\nu_1=k_1,\ldots,\nu_n=k_n,\nu_{n+1}>N,\,\xi_1<x_0\xi_{\nu_1},<x_1,\ldots,\xi_{\nu_n}<x_n)$$

és

(2.2) $$g_N(k_1,\ldots,k_n;\,x_0,\ldots,x_n)=\frac{\partial^{n+1}G_N(k_1,\ldots,k_n;\,x_0,x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_0\partial x_1\ldots\partial x_n},$$

akkor

(2.3) $$g_N(k_1,\ldots,k_n;\,x_0,\ldots,x_n)=x_0^{k_1-2}x_1^{k_2-k_1-1}\ldots x_{n-1}^{k_n-k_{n-1}-1}x_n^{N-k_n},$$

ha $0<x_0<x_1<\ldots<x_n$. Ebből következik, hogy ha $1<k_1<k_2<\ldots<k_n\leqq N$, akkor

(2.4) $$\mathbf{P}(\nu_1=k_1,\ldots,\nu_n=k_n,\nu_{n+1}>N)=\frac{1}{(k_1-1)(k_2-1)\ldots(k_n-1)N}.$$

Ennélfogva, ha

(2.5) $$Q_N(n)=\mathbf{P}(\mu_N=n),$$

akkor $Q_1(1)=1$ és ha $N\geqq 2$,

(2.6) $$Q_N(n)=\frac{1}{N}\sum_{1<k_1<k_2<\ldots<k_n\leqq N}\frac{1}{(k_1-1)(k_2-1)\ldots(k_n-1)}\qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

és így

(2.7) $$H_N(x)=\sum_{n=1}^{N}Q_N(n)x^n=\frac{x}{N}\prod_{r=1}^{N-1}\left(1+\frac{x}{r}\right).$$

Ezzel meghatároztuk μ_N generátorfüggvényét. Nyilván fennáll a következő azonosság:

$$H_N(x)=\prod_{l=1}^{N}\left(1+\frac{x-1}{l}\right). \tag{2.8}$$

Ennek alapján kiszámíthatjuk μ_N momentumait. (2. 7)-ből, $\mathbf{M}(\zeta)$-val jelölve egy ζ valószínűségi változó várható értékét és $\mathbf{D}(\zeta)$-val a szórását,

$$\mathbf{M}(\mu_N)=\sum_{s=1}^{N}\frac{1}{s} \tag{2.9}$$

és

$$\mathbf{D}^2(\mu_N)=\sum_{s=1}^{N}\frac{1}{s}-\sum_{s=1}^{N}\frac{1}{s^2}. \tag{2.10}$$

Ilyen módon

$$\mathbf{M}(\mu_N)=\log N+O(1) \tag{2.11}$$

és

$$\mathbf{D}^2(\mu_N)=\log N+O(1). \tag{2.12}$$

Hasonlóképpen számíthatók ki μ_N magasabb momentumai is.

A (2. 7) képlet a következő alakban is felírható:

$$H_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{|S_N^{(n)}|x^n}{N!}, \tag{2.13}$$

ahol $S_N^{(n)}$ az elsőfajú Stirling-számokat jelölik (l. [1] 142.). Így tehát

$$Q_N(n)=\frac{|S_N^{(n)}|}{N!}. \tag{2.14}$$

Ilyen módon az elsőfajú Stirling-számok egyszerű valószínűségszámítási értelmezését nyertük. (A Stirling-számok egy (bonyolultabb) valószínűségszámítási interpretációját lásd [1] 166—167.)

3. §. A különböző megfigyelések kiemelkedő voltának függetlensége

Jelölje A_k azt az eseményt, hogy egy folytonos eloszlású sokaságból vett végtelen minta k-adik eleme kiemelkedő legyen. E §-ban a következő egyszerű, de alapvető tényt bizonyítjuk be

2. LEMMA. *Ha A_k $(k=1, 2, \ldots)$ jelöli azt az eseményt, hogy egy folytonos eloszlású sokaságból vett minta k-adik eleme kiemelkedő, akkor az $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ események függetlenek.*

E lemmára, annak fontosságára való tekintettel, három különböző bizonyítást adunk.

Első bizonyítás. Ha $1<j_1<j_2<\ldots<j_k$ tetszőleges egész számok, akkor az 1. és 2. §-ban elvégzett meggondolásokhoz hasonlóan adódik, hogy (események szorzatán azok együttes bekövetkezését értve)

$$\mathbf{P}(A_{j_1}A_{j_2}\ldots A_{j_k})=\int\int\ldots\int_{0<x_1<x_2<\ldots<x_k<1} x_1^{j_1-1}x_2^{j_2-j_1-1}\ldots x_k^{j_k-j_{k-1}-1}dx_1dx_2\ldots dx_k \tag{3.1}$$

és így

$$\mathbf{P}(A_{j_1}A_{j_2}\ldots A_{j_k})=\frac{1}{j_1j_2\ldots j_k}, \tag{3.2}$$

mivel továbbá az 1. lemma szerint $P(A_k)=\frac{1}{k}$, tehát

$$\mathbf{P}(A_{j_1}A_{j_2}\ldots A_{j_k})=\mathbf{P}(A_{j_1})\mathbf{P}(A_{j_2})\ldots\mathbf{P}(A_{j_k}). \tag{3.3}$$

Ezzel a 2. lemmát bebizonyítottuk.

Második bizonyítás. Rendezzük el a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változókat nagyság szerint. Legyen közülük a legnagyobb $\xi_{l_1^{(n)}}$, a második legnagyobb $\xi_{l_2^{(n)}}$, és általában jelölje $\xi_{l_r^{(n)}}$ a nagyság szerint r-ediket $(r=1, 2, \ldots, n)$. Az $(l_1^{(n)}, l_2^{(n)}, \ldots, l_n^{(n)})$ számsorozat az $1, 2, \ldots, n$ számok egy permutációja lesz, és mivel a változók feltevés szerint függetlenek és egyforma eloszlásúak, tehát a lehetséges $n!$ permutáció mindegyike ugyanazzal a valószínűséggel, vagyis $\frac{1}{n!}$ valószínűséggel lép fel. A $\mathbf{P}(A_{j_1}A_{j_2}\ldots A_{j_k})$ valószínűség $(1<j_1<j_2<\ldots<j_k)$ tehát kiszámítható oly módon, hogy meghatározzuk, hogy mely $(l_1^{(j_k)}, l_2^{(j_k)}, \ldots, l_{j_k}^{(j_k)})$ permutációk esetében lesznek $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \ldots, \xi_{j_k}$ kiemelkedő tagok és ezt a számot osztjuk $j_k!$-sal. Nyilvánvaló, hogy ahhoz, hogy $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \ldots, \xi_{j_k}$ kiemelkedő tagok legyenek, a következő feltételek teljesülése szükséges és elégséges: a) A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{j_k}$ számok közül ξ_{j_k} legyen a legnagyobb, vagyis $l_1^{(j_k)}=j_k$. b) A $j_k-1, j_k-2, \ldots, j_{k-1}+1$ számok tetszőlegesen helyezkedhetnek el az $(l_1^{(j_k)}, l_2^{(j_k)}, \ldots, l_{j_k}^{(j_k)})$ sorozatban, j_{k-1} viszont az ezek elhelyezése után üresen maradó helyek közül a balról legelsőre kell hogy kerüljön. c) Általában, miután az $r\geqq j_s$ számokat $(1\leqq s\leqq k)$ elhelyeztük, a $j_s-1, j_s-2, \ldots, j_{s-1}+1$ számokat $(j_0=1)$ tetszés szerint helyezhetjük el az üres helyekre; az ezek után még üresen maradó helyek közül a balról legelső helyre kell helyezni a j_{s-1} számot.

A mondottakból következik, hogy a $j_1, j_2, \ldots, j_k$ számok elhelyezése tekintetében soha nincs lehetőség választásra, e számok egyértelműen meghatározott helyre kerülnek; ha azonban $m<j_k$ és $m\neq j_i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$, akkor az m szám elhelyezésére m lehetőség áll fenn. Azon $(l_1^{(j_k)}, l_2^{(j_k)}, \ldots, l_{j_k}^{(j_k)})$ permutációk száma tehát, amelyek létrejötte esetén az $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}$ események bekövetkeznek $\frac{j_k!}{j_1j_2\ldots j_k}$ és így

$$\mathbf{P}(A_{j_1}A_{j_2}\ldots A_{j_k})=\frac{1}{j_1j_2\ldots j_k}. \tag{3.4}$$

Ezzel a 2. lemmára egy újabb bizonyítást nyertünk.

Harmadik bizonyítás. Ismeretes a rendezett minták elméletéből, hogy ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független és egyforma eloszlású valószínűségi változók, akkor ξ_n értéke ugyanakkora, tehát $\frac{1}{n}$ valószínűséggel esik azon n intervallum mindegyikébe, amelyekre a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ változók értékei a valós tengelyt felbontják. Ugyanis annak valószínűsége, hogy ξ_n a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ változók által meghatározott intervallumok közül felülről az l-edikbe essék ($l=1, 2, \ldots, n$, ahol tehát elsőnek nevezzük az $x \geqq \max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ intervallumot és l-ediknek az $x < \min(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ intervallumot) azt jelenti, hogy ξ_n a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sorozatnak nagyság szerint felülről az l-edik eleme, és mivel az $1, 2, \ldots, n$ számoknak $(n-1)!$ olyan permutációja van, amelyben n az l-edik helyen áll, tehát e valószínűség $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Speciálisan tehát $\frac{1}{n}$ annak a valószínűsége, hogy ξ_n kiemelkedő legyen, vagyis $\mathbf{P}(A_n) = \frac{1}{n}$. Ez egyben az 1. lemma egy újabb bizonyítása. Másrészt az említett kombinatorikai meggondolásból az is következik, hogy az A_n esemény feltételes valószínűsége is $\frac{1}{n}$ minden olyan feltétel mellett, amely a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ változóknak pusztán az egymás közötti nagyság szerinti sorrendjére vonatkozik, de e változók értékére nézve megszorítást nem jelent. Ha ugyanis az említett feltételt B-vel jelölve a B esemény a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ változók elvileg lehetséges $(n-1)!$ nagyság szerinti elrendeződése közül $N \leqq (n-1)!$ elrendeződés esetén teljesül, akkor

$$\mathbf{P}(A_n | B) = \frac{N}{Nn} = \frac{1}{n}. \tag{3.5}$$

Ha most B-nek választjuk az $A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_{k-1}}$ eseményt és $n = j_k$, ahol $1 < j_1 < j_2 < \ldots \ldots < j_k$, akkor azonnal adódik a 2. lemma állítása.

A 2. lemmára adott harmadik bizonyítás segítségével bebizonyíthatjuk a 2. lemma következő általánosítását is.

3. LEMMA. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$ egyforma, folytonos eloszlású független valószínűségi változók és jelölje α_k azt, hogy ξ_k a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ számsorozatot nagyság szerint csökkenőleg rendezve el hányadik helyen áll ($k=1, 2, \ldots$). Akkor az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$ valószínűségi változók teljesen függetlenek, $\alpha_1 \equiv 1$, és ha $n=2, 3, \ldots$*

$$\mathbf{P}(\alpha_n = l) = \frac{1}{n} \quad \text{midőn} \quad l = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Bizonyítás. A 3. lemma összes állításának bebizonyításához nyilván elegendő megmutatni, hogy ha $n \geqq 2$ tetszőleges, és továbbá $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszőleges olyan egész számok, melyekre $1 \leqq a_k \leqq k$ ($k=2, 3, \ldots, n$), akkor

$$\mathbf{P}(\alpha_2 = a_2, \alpha_3 = a_3, \ldots \alpha_n = a_n) = \frac{1}{n!}. \tag{3.7}$$

Az $a_2, a_3, \ldots, a_n$ számok minden megengedett választása ($1 \leqq a_k \leqq k$; $k=2, 3, \ldots, n$) egyértelműen meghatározza a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ számsorozat nagyság szerinti elrendeződését, tehát a fentiekben $(l_1^{(n)}, l_2^{(n)}, \ldots, l_n^{(n)})$-nel jelölt permutációk közül egy meghatározott permutációnak felel meg; ugyanis a_k pontosan azt adja meg, hogy a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ számokat nagyság szerint csökkenőleg elrendezve, ξ_k-t hány olyan ξ_j előzi meg, amelyre $j < k$. Ebből már a 3. lemma állítása következik.

A 3. lemma nyilvánvaló módon speciális esetként tartalmazza a 2. lemmát, hiszen (1)-ből azonnal adódik, figyelembe véve, hogy n független valószínűségi változó közül bizonyosokat kiválasztva, azok is függetlenek lesznek, hogy

$$(3.8) \qquad \mathbf{P}(A_{j_1}A_{j_2}\dots A_{j_k})=\mathbf{P}(\alpha_{j_1}=j_1, \alpha_{j_2}=j_2, \dots, \alpha_{j_k}=j_k)=\frac{1}{j_1 j_2 \dots j_k}.$$

Ez a 2. lemma egy újabb (negyedik) bizonyításának tekintendő.

Valójában azonban a 2. lemmára adott második, harmadik és negyedik bizonyítás ugyanannak a kombinatorikai gondolatnak a különböző variánsai. Tulajdonképpen tehát a 2. lemmához csak két, lényegében különböző út vezet: beláthatjuk a 2. lemmát analitikusan (l. az első bizonyítást), vagy kombinatorikai meggondolás segítségével.

A 2. lemma segítségével az 1. és 2. § eredményeire új bizonyítások adódnak. Így pl. (1. 5) a következőképpen látható be: ha $l_1, l_2, \dots, l_{k_n-n}$ jelölik az $1, 2, \dots, k_n-1$ sorozat $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$-től különböző tagjait, akkor ($\bar{A}$-sal jelölve az A eseménnyel ellentétes eseményt)

$$(3.9) \qquad \mathbf{P}(\nu_1=k_1, \dots, \nu_n=k_n)=\mathbf{P}(A_{k_1}A_{k_2}\dots A_{k_n}\bar{A}_{l_1}\bar{A}_{l_2}\dots \bar{A}_{l_{k_n-n}})$$

és így

$$(3.10) \qquad \mathbf{P}(\nu_1=k_1, \dots, \nu_n=k_n)=\frac{1}{k_1k_2\dots k_n}\prod_{j=1}^{k_n-n}\left(1-\frac{1}{l_j}\right)=\frac{1}{(k_1-1)\dots(k_n-1)k_n}.$$

Az pedig, hogy a ν_n változók Markov-láncot alkotnak, egyenesen magától értetődővé válik, ugyanis általában igaz, hogy ha az η_k változók függetlenek és egész értékűek, és ν_n jelöli az n-edik olyan k indexet, amelyre $\eta_k=a$, ahol a egy rögzített egész szám, akkor a ν_n változók Markov-láncot alkotnak.

Hasonlóképpen látható be (2. 8) is (és ily módon (2. 6), mert az (2. 8)-ból következik).

Legyen ugyanis

$$(3.11) \qquad \varepsilon_k=\begin{cases} 1, & \text{ha az } A_k \text{ esemény bekövetkezik,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Akkor

$$(3.12) \qquad \mu_N=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_N.$$

Mivel pedig az ε_k változók a 2. lemma szerint függetlenek, tehát μ_N generátorfüggvénye egyenlő az ε_k változók ($k=1, 2, \dots, N$) generátorfüggvényeinek szorzatával. Tekintve, hogy

$$\mathbf{P}(\varepsilon_k=1)=\frac{1}{k} \quad \text{és} \quad \mathbf{P}(\varepsilon_k=0)=1-\frac{1}{k},$$

tehát ε_k generátorfüggvénye $1+\frac{x-1}{k}$ ($k=1, 2, \dots, N$), ennélfogva μ_N generátorfüggvénye

$$(3.13) \qquad H_N(x)=\prod_{k=1}^{N}\left(1+\frac{x-1}{k}\right).$$

4. §. A nagy számok törvénye a kiemelkedő megfigyelésekre vonatkozólag

E §-ban a következő tételt bizonyítjuk be:

1. TÉTEL. *Ha ν_n jelöli egy folytonos sokaságból vett végtelen minta n-edik kiemelkedő elemének sorszámát, akkor* 1 *valószínűséggel*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\nu_n} = e, \tag{4.1}$$

(ahol e a természetes logaritmus alapja).

Bizonyítás. Kiindulunk abból a nyilvánvaló összefüggésből, hogy

$$\mathbf{P}(\nu_n \leqq k) = \mathbf{P}(\mu_k \geqq n) \tag{4.2}$$

és így

$$\mathbf{P}(\nu_n > k) = \mathbf{P}(\mu_k < n). \tag{4.3}$$

Az 1. tétel állításának bebizonyítása céljából válasszunk egy tetszőleges kis ε pozitív számot. Akkor, ha $\{x\}$ jelöli a legkisebb x-nél nem kisebb egész számot,

$$\mathbf{P}(\nu_n > e^{n(1+\varepsilon)}) = \mathbf{P}(\mu_{\{e^{n(1+\varepsilon)}\}} < n) \tag{4.4}$$

és ha $[x]$ jelöli x egész részét, akkor

$$\mathbf{P}(\nu_n \leqq e^{n(1-\varepsilon)} = \mathbf{P}(\mu_{[e^{n(1-\varepsilon)}]} \geqq n). \tag{4.5}$$

Mivel a Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbf{P}(|\mu_N - M(\mu_N)| \geqq \lambda \mathbf{D}(\mu_N)) \leqq \frac{1}{\lambda^2}, \tag{4.6}$$

tehát (2. 12) és (2. 13) miatt

$$\mathbf{P}(|\mu_N - \log N| \geqq \varepsilon \log N) = O\left(\frac{1}{\log N}\right). \tag{4.7}$$

(4. 4)-ből, (4. 5)-ből és (4. 7)-ből következik, hogy

$$\mathbf{P}(\sqrt[n]{\nu_n} > e^{1+\varepsilon}) + \mathbf{P}(\sqrt[n]{\nu_n} < e^{1-\varepsilon}) = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.8}$$

Ilyen módon a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathbf{P}(\sqrt[k^2]{\nu_{k^2}} > e^{1+\varepsilon}) + \mathbf{P}(\sqrt[k^2]{\nu_{k^2}} < e^{1-\varepsilon})\right) \tag{4.9}$$

sor ε minden pozitív értékére konvergens, amiből a Borel—Cantelli lemma (l. [2]) segítségével szokásos meggondolással következik, hogy 1 valószínűséggel

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k^2]{\nu_{k^2}} = e. \tag{4.10}$$

Bevezetve a $\beta_n=\sqrt[n]{v_n}$ jelölést, ha $k^2<n<(k+1)^2$, akkor v_n monotonitása miatt

$$(4.11)\qquad (\beta_{k^2})^{\left(\frac{k}{k+1}\right)^2}<\beta_n<(\beta_{(k+1)^2})^{\left(\frac{k+1}{k}\right)^2},$$

tehát (4. 10)-ből azonnal következik az 1. tétel állítása. Az 1. tétel állítása nyilván kimondható a következő ekvivalens alakban is.

1'. TÉTEL. *Ha μ_N jelenti egy folytonos sokaságból vett végtelen minta első N eleme között a kiemelkedő elemek számát, akkor* 1 *valószínűséggel fennáll a*

$$(4.12)\qquad \lim_{N\to\infty}\frac{\mu_N}{\log N}=1$$

reláció.

Az 1'. tétel speciális esete a nagy számok erős törvénye egy általános alakjának (l. [3], [4], [5]), mely szerint, ha az η_k $(k=1,2,\ldots)$ nemnegatív változók függetlenek, $\mathbf{M}(\eta_k)=M_k$, és $\mathbf{D}(\eta_k)=D_k$, bevezetve továbbá az $A_n=\sum_{k=1}^{n}M_k$ jelölést, teljesülnek a következő feltételek:

a) $$\lim_{n\to\infty}A_n=+\infty$$

és

b) a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n^2}{A_n^2}$ sor konvergens,

akkor 1 valószínűséggel fennál, hogy

$$(4.13)\qquad \lim_{N\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{N}\eta_k}{A_N}=1.$$

E tételt az $\eta_k=\varepsilon_k$ változókra alkalmazva, azonnal adódik az 1' tétel, figyelembe véve, hogy ez esetben $A_N\sim\log N$ és $D_N^2=\frac{1}{N}-\frac{1}{N^2}$, tehát

$$\frac{D_N^2}{A_N^2}\sim\frac{1}{N\log^2 N},$$

vagyis az említett tétel a) és b) feltételei teljesülnek. Megjegyzendő, hogy az 1. tétel fent adott bizonyításának módszere az említett általános tétel bizonyítására is felhasználható.

5. A kiemelkedő elemekre vonatkozó centrális határeloszlástétel

E §-ban a következő tételt bizonyítjuk be:

2. TÉTEL. *Jelölje v_n egy folytonos eloszlású sokaságból vett végtelen minta n-edik kiemelkedő elemét, akkor x minden valós értékére*

$$(5.1)\qquad \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\frac{\log v_n-n}{\sqrt{n}}<x\right)=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Bizonyítás. (4. 2) miatt a 2. tétel állítása ekvivalens a következővel:

2'. TÉTEL. *Ha μ_N jelöli egy folytonos eloszlású sokaságból vett végtelen minta első N eleme között a kiemelkedő elemek számát, akkor x minden valós értékére*

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\mu_N-\log N}{\sqrt{\log N}}<x\right)=\Phi(x). \tag{5. 2}$$

(5. 2) azonban azonnal következik a centrális határeloszlás-tétel Ljapunoff-féle alakjából, (l. [2]) ugyanis

$$\mu_N = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_N,$$

ahol

$$\mathbf{M}(\varepsilon_k)=\frac{1}{k},$$

$$\mathbf{D}^2(\varepsilon_k)=\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}$$

$$\mathbf{M}\left(\left|\varepsilon_k-\frac{1}{k}\right|^3\right)=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{2}{k}+\frac{2}{k^2}\right)\leqq\frac{1}{k},$$

tehát

$$\frac{\sqrt[3]{\sum_{k=1}^{N}\mathbf{M}\left(\left|\varepsilon_k-\frac{1}{k}\right|^3\right)}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N}\mathbf{D}^2(\varepsilon_k)}}=O\left(\frac{1}{\sqrt[6]{\log N}}\right).$$

6. §. A kiemelkedő elemekre vonatkozó iterált-logaritmus tétel

Fennáll a következő

3. TÉTEL. *Ha ν_n jelöli egy folytonos sokaságból vett végtelen minta n-edik kiemelkedő elemének a sorszámát, akkor* 1 *valószínűséggel*

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{\log\nu_n-n}{\sqrt{2n\log\log n}}=+1. \tag{6. 1}$$

és

$$\liminf_{n\to-\infty}\frac{\log\nu_n-n}{\sqrt{2n\log\log n}}=-1. \tag{6. 2}$$

A 3. tétel ugyanis (4. 2) miatt ekvivalens a következővel:

3'. TÉTEL. *Ha μ_N jelöli egy folytonos sokaságból vett végtelen minta első N eleme között a kiemelkedőek számát, akkor* 1 *valószínűséggel*

$$\limsup_{N\to+\infty}\frac{\mu_N-\log N}{\sqrt{2\log N\cdot\log\log\log N}}=+1 \tag{6. 3}$$

és

$$\liminf_{N\to+\infty} \frac{\mu_N - \log N}{\sqrt{2N \log N \cdot \log\log\log N}} = -1. \tag{6.4}$$

Mármost a 3′ tétel egyszerűen annyit jelent, hogy az ε_k $(k=1, 2, \ldots)$ független változókra alkalmazható az iterált logaritmus-tétel, ami abból következik, hogy az ε_k változók összességükben korlátosak és μ_N szórásnégyzete $+\infty$-hez tart (l. [6]).

7. §. Egy véletlen permutáció ciklusai számának eloszlásáról

A μ_N valószínűségi változó felfogható oly módon is, hogy találomra kiválasztjuk az $1, 2, \ldots, N$ számok egy permutációját, (úgy, hogy minden egyes permutáció kiválasztásának valószínűsége ugyanakkora, vagyis $\frac{1}{N!}$ legyen) és megszámoljuk, hogy hány olyan szám van e permutációban, amelyet nem előz meg a permutációban nála nagyobb elem (tehát amely nála nagyobb elemmel nem alkot inverziót) és μ_N-nel jelöljük az ilyen — a továbbiakban kiemelkedőnek nevezett — elemek számát. A μ_N valószínűségi változó eloszlására vonatkozó eredményeink (azaz a (2. 15) explicit formula, a μ_N generátorfüggvényének (2. 8) alatti kifejezése, ennek a képletnek a 3 §-ban adott interpretációja és a 2′ tétel) egyben egy másik, véletlen permutációkra vonatkozó problémára is választ adnak, mégpedig arra, hogy egy véletlen permutáció cikluselőállításában szereplő ciklusok számának mi az eloszlása. Fennáll ugyanis a következő összefüggés:

4. LEMMA. *Jelölje γ_N az $1, 2, \ldots, N$ számok egy találomra kiválasztott permutációja cikluselőállításában szereplő ciklusok számát, és μ_N az $1, 2, \ldots, N$ számok egy találomra kiválasztott permutációja kiemelkedő elemeinek a számát, akkor γ_N és μ_N egyforma eloszlásúak, tehát*

$$\mathbf{P}(\gamma_N = k) = \mathbf{P}(\mu_N = k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{7.1}$$

Bizonyítás. Ahhoz, hogy a 4. lemmát bebizonyítsuk, elegendő megadni N elem permutációi halmazának egy olyan önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését, amelynél egy k ciklusból álló Π permutációnak egy k kiemelkedő elemmel bíró Π' permutáció felel meg. E leképezést a következőképpen nyerjük: állítsuk elő a szóban forgó permutációt ciklusok szorzataként; rendezzük el a ciklusokat oly módon, hogy minden ciklusnak megkeressük a legnagyobb elemét és a ciklusokat úgy írjuk egymás mellé, hogy a ciklusok legnagyobb elemei növekvő sorozatot alkossanak. Ezek után egy-egy cikluson belül rendezzük el az elemeket úgy, hogy a ciklus felírása az abban szereplő legnagyobb számmal kezdődjék. Most már csak annyit kell tennünk, hogy a ciklusokat elhatároló zárójeleket elhagyjuk, és az így kapott számsorozat lesz a Π permutációhoz hozzárendelt Π' permutáció. Például, ha $N=9$ és Π az

$$5\ 1\ 3\ 2\ 7\ 9\ 8\ 4\ 6$$

permutáció, akkor Π ciklusok szorzataként való előállítása a fenti előírások szerint elrendezve

$$\Pi = (3)\,(842157)\,(96)$$

és így Π' a

$$3\ 8\ 4\ 2\ 1\ 5\ 7\ 9\ 6$$

permutáció.

Nyilvánvaló, hogy Π' kiemelkedő elemeinek száma egyenlő lesz Π ciklusai számával, hiszen Π ciklusai legnagyobb elemei és csak azok lesznek a kiemelkedő elemek Π'-ben. A leképezés nyilván kölcsönösen egyértelmű, hiszen Π-nek ciklusok szorzataként való felírása egyértelműen meghatározza Π-t és a ciklusselőállítás felírására vonatkozó utasításaink is teljesen egyértelműek.

Ezzel tehát bebizonyítottuk, hogy γ_N generátorfüggvénye is $H_N(x)$-szel egyenlő (l. (2. 8)) továbbá, hogy γ_N határértékben szintén normális eloszlású $\log N$ várható értékkel és $\sqrt{\log N}$ szórással. A permutációk ciklusszámának eloszlására vonatkozó ezen eredmények már régebben is ismertek voltak (l. pl. [7], [8]); a fentiekből egy újabb bizonyítás adódik ezen eredményekre.

Kézenfekvő feltenni azt a kérdést, hogy annak megfelelően, hogy μ_N-et előállítottuk mint N független valószínűségi változó összegét, lehet-e ennek megfelelően kombinatorikailag interpretálható módon előállítani γ_N-et is mint független valószínűségi változó összegét úgy, hogy a k-adik az 1 értéket $\frac{1}{k}$ valószínűséggel, a 0 értéket $1-\frac{1}{k}$ valószínűséggel vegye fel. Azt, hogy ez valóban lehetséges, már W. FELLER megmutatta (l. [7]).

8. §. Valós számok módosított és közönséges Engel-féle sorral való előállításáról

E §-ban először a következő tételt bizonyítjuk be.

4. TÉTEL. *Vegyünk egy végtelen mintát egy folytonos eloszlású sokaságból és legyenek* $\nu_0=1, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \dots$ *a minta kiemelkedő elemeinek sorszámai. Legyen*

$$\alpha=\frac{1}{\nu_1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\nu_1-1)(\nu_2-1)\dots(\nu_{n-1}-1)\nu_n}. \tag{8. 1}$$

Akkor az α *valószínűségi változó egyenletes eloszlású a* $(0, 1)$ *intervallumban.*

A 4. tétel bizonyításához szükségünk lesz a következő segédtételre

5. LEMMA. *Legyen* x *tetszőleges valós szám a* $(0, 1]$ *balról nyílt, jobbról zárt intervallumban, akkor* x *egyértelműen előállítható az*

$$x=\frac{1}{k_1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(k_1-1)(k_2-1)\dots(k_{n-1}-1)k_n} \tag{8. 2}$$

alakban, ahol $k_1, k_2, \dots, k_n$ *1-nél nagyobb egész számok egy szigorúan növekvő végtelen sorozata, amely a következőképpen határozható meg:* k_1*-nek a legkisebb,* $\frac{1}{x}$*-nél nagyobb számot választjuk, és ha már* $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$ *meg vannak választva,* $(N=2, 3, \dots)$ k_N*-nek a legkisebb olyan egész számot választjuk, amelyre* $\frac{1}{k_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{(k_1-1)(k_2-1)\dots(k_{n-1}-1)k_n}<x.$

1. megjegyzés. A (8. 2) előállítás rokon a valós számok *Engel-féle sor* alakjában való, vagyis

(8. 3) $$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q_1q_2\ldots q_n}$$

alakú előállításával, ahol $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ 1-nél nagyobb egész számok egy *nemcsökkenő* végtelen sorozata: a q_n számokat a következő algoritmus szolgáltatja: q_1 a legkisebb egész szám, amely $\frac{1}{x}$-nél nagyobb, és ha már $q_1, q_2, \ldots, q_{N-1}$ meg vannak választva ($N=2, 3, \ldots$), q_N-nek a legkisebb olyan egész számot választjuk, amelyre $\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{q_1q_2\ldots q_n}<x$. A két eljárás hasonlósága miatt a (8. 2) előállítást az x szám *módosított Engel-féle sor*ának nevezzük.

2. megjegyzés. Ha x racionális szám, akkor x előállítható (8. 2)-höz hasonló *véges* sor alakjában is.

Az 5. lemma bizonyítása. Ha a lemma szerinti algoritmust alkalmazzuk, akkor először is $k_N>k_{N-1}$, ugyanis $\frac{1}{k}+\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}$ miatt, ha $k_N\leqq k_{N-1}$ volna, akkor k_{N-1} helyett eggyel kisebb szám is választható lett volna, ami ellentmond az algoritmus szabályainak; másrészt

(8. 4) $$\left|x-\frac{1}{k_1}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(k_1-1)(k_2-1)\ldots(k_{n-1}-1)k_n}\right|\leqq\frac{1}{(k_1-1)\ldots(k_N-1)k_N}$$

és mivel $k_N>N$, tehát a (8. 4) jobb oldala 0-hoz tart, ha $N\to\infty$, miért is (8. 2) fennáll.

A 4. tétel bizonyítása. Legyen $1<k_1<k_2<\ldots<k_N$,

(8. 5) $$a_N=\frac{1}{k_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{(k_1-1)\ldots(k_{n-1}-1)k_n}$$

és

(8. 6) $$b_N=a_N+\frac{1}{(k_1-1)\ldots(k_N-1)k_N}.$$

Annak valószínűsége, hogy α beleessék az $(a_N, b_N]$ intervallumba, nyilván egyenlő annak valószínűségével, hogy $\nu_1=k_1, \ldots, \nu_N=k_N$ legyen, és így (1. 5) szerint e valószínűség

(8. 7) $$\frac{1}{(k_1-1)\ldots(k_N-1)k_N}=b_N-a_N,$$

vagyis a keresett valószínűség egyenlő az (a_N, b_N) intervallum hosszával. Ebből következik, hogy tetszőleges $(a, b]$ intervallumra $(0\leqq a<b\leqq 1)$

8. 8) $$\mathbf{P}(a<\alpha\leqq b)=b-a,$$

tekintve, hogy minden intervallum előállítható véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok idegen $(a_N, b_N]$ alakú intervallum egyesítéseként. Ezzel a 4. tételt bebizonyítottuk.

A 4. tétel úgy is interpretálható, hogy ha az x számot a $(0, 1]$ intervallumban találomra választjuk, egyenletes eloszlás szerint, és a k_n számsorozatot x (8. 2) alakú előállításával definiáljuk, akkor a k_n $(n=1, 2, \ldots)$ valószínűségi változókra ugyanazok a statisztikus törvényszerűségek érvényesek, mint amelyeket a v_n változókra az 1., 4., 5. és 6. §-ban bebizonyítottunk, tehát például igaz az, hogy annak a valószínűsége, hogy a k pozitív egész szám $(k \geqq 2)$ előforduljon a k_n sorozatban, $\frac{1}{k}$-val egyenlő, hogy majdnem minden x számra $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k_n} = e$, továbbá, hogy ha $E_n(y)$ jelöli azon x számok halmazát $(0 \leqq x \leqq 1)$, amelyekre $\frac{\log k_n - n}{\sqrt{n}} < y$, akkor $E_n(y)$ Lebesgue-mértéke $\Phi(y)$-hoz konvergál, ha $n \to +\infty$, s í. t.

E tételek az Engel-féle sorokra vonatkozó megfelelői ismertek; pl. az, hogy majdnem minden x-re $\lim \sqrt[n]{q_n} = e$, E. BORELtől [9], míg az hogy a $\frac{\log q_n - n}{\sqrt{n}} < y$ egyenlőtlenségnek eleget tevő x számok halmazának Lebesgue-mértéke $\Phi(y)$-hoz konvergál, ha $n \to \infty$, P. LÉVYtől származik [10]. E tételek és ezek bizonyos élesítéseinek részletes bizonyítása a [10] dolgozatban található meg. Jelen dolgozat módszere csekély módosítása útján az említett közönséges Engel-féle sorokra vonatkozó, BORELtől és LÉVYtől származó, továbbá ERDŐS PÁL, SZÜSZ PÉTER és a szerző által talált tételekre új és az eddig ismerteknél lényegesen egyszerűbb bizonyításokat találhatunk.

Jelölje ugyanis $\varepsilon_k(x)$ azt, hogy a k szám *hányszor* fordul elő az x valós szám közönséges Engel-féle sorának nevezői között, tehát a (8. 3) által definiált $q_n = q_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ számsorozatban. Könnyen belátható, hogy ha x a $(0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$\mathbf{P}(\varepsilon_k(x) = r) = \frac{k-1}{k^{r+1}} \qquad (r=0, 1, 2, \ldots) \tag{8.9}$$

(l. [10] 1. tétel). Azt is egyszerűen beláthatjuk továbbá, hogy az $\varepsilon_k(x)$ valószínűségi változók $(k=1, 2, 3, \ldots)$ *függetlenek*. Ugyanis annak a valószínűsége, hogy $q_1(x) = q_1, q_2(x) = q_2, \ldots, q_n(x) = q_n$ legyen (ahol most $q_1, q_2, \ldots, q_n$ pozitív egész számok egy rögzített nemcsökkenő sorozata), nyilvánvalóan

$$\frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_n (q_n - 1)} \tag{8.10}$$

és így annak a valószínűsége, hogy a $q_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ sorozatban a 2 szám r_2-ször, a 3 szám r_3-szor, ..., a k szám (pontosan) r_k-szor forduljon elő,

$$\mathbf{P}(\varepsilon_2 = r_2, \ldots, \varepsilon_k = r_k) = \frac{1}{2^{r_2} 3^{r_3} \ldots k^{r_k} (k-1)} - \frac{1}{2^{r_2} 3^{r_3} \ldots (k-1)^{r_{k-1}} k^{r_k+1} (k-1)}, \tag{8.11}$$

és így

$$\mathbf{P}(\varepsilon_2=r_2,\ldots,\varepsilon_k=r_k)=\prod_{l=2}^{k}\frac{1}{l^{r_l}}=\prod_{l=2}^{k}\frac{l-1}{l^{r_l+1}}, \tag{8.12}$$

tehát (8. 9)-re való tekintettel

$$\mathbf{P}(\varepsilon_2=r_2,\ldots,\varepsilon_k=r_k)=\prod_{l=2}^{k}\mathbf{P}(\varepsilon_l=r_l), \tag{8.13}$$

amiből az $\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k$ változók függetlensége már leolvasható.

Legyen

$$\mu_N(x)=\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k(x), \tag{8.14}$$

vagyis jelölje $\mu_N(x)$ azt, hogy a $q_1(x), q_2(x),\ldots$ sorozatnak hány N-nél nem nagyobb tagja van. Akkor nyilván fennáll a

$$\mathbf{P}(\mu_N(x)\geqq n)=\mathbf{P}(q_n(x)\leqq N) \tag{8.15}$$

azonosság és ennek segítségével belátható, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{q_n(x)}=e \tag{8.16}$$

ekvivalens azzal, hogy

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\mu_N(x)}{\log N}=1. \tag{8.17}$$

Az, hogy (8. 17) majdnem minden x-re fennáll, ugyanúgy következik a nagy számok törvényének a 4. §-ban említett általános alakjából, mint az 1' tétel. Hasonlóképpen látható be a $q_n(x)$-re vonatkozó centrális határeloszlástétel és iterált logaritmustétel (l. [11]) is. Így tehát a megfigyeléssorozatok kiemelkedő elemeire vonatkozó vizsgálataink meglepő módon az Engel-féle sorok elméletének lényeges egyszerűsítéséhez is elvezettek.

Befejezésül még csak egy megjegyzést kívánunk tenni. Jelölje $q_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ az x szám közönséges Engel-féle sorának nevezőit és jelölje k_n^* a nagyság szerint n-edik pozitív egész számot a $q_n(x)$ számsorozatban, vagyis a $q_n(x)$ számsorozatból töröljük az ismétléseket, tehát minden előforduló számot csak egyszer tartsunk meg; akkor a k_n^* számsorozat pontosan ugyanazokkal a statisztikai tulajdonságokkal rendelkezik, mint a módosított Engel-féle sorok k_n nevezői, illetve mint a folytonos sokaságból vett végtelen minta kiemelkedő elemeinek v_n indexei. Így tehát a kiemelkedő mintaelemek elmélete a közönséges Engel-féle sorokkal is közvetlen kapcsolatban áll.

IRODALOM

[1] CH. JORDAN: *Calculus of finite differences*, Budapest, 1939.
[2] RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
[3] M. LOÈVE: *Probability theory*, Van Nostrand, New York, 1955., 238 o.
[4] RÉNYI A.: A számjegyek eloszlása valós számok Cantor-féle előállításaiban, *Matematikai Lapok* 7 (1956) 77–100.
[5] RÉNYI A.: A new axiomatic theory of probability, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **6** (1955) 185–336.
[6] A. KOLMOGOROFF: Über das Gesetz des iterierten Logarithmus, *Math. Ann.* 1927.
[7] W. FELLER: *An introduction to probability theory and its applications*, New York, 1950. Ch. 10. § 7.
[8] J. RIORDAN: *An introduction to combinatorial analysis*, Wiley, New York, 1958., 70–71 o.
[9] É. BOREL: Sur les développements unitaires normaux, *Comptes Rendus* **225** (1947) 51.
[10] P. LÉVY, Remarques sur un théoreme de M. Émile Borel, *Comptes Rendus* **225** (1947) 918–919.
[11] P. ERDŐS, A. RÉNYI, P. SZÜSZ: On Engel's and Sylvester's series, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Math.* **1** (1958) 7–32.
[12] S. S. WILKS: Recurrence of extreme observations, *Journal of the Australian Math. Soc.* **1** (1959) 106–122.
[13] E. J. GUMBEL: The return period of order statistics, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **12** (1961) 249–256.

(Beérkezett: 1962. I. 21.)

SZISZTEMATIKUS HIBÁK KIKÜSZÖBÖLÉSÉNEK EGY MÓDSZERÉRŐL

Írta: CSISZÁR IMRE és DOBÓ ANDOR

Bevezetés

A gyakorlatban számos esetben előfordul, hogy valamely mérés vagy termelési eljárás stb. során fellépő hiba egy esetről esetre változó véletlen hibán kívül valamely beállítási pontatlanságból adódó szisztematikus hibából is származik. Minthogy ezt a szisztematikus hibát magában nem tudjuk megmérni, kiküszöbölése csakis a teljes hibának, azaz a véletlen és rendszeres hiba összegének a megfigyelése alapján történhet. Ez a probléma lép fel például a következő esetekben:

a) Valamely gyártási folyamatnál a gyártott termékeknek az előírt mérettől való eltérése egyrészt a gyártó gép nem teljesen pontos beállításából, másrészt pedig a gyártás folyamata során fellépő véletlen hibákból tevődik össze. Jelöljük az előírt méretet c-vel, a beállítási hibát ξ-vel. Itt a ξ hiba nagysága a véletlentől függ, tehát ξ valószínűségi változó, de a gyártási folyamat egy szakaszában (pl. a gép újabb beállításáig) értéke állandó. A gép tehát a $c+\xi$ méretre van beállítva, ez azonban nem jelenti azt, hogy a gyártott termék minden egyes darabjának az előírt c mérettől való eltérése pontosan ξ lesz, mert a gyártás során esetről esetre változó véletlen hibák is fellépnek. Jelöljük a $c+\xi$ beállítási értéktől való méreteltérést η-val. Ekkor a teljes hiba $\xi+\eta=\zeta$ lesz. A gyártásközi ellenőrzés során a termelt alkatrésznek az előírt c mérettől való eltérését mérjük, azaz a ζ értékeket figyeljük meg s ezek alapján kell következtetnünk arra, hogy a ξ beállítási hiba nem volt-e a megengedhetőnél nagyobb, illetve kell a gép beállítását módosítanunk.

b) Tekintsünk egy skálabeosztással ellátott mutatós műszert; egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a mutató kitérésének nagysága arányos a mért mennyiség értékével. A műszer legyen olyan, hogy a kitérés nagyságát szabályozni tudjuk (de a szabályozás után is megmarad a kitérésnek a mért mennyiség értékével való arányossága). Ha már most ezzel a műszerrel mérést végzünk, akkor a mérési hiba a műszer beállítási hibájából (ξ) és egy véletlen hibából (η) tevődik össze. A beállítási hibát úgy küszöbölhetjük ki, hogy ugyanazt a mennyiséget egy pontos műszerrel is megmérjük, miáltal a $\zeta=\xi+\eta$ értéket, vagyis a teljes mérési hibát határozzuk meg. A ζ-ra vonatkozó megfigyelésekből kell következtetnünk ξ nagyságára és ennek alapján kell a műszer beállítását úgy módosítanunk, hogy a ξ beállítási hiba kiküszöbölődjék.

Tulajdonképpen ez az eset lép fel az órák szabályozásánál is. Itt a mérendő mennyiség az idő. A beállítás hibáját, azaz a szisztematikus késést, ill. sietést a sebességszabályozó kar állításával lehet kiküszöbölni. A szisztematikus hibát azonban tisztán itt sem figyelhetjük meg, a beszabályozást csak a teljes késés, ill. sietés megfigyelése alapján végezhetjük, melynek nagysága a beállítás hibáján kívül véletlenszerű körülményektől (hőmérséklet, levegő páratartalma stb.) is függ.

c) Egy lövegnek valamely célpontra való beállítása úgy történik, hogy a cél távolságát bemérik; minthogy ez a mérés nem teljesen pontos, így a tényleges c távolság helyett valamely $c+\xi$ távolságra történik az irányzás. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy iránybeli hiba nem lép fel. Ekkor a becsapódás helyének a céltól való távolsága $\zeta=\xi+\eta$, ahol η a becsapódás véletlen hibája, amely a légköri viszonyoktól, a lőszer minőségétől stb. függ. A bemérés ξ hibáját közvetlenül nem tudjuk megállapítani, azonban rendszerint mérni lehet a becsapódási helynek a céltól való távolságát, vagyis $\xi+\eta=\zeta$ értékét. Ennek megfigyelése alapján kell következtetnünk ξ nagyságára és ennek megfelelően korrekciót hajtani végre a löveg beállításában.

Mindezekben a példákban az a közös vonás, hogy egy kísérletsorozaton belül állandó ξ hiba hatását mindig úgy kell kiküszöbölnünk, hogy egy $\zeta=\xi+\eta$ valószínűségi változó értékeit figyeljük meg, s ennek alapján becsült ξ értékkel korrigálunk. Ennek során mindig feltételezzük, hogy a valószínűségi változónak tekintett ξ beállítási hiba a priori eloszlása ismeretes. A következőkben ennek a korrekciónak a módjaival foglalkozunk.

A gyakorlatban általában úgy szokás eljárni, hogy a ζ teljes hibát többször mérik, s a mérési eredmények átlagával korrigálják a beállítási értéket. Ennek a módszernek a használata indokolt is abban az esetben, ha a ξ beállítási hiba eloszlásáról semmiféle információnk nincs. Igen gyakran előfordul azonban, hogy előző mérések alapján ξ a priori eloszlása (legalábbis közelítőleg) ismeretes. Természetesen ennek felhasználásával általában a fentinél célravezetőbb korrigálási eljárás is megadható, amennyiben a BAYES-tétel segítségével a korrigálásnál figyelembe vehetjük a korábbi mérések által szolgáltatott (az a priori eloszlás ismeretében megnyilvánuló) információkat is. A beállítási hiba a priori eloszlását figyelembe vevő korrigálási eljárás ipari bevezetése pl. tömeggyártás során számottevő gyakorlati haszonnal járna, minthogy lehetővé tenné a selejtarány csökkenését, a minőség javítását stb.

1. §.

Tegyük fel, hogy valamely mérésnél vagy termelési folyamatnál stb... kétféle hiba lép fel: egy „szisztematikus", beállítási pontatlanságból származó, valamely kísérletsorozaton belül állandó ξ hiba és egy kísérletenként változó η „véletlen" hiba. Tehát a mérés eredménye, illetve a gyártott termék jellemző mérete stb... $\tilde{c}=c+\xi+\eta=c'+\eta$, ahol c a merendő mennyiség tényleges értéke, illetve a gyártott munkadarabok előírt mérete stb., $c'=c+\xi$ pedig c-nek a ξ szisztematikus hibával terhelt értéke, mely a műszer, ill. a gép beállítási pontosságától függ. A továbbiakban c'-t beállítási értéknek fogjuk nevezni. (Itt ξ-t és η-t 0 várható értékű valószínűségi változóknak tekintjük.)

Tegyük fel, hogy mérni tudjuk a $\zeta=\xi+\eta$ teljes hiba értékét és ilyen mérések alapján akarjuk (a mérőműszer, illetve a gyártó gép stb. beállításának módosításával) kiküszöbölni a ξ szisztematikus hibát.

Ez úgy történik, hogy ζ-ra vonatkozóan n megfigyelést végzünk, azaz mérjük a $\zeta_1=\xi+\eta_1$, $\zeta_2=\xi+\eta_2, \ldots, \zeta_n=\xi+\eta_n$ értékeket, ahol $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ függetlenek és egyforma eloszlásúak. Ezt követően a beállítási értéket az

$$m_n=\mathbf{M}(\xi|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \tag{1}$$

értékkel korrigáljuk, azaz

$$c'' = c' - \mathbf{M}(\xi|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \tag{2}$$

lesz az új beállítási érték.

Mint ismeretes, ez a korrekció a legjobb abban az értelemben, hogy $\mathbf{M}((\xi - \xi^*(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n))^2)$

$$\xi^*(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = \mathbf{M}(\xi|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \text{ esetén minimális.}$$

A ξ hiba kiküszöbölése céljából úgy is eljárhatunk, hogy a beállítási értéket nem csak akkor korrigáljuk, amikor már mind az n megfigyelést elvégeztük, hanem minden egyes mérés után azonnal korrekciót hajtunk végre. Az első megfigyelés után, melynek eredménye $\zeta_1' = \xi + \eta_1'$ a korrekció $\mu_1 = \mathbf{M}(\xi|\zeta_1')$.

Ekkor a második megfigyelésnél (mérésnél) a beállítási érték már $c_1' = c' - \mu_1$ lesz és ehhez adódik hozzá az η_2' véletlen hiba. Ily módon a második megfigyeléskor észlelt teljes hiba $\zeta_2' = \xi - \mu_1 + \eta_2'$. Így a beállítási értékre vonatkozó második korrekció

$$\mu_2 = \mathbf{M}(\xi - \mu_1|\zeta_1', \zeta_2')$$

és így tovább. A k-adik megfigyelés a $c_{k-1}' + \eta_k'$ valószínűségi változóra vonatkozik; pontosabban annak a c-től való eltérését észleljük, és a

$$\zeta_k' = c_{k-1}' + \eta_k' - c = \xi - \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i + \eta_k' \tag{3}$$

megfigyelt érték után a beállítási értéket a

$$\mu_k = \mathbf{M}\left(\xi - \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i|\zeta_1', \zeta_2', \ldots, \zeta_k'\right) \tag{4}$$

mennyiséggel korrigáljuk.

Az n-edik megfigyelés után ily módon nyert korrigált beállítási érték

$$c_n' = c' - \sum_{i=1}^{n} \mu_i. \tag{5}$$

Itt felvetődik az a kérdés, hogy az n megfigyelés elvégzése után kapott kétféle korrigált eredmény hogyan viszonylik egymáshoz, ha csak az összes megfigyelés után, illetőleg ha minden megfigyelés után külön-külön korrigálunk.

Erre ad választ a következő, matematikai szempontból egyszerű, de gyakorlatilag fontos tétel:

1. TÉTEL: Valamely c konstans ξ hibával terhelt $c' = c + \xi$ értékét korrigáljuk egyrészt a $c' + \eta_i$ értékeknek c-től való $\zeta_i = \xi + \eta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ eltérésének megfigyelése alapján (tehát az $m_n = \mathbf{M}(\xi|\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)$ értékkel), másrészt pedig úgy, hogy minden egyes megfigyelés után korrigálunk a $\mu_k = \mathbf{M}\left(\xi - \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i|\zeta_1', \zeta_2', \ldots, \zeta_k'\right)$ értékkel, ahol $\zeta_k' = \xi - \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i + \eta_k'$ a $c_{k-1}' + \eta_k'$ mennyiségnek c-től való eltérése

$\left(c'_k = c' - \sum_{i=1}^{k} \mu_i\right)$, mikoris az n megfigyelés utáni teljes korrekció $m'_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$.

Ha $\xi, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ együttes eloszlása megegyezik $\xi, \eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_n$ együttes eloszlásával, akkor a kétféle módon nyert korrigált érték egyforma eloszlású, azaz

$$\mathbf{P}(c'' < x) = \mathbf{P}(c'_n < x). \tag{6}$$

Bizonyítás: A (4) és (5) szerint

$$c'_n = c' - \sum_{i=1}^{n} \mu_i = c' - \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i - \mathbf{M}\left(\xi - \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i | \zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_n\right) = \tag{7}$$
$$= c' - \mathbf{M}(\xi | \zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_n),$$

kihasználva, hogy a μ_i mennyiségek rögzített $\zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_n$ mellett konstansok, tehát

$$\mathbf{M}(\mu_i | \zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_n) = \mu_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{8}$$

Minthogy a $\zeta'_k = \xi + \eta'_k - \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ értékek megadása ekvivalens a $\xi + \eta'_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ értékek megadásával,

$$\mathbf{M}(\xi | \zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_n) = \mathbf{M}(\xi | \xi + \eta'_1, \xi + \eta'_2, \ldots, \xi + \eta'_n). \tag{9}$$

Feltételezésünk szerint $\xi, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ és $\xi, \eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_n$ együttes eloszlása megegyezik, így (9) szerint $\mathbf{M}(\xi | \zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_n)$ és $\mathbf{M}(\xi | \xi + \eta_1, \xi + \eta_2, \ldots, \xi + \eta_n) = \mathbf{M}(\xi | \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ azonos eloszlású.

Ebből (2) és (7) alapján a (6) már következik.

Megjegyzések: a) A bizonyításból következik, hogy ha $\eta'_k = \eta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ akkor $c'' = c'_n$.

b) Ha $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$; $\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_n$ egyforma eloszlásúak és $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, illetőleg $\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_n$ egymástól és ξ-től függetlenek, akkor a tétel állításainak feltétele biztosan teljesül. Gyakorlatilag főképp ez a speciális eset jelentős. Itt ahelyett, hogy $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$; $\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_n$ mind egyforma eloszlásúak, elegendő csak annyit feltenni, hogy az azonos indexű η-ák és η'-k eloszlása egyezik meg.

c) A bizonyított tételből az is következik, hogy az első korrigálást n_1 megfigyelés, a másodikat további n_2 megfigyelés stb. után végezzük $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$, akkor az így kapott korrigált beállítási érték eloszlása is megegyezik c'' és c'_n eloszlásával.

d) A bebizonyított tétel szerint az n megfigyelés utáni korrigált beállítási érték nem függ attól, hogy a korrekciót minden megfigyelés után, bizonyos megfigyeléscsoportok után, ill. csak mind az összes megfigyelés elvégzése után végezzük-e. Jegyezzük meg azonban, hogy gyakorlatilag — hacsak egyéb okok nem szólnak ellene — mégis célszerűbb minden megfigyelés után korrigálni, mert ezáltal a beállítási érték már a teljes megfigyeléssorozat befejezése előtt közelebb kerül a helyes értékhez. Ez azt eredményezi, hogy pl. a bevezetésben említett a) esetben a használható munkadarabok aránya, ill. a c) esetben a találati valószínűség már a korrigálási eljárás befejezése előtt növekszik. Az a) esetben ennek persze elsősorban akkor van jelentősége, ha a korrigálás nem egymás után legyártott munkadarabok alapján történik, hanem pl. minden k-adik darab lemérése alapján.

2. §.

Az 1. §-ban mondottak szerint az n megfigyelés alapján végzett korrekció jósága nem függ attól, hogy az n megfigyelés után egyszerre korrigáltunk-e, vagy pedig minden megfigyelés, illetve bizonyos számú megfigyelések után. Ezért a továbbiakban mondottak bármelyik korrigálási eljárás esetén érvényesek.

Jegyezzük meg, hogy a $\mathbf{M}(\xi|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ mennyiség mint ismeretes ξ-nek általában nem torzítatlan becslése, azaz

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}(\xi|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)|\xi) = \xi \tag{10}$$

általában nem teljesül. A gyakorlatilag fontos esetekben azonban ez a becslés legalábbis aszimptotikusan torzítatlan, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}(\mathbf{M}(\xi|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)|\xi) = \xi. \tag{11}$$

Sőt, ezen túlmenőleg

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}(\xi|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = \xi \tag{12}$$

is teljesül (1 valószínűséggel).

(11) azt mutatja, hogy elég sok megfigyelést végezve a $c' + \eta - c = \zeta = \xi + \eta$ hibára vonatkozólag a beállítási hibát tetszőleges pontossággal ki lehet küszöbölni. Az eddig mondottakat pontosabban az alábbi tétel fejezi ki:

2. TÉTEL: *Ha az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ valószínűségi változók sorozatára érvényes a nagy számok erős törvénye, akkor*

$$1^\circ \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}(\xi|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = \xi$$

$$2^\circ \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{D}^2(\xi|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = 0$$

1 valószínűséggel.

Bizonyítás: Mint ismeretes (l. pl. [2] 332. o.)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}(\xi|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = \mathbf{M}(\xi|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n \ldots). \tag{13}$$

(Bármely $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n \ldots$ valószínűségi változók esetén, ha csak ξ-nek létezik a várható értéke.)

Esetünkben $\zeta_i = \xi + \eta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, tehát ha az η_i sorozatra érvényes a nagy számok erős törvénye, vagyis

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n}{n} = 0\right) = 1 \tag{14}$$

(η-ról feltettük, hogy 0 várható értékű), akkor

$$\mathbf{P}\left(\xi = \lim_{n\to\infty} \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n}{n}\right) = 1. \tag{15}$$

Ez azt jelenti, hogy ξ függvénye a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ sorozatnak, tehát

$$\mathbf{M}(\xi|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n \ldots) = \xi \tag{16}$$

1 valószínűséggel. A (13) és (16)-ból 1° már következik. Ugyanúgy látható be, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}(\xi^2|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = \xi^2 \tag{17}$$

1 valószínűséggel.

A (17) és 1° szerint

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}^2(\xi|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = \lim_{n\to\infty} [\mathbf{M}(\xi^2|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) - (\mathbf{M}(\xi|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n))^2] = \tag{18}$$
$$= \xi^2 - \xi^2 = 0$$

1 valószínűséggel.

3. §.

Az elmondottak gyakorlati alkalmazása szempontjából fontos esetekben feltehető, hogy a ξ hiba és az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ „véletlen hibák" teljesen független valószínűségi változók (0 várható értékkel), ahol az η_i-k $(i = 1, 2, \ldots, n)$ egyforma eloszlásúak $g(y)$ sűrűségfüggvénnyel és ξ-nek is létezik $f(x)$ sűrűségfüggvénye.

Ekkor a BAYES-tétel alapján ξ-nek a $\xi + \eta_1 = z_1, \ldots, \xi + \eta_n = z_n$ feltételek melletti feltételes sűrűségfüggvénye

$$f_n(x|z_1, \ldots, z_n) = \frac{f(x) \prod_{i=1}^{n} g(z_i - x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \prod_{i=1}^{n} g(z_i - x)\, dx} \tag{19}$$

s így

$$\mathbf{M}(\xi|\xi + \eta_1 = z_1, \ldots, \xi + \eta_n = z_n) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \prod_{i=1}^{n} g(z_i - x)\, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \prod_{i=1}^{n} g(z_i - x)\, dx}. \tag{20}$$

Ha tehát a ξ hiba kiküszöbölését n megfigyelés elvégzése után történő korrigálással végezzük, a szükséges m_n korrekciót a (20) formula adja meg.

Ha viszont minden egyes megfigyelés után korrigálunk, akkor (20) alapján a k-adik megfigyelés után szükséges korrekció kifejezése

$$\mu_k = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \prod_{i=1}^{k} g(z_i' + m_{i-1}' - x)\, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \prod_{i=1}^{k} g(z_i' + m_{i-1}' - x)\, dx}, \qquad \left(m_i' = \sum_{j=1}^{i} \mu_j\right) \tag{21}$$

ahol z_i' a ζ_i' megfigyelt értékét jelenti $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Példaképpen tekintsük a mondottaknak azt a speciális esetét, amikor a ξ hiba a priori eloszlása és az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ valószínűségi változók közös eloszlása egyaránt normális, 0 várható értékkel és σ_1, ill. σ_2 szórással. Ez esetben (19)-ből egyszerű számolással adódik, hogy az n megfigyelés után ξ a posteriori eloszlása ugyancsak normális lesz, mégpedig a szórás független attól, hogy melyek voltak a megfigyelt értékek, továbbá, hogy a kísérletsorozatban az egyes kísérletek után végeztünk-e korrekciót, nevezetesen

$$\mathbf{D}^2(\xi|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = \mathbf{D}^2(\xi|\zeta_1', \zeta_2', \ldots, \zeta_n') = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{n\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

(Itt közvetlenül látható, hogy $n \to \infty$ esetén

$$\mathbf{D}^2(\xi|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \to 0$$

minden $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ sorozat esetén. A 2. tételből ennek a relációnak csak az 1 valószínűséggel való fennállása következik.) Az a posteriori eloszlás várható értéke pedig

$$m_n = \mathbf{M}(\xi|\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \frac{1}{n}\sigma_2^2} \cdot \frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n}, \tag{22}$$

ahol $z_1, z_2, \ldots, z_n$ a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ változók megfigyelt értékei (ha a kísérletsorozat közben nem végeztünk korrekciót). Ha pedig minden kísérlet után korrigáltunk, akkor az

$$m_k' = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \frac{1}{k}\sigma_2^2} \cdot \frac{u_1+u_2+\ldots+u_k}{k}, \tag{23}$$

$$u_i = z_i' + m_{i-1}' \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

rekurzív összefüggés által definiált m_n' mennyiség adja ξ feltételes várható értékét, ahol z_k' a ζ_k' valószínűségi változó mért értékét jelenti. A közöltek alapján nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{P}\left(-\frac{\lambda\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{n\sigma_1^2+\sigma_2^2}} < \xi - m_n < \frac{\lambda\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{n\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \,|\zeta_1 = z_1, \zeta_2 = z_2, \ldots, \zeta_n = z_n\right) = 2\Phi(\lambda) - 1,$$

illetve

$$\mathbf{P}\left(-\frac{\lambda\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{n\sigma_1^2+\sigma_2^2}} < \xi - m_n' < \frac{\lambda\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{n\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \,|\zeta_1' = z_1', \zeta_2' = z_2', \ldots, \zeta_n' = z_n'\right) = 2\Phi(\lambda) - 1,$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Ha azt akarjuk, hogy a korrigált beállítási érték adott $2\Phi(\lambda)-1$ valószínűségi szint mellett előírt pontossággal megközelítse a helyes c értéket, vagyis ha megkívánjuk a

$$\mathbf{P}(|\xi-m_n|\leqq a)\geqq 2\Phi(\lambda)-1,$$

illetve a

$$\mathbf{P}(|\xi-m_n'|\leqq a)\geqq 2\Phi(\lambda)-1$$

egyenlőtlenség teljesülését, akkor a fentiekből következik, hogy ehhez $n\geqq\frac{\lambda^2}{a^2}\sigma_2^2-\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2$ számú megfigyelést kell végezni.

Mint ismeretes, ha az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ valószínűségi változók normális eloszlásúak σ_2 szórással és 0 várható értékkel, akkor n elég nagy értékei esetén a ξ hiba maga is közelítőleg normális a posteriori eloszlású $\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n}$ várható értékkel és $\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}$ szórással. (ξ a priori eloszlására tett igen általános feltételek mellett, pl. ha feltesszük, hogy ξ-nek folytonos sűrűségfüggvénye van.) Ez más szóval azt jelenti, hogy a ξ valószínűségi változó feltételes eloszlása n növekedésével egyre kevésbé függ ξ a priori eloszlásától. — Ha ugyanis ξ sűrűségfüggvényét $f(x)$-szel jelöljük, akkor

$$f_n(x|\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n)=\frac{e^{-\frac{n\left(\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n}-x\right)^2}{2\sigma_2^2}}f(x)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{n\left(\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n}-x\right)^2}{2\sigma_2^2}}f(x)\,dx},$$

innen pedig a jól ismert „LAPLACE-módszer" alkalmazásával az állítás már következik (l. [1], 358. o.).

4. §.

A gyakorlati alkalmazások szempontjából fontosnak látszik megvizsgálni, hogy eredményeink hogyan módosulnak akkor, ha

a) a $\xi+\eta$ hibát nem tudjuk pontosan mérni

b) a számított korrekciót csak bizonyos hibával tudjuk végrehajtani.[1]

Az a) eset figyelembevétele nem jelent különösebb nehézséget, ugyanis ha a $\xi+\eta$ mérési hibáját ε-nal jelöljük, — tehát valójában $\zeta=\xi+\eta+\varepsilon$ értékét mérjük —, ahol ε ξ-től és η-tól független valószínűségi változó, akkor korábbi meggondolásainkat a $\zeta=\xi+\eta^*$ ($\eta^*=\eta+\varepsilon$) valószínűségi változóra alkalmazhatjuk, változatlan eredményekkel. (Ekkor η^* szórásnégyzete η és ε szórásnégyzeteinek összegével egyenlő.)

[1] Ez utóbbi kérdésre SARKADI KÁROLY hívta fel figyelmünket.

A b) esetben eredményeink már nem maradnak változatlanok. Az 1. Tétel ekkor érvényét veszti: a minden megfigyelés utáni és az egy egész megfigyeléssorozat alapján végzett korrekció ekkor már nem ekvivalens.

Jelöljük ugyanis τ_i-vel az i-edik korrekció végrehajtásakor fellépő hibát, (amelyekről feltesszük, hogy ξ-től és az η_i-ktől független, egyforma eloszlású valószínűségi változók). Ekkor a ξ korrigált értéke m_i korrekció esetén $\xi-(m_i+\tau_i)$ lesz. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy ξ, η_i és τ_i $(i=1, 2, \dots, n)$ normális eloszlásúak 0 várható értékkel és σ_1, σ_2, illetve σ_3 szórással. Ez esetben a $\xi+\eta_i$ érték első megfigyelése utáni korrekció (23) szerint

$$m_1' = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}(\xi+\eta_1')$$

és így a ξ korrigált értéke

$$\xi_1=\xi-m_1'-\tau_1=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\xi-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\eta_1'-\tau_1 .$$

Tehát ξ_1 is normális eloszlású 0 várható értékkel és

$$\mathbf{D}^2(\xi_1)=\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}+\sigma_3^2 \tag{24}$$

szórásnégyzettel.

A meggondolás ismétlésével nyerjük, hogy a k-ik korrekció utáni ξ_k korrigált beállítási hiba is normális eloszlású és szórásnégyzete

$$\mathbf{D}^2(\xi_k)=\frac{\mathbf{D}^2(\xi_{k-1})\cdot\sigma_2^2}{\mathbf{D}^2(\xi_{k-1})+\sigma_2^2}+\sigma_3^2=\frac{\sigma_2^2}{1+\dfrac{\sigma_2^2}{D^2(\xi_{k-1})}}+\sigma_3^2 \qquad (k=1, 2, \dots, n;\ \xi_0=\xi) \tag{25}$$

Ha viszont k megfigyelés után egyszerre korrigálunk, akkor a korrekció (22) szerint

$$m_k=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\dfrac{1}{k}\sigma_2^2}\left(\xi+\frac{\eta_1+\dots+\eta_k}{k}\right),$$

tehát ξ korrigált értéke

$$\xi_k^*=\xi-(m_k^*+\tau)=\frac{\sigma_2^2}{k\sigma_1^2+\sigma_2^2}\xi-\frac{\sigma_1^2}{k\sigma_1^2+\sigma_2^2}[\eta_1+\dots+\eta_k]-\tau,$$

azaz

$$\mathbf{D}^2(\xi_k^*)=\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{k\sigma_1^2+\sigma_2^2}+\sigma_3^2=\frac{\sigma_2^2}{1+\dfrac{\sigma_2^2}{D^2(\xi_{k-1}^*)-\sigma_3^2}}+\sigma_3^2. \tag{26}$$

A (25) és (26) alapján teljes indukcióval azonnal látható, hogy

$$\mathbf{D}^2(\xi_k)\geqq\mathbf{D}^2(\xi_k^*), \tag{27}$$

ahol $k=1$-re az egyenlőség teljesül (24) miatt. Egyúttal az is látható, hogy (27)-ben $k \geqq 2$ esetben határozott egyenlőtlenség áll fenn.

Eredményünk azt jelenti, hogy a beállítási hiba adott korlát alá való csökkentéséhez (adott valószínűségi szint mellett) kevesebb megfigyelésre van szükség akkor, ha csak a teljes megfigyeléssorozat elvégzése után korrigálunk, nem pedig minden lépésben.

A most mondottakat az 1 § 1. Tétel d) megjegyzésével összevetve megállapíthatjuk, hogy bizonyos esetekben egy egész megfigyeléssorozat utáni, más esetekben viszont a lépésenkénti korrigálás a célszerűbb.

Hogy mikor melyiket előnyösebb használni, azt konkrét esetekben külön vizsgálat alapján kell eldönteni.

IRODALOM

[1] RÉNYI ALFRÉD: *Valószínűségszámítás,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
[2] J. L. DOOB: *Stochastic Processes,* Wiley, New York, 1953.

(Beérkezett: 1962. II. 15)

KÜLFÖLDI SZAKFOLYÓIRATOK AZ AKADÉMIAI KIADÓNÁL MEGJELENT ÖNÁLLÓ MATEMATIKAI MUNKÁKRÓL

Írta: MEDGYESSY PÁL

Ennek az ismertetőnek az a célja, hogy elmondja, milyen módon kerülnek a külföldi szakemberek kezébe és milyen visszhangot, bírálatot váltanak náluk ki azok az önálló, matematikai tárgyú és javarészt idegen nyelven megírt könyvek, amelyek az Akadémiai Kiadónál 1960. XII. 31-ig megjelentek. Minthogy idegen nyelven megjelent szakkönyv természetszerűleg nagyobb külföldi érdeklődésre számíthat, mint a magyar nyelvű, — előbbieket pedig elsősorban az Akadémiai Kiadó ad ki hazánkban, — indokolt a vizsgálat alá vett anyag szóban forgó körülhatárolása.

Bevezetőül néhány szót arról, hogyan juthat el az Akadémiai Kiadó valamely kiadványa külföldre.

Idegen nyelven megjelent műből (a továbbiakban túlnyomórészt ezekről lesz szó) a kinyomtatott készlet jelentős százaléka a Kultúra Könyv és Hírlap Külkereskedelmi Vállalathoz kerül át, minthogy a külföldre szállítást ez a vállalat bonyolítja le. Az egyes könyveket még megjelenésük előtt mind a Kiadó, mind a Kultúra reklámozza, azaz prospektusokat, ismertetőket küld szét nagy számban a világ minden részébe könyvkereskedéseknek, könyvkereskedelmi vállalatoknak, valamint egyetemeknek és tudományos intézeteknek, továbbá recenziós példányokat küldenek ki matematikai referáló és egyéb folyóiratoknak. A Kiadónál (egyes művek prospektusain kívül) ilyen pl. jelenleg a német nyelven rendszeresen megjelenő „Aus der Verlagsproduktion" c. kiadvány; más nyelvűek is készülnek. A Kultúra a rendszeres terjesztést a „Bücher aus Ungarn Exportkatalog" c. kiadványaival, ill. ennek más nyelvű (angol stb.) változataival végzi az egyes művek prospektusai mellett. — A propaganda egyik módja a könyvek kivitele vásárokra, nemzetközi kiállításokra (Leipzigi Vásár stb.).

Egy mű kiadási jogát a Kiadó általában nem adta el; többször előfordult azonban — megállapodások nyomán — a közös kiadói emblémával való megjelentetés. Ilyen megállapodás történt egyes művekre pl. a Gauthier-Villars (Párizs) vagy az Akademie-Verlag (Berlin) kiadókkal. Olykor teljesen az idegen kiadó emblémájával jelenik meg magyar szerző műve; (ilyen pl. a Deutsche Verlag der Wissenschaften (Berlin)). Kiadói megállapodáson kívül is megtörténik természetesen (főleg a szerzővel folytatott megbeszélés kapcsán) egy mű külföldi kiadása, fordítás formájában. A kiadások menete részleteibe itt azonban nem bocsátkozhatunk.

Érdemes néhány szót szólni a Kultúrával állandó kapcsolatban álló külföldi cégekről, amelyek felé aztán a kivitel történik.

A Szovjetunió és a népi demokráciák felé a legjobbak a kapcsolatok. Állandó az összeköttetés a Mezsdunarodnaja Knyiga (Moszkva), Deutsche Buchgemeinschaft Kommissionsbuchhandlung (Leipzig), Ars Polona (Warszawa), Artia (Praha) Guozi Shudian (Peking) vállalatokkal. Kimondott képviselet a Prágai Magyar

Kultúra (Praha); hasonló terjesztési lehetőség kialakítása Romániában is folyt. Megjegyzendő, hogy a csehszlovákiai és romániai piac lehetőségeit emeli, hogy ezekben az országokban nagy az érdeklődés a magyar nyelvű kiadványok iránt is.

Mutatóul felsorolunk néhány céget más országokból, amelyekkel szintén állandó kapcsolatban áll a Kultúra: Gauthier-Villars (Párizs), Hachette (Párizs), „Du Mond Entier" (Brüsszel), A. B. H. Lindstähls Bokhandel (Stockholm), Pinkus (Zürich), Narodna Prosveta (Sarajevo), Collet's Bookshop (London), Meulenhof (Amsterdam), „Kunst und Wissen" (München), Hoepli (Milano), Rinascita (Roma), Maruzen Co. (Tokió). — Mindezek rendszeresen rendelnek a matematikai munkákból is. Természetesen alkalmi rendelések is előadódnak, mind intézmények, mind magánosok részéről.

E vázlatos általános ismertetés után most sorra vesszük (megjelenési időpontjuknak megfelelően) az egyes minket érdeklő műveket és mindegyiknél összefoglaljuk a jelentősebb külföldi szakfolyóiratokban róla megtalált véleményeket, valamint külföldi lefordíttatására stb. vonatkozó adatainkat[1]. Természetesen a recenziók feldolgozásánál is rögzítenünk kellett, milyen időpontig vesszük őket figyelembe. Megállapodunk abban, hogy az 1960. XII. 31. után megjelenteket jelen ismertetésünkben már nem dolgozunk fel.

1951

Ez évben jelent meg PÉTER RÓZSA: *Rekursive Funktionen* c. könyve, melynek témája a matematikai logika körébe vág. Ez a kiadás kísérlet is volt arra vonatkozólag, milyen visszhangot vált ki külföldön világviszonylatban érdeklődésre számító mű, ha az idegen nyelven jelenik meg. A kiadás elfogyott; emellett számos folyóiratban terjedelmesen ismertették: A Bull. AMS-ben[2] (**58** (1952) pp. 270—272) S. C. KLEENE, az Int. Math. Nachr.-ben (**8** (1954) Nr. 31/32, p. 58) W. KNÖDEL, a Jour. Symb. Log.-ban (**16** (1951) No. 4, pp. 280—281) R. M. ROBINSON, a referáló M.R.-ben (**13** (1952) p. 421) D. NELSON, a Monatsh. f. Math.-ban (**56** (1952) pp. 79—80) K. PRACHAR, a referáló Zbl. f. Math.-ban (**43** (1952) p. 248) W. MARKWALD. Mindezek a tartalmi ismertetés mellett rámutatnak arra, hogy a mű mind a kezdőnek, mind kézikönyvnek igen alkalmas, a problémakör első összefoglaló tárgyalása annak vezető specialistája részéről, részben saját kutatásai alapján; gazdag az irodalomjegyzék, hasznos a történeti tájékoztató s az alkalmazások bemutatása, didaktikailag kiváló és igen világos a stílusa. — 1955-ben megjelent a mű fordítása Moszkvában az Izdatyelsztvo Inosztrannoj Lityeraturi-nál A. N. KOLMOGOROV szerkesztésében és előszavával, számos szerzői változtatással, s a bibliográfia kiegészítésével a szerkesztő részéről. A referáló R. Zs. M.-ben (1955, No. 11, pp. 8—9.) B. A. TRAHTENBROT ismertette e fordítást, igen részletesen.

1952

Megjelent RIESZ FRIGYES és SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *Leçons d'Analyse Fonctionnelle* c. könyve, mely világszerte kedvező fogadtatásra talált. A Bull. AMS-ben

[1] Felhasználtuk itt SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA akadémikusnak az MTA III. Osztálya Matematikai Főbizottsága által 1954. III. 2-án rendezett ankéton elhangzott referátumát (MTA III. Oszt. Közl. IV/1954) pp. 247—256), valamint több szerző személyes közléseit.

[2] A rövidítések összefoglaló jegyzékét l. a cikk végén.

(**59** (1953) pp. 270—281) E. R. LORCH ismertette rendkívül részletesen, az Int. Math. Nachr.-ben (**8** (1954) April, Nr. 31/32, p. 58) H. HORNICH, a Math. Gaz.-ben (**37** (1953) pp. 157—158) J. L. B. COOPER, a referáló M. R.-ben (**14** (1953) pp. 286—287) M. M. DAY, a Monats. f. Math.-ban (**57** (1953) pp. 92—93) J. RADON, a referáló Zbl. f. Math.-ban (**46** (1953) pp. 331—332), G. KÖTHE ismertette. A bírálók nagy elismeréssel írnak a műről; E. R. LORCH „fenségesnek" nevezi, szerinte, amiről ír, azt a jövőben sem lesz lehetséges máshonnan elsajátítani; a matematika bizonyos összefüggő, központi részét végleges és lezárt formában közli. — Örömüket fejezik ki, hogy a valós függvénytan egyes részeinek Riesz Frigyes-féle tárgyalása nyomtatásban megjelent. Kiemelik azt is, hogy a mű a tanuló és a specialista számára egyaránt ragyogóan olvasható. Külön kiemelik a könyv gyönyörű, világos stílusát s a francia klasszikusokéval vetekedő pedagógiai értékeit. Rámutatnak a bibliográfia gazdagságára, az index jóságára. Természetesen a részletes tartalmi ismertetés sem marad el.

Az ugyanebben az évben megjelent BOLYAI JÁNOS: *Appendix* kiadásra nem volt külföldi reflexió, még referáló lapokban sem.

1953

Az ekkor megjelent *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei* fogadtatására nem térünk ki, mert ezt előadásokként referálták egyes folyóiratok s így az előzőkhöz hasonlóan — cikkünk jellege folytán — nem ismertethető.[3]

Ez évben jelent meg TURÁN PÁL: *Az analízis egy új módszeréről és annak egyes alkalmazásairól* c. műve s ennek német nyelvű kiadása, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen* címmel. Jelentős visszahangra talált a német nyelvű változat (a magyar nyelvűről csak a referáló M. R. emlékezett meg (**15** (1954) p. 688) a cím közlésével s a német nyelvű kiadás fordításának mondva azt). A Bull. AMS-ben (**61** (1955) pp. 232—236) A. E. INGHAM, az Int. Math. Nachr.-ben (**9** (1954) Nov., Nr. 35/36, p. 71) N. HOFREITER, a referáló M. R.-ben (**15** (1954) p. 688) N. G. de BRUIJN, a Monatsh. f. Math.-ban (**58** (1954) p. 310) N. HOFREITER, a referáló R. Zs.M. -ben (**1956**, No. 11, p. 7) N. G. CSUDAKOV, a referáló Zbl. f. Math.-ban (**52** (1955) pp. 46—47) E. HLAWKA ismertette a német kiadást. A részletes tartalmi ismertetés mellett mindezek kiemelik a tárgyalt módszerek számos alkalmazását, a szerző addigi dolgozataihoz viszonyítva újabb tételeket, a világos, vonzó stílust, s igen jelentősnek ítélik.

A mű külföldi kiadásait illetőleg: kínai nyelven 1956-ban jelent meg, lényegesen átdolgozott formában, ezenkívül az Egyesült Államokban angolul, további átdolgozásokkal.

— Ugyanebben az évben jelent meg RIESZ FRIGYES és SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA már említett művének 2. kiadása, némi kiegészítésekkel. Az új kiadásról megemlékezett a referáló M. R. (**15** (1954) p. 132), csak az újdonságokat említve meg.

Ez új kiadásról készült az Izdatyelsztvo Inosztrannoj Lityeraturinál Moszkvában 1954-ben megjelent orosz nyelvű fordítás, melyet a referáló R. Zs. M.-ben (**1955**, No. 10, p. 71.) M. M. VAJNBERG ismertetett, igen részletes tartalmi ismertetés mellett megemlítve nagy pedagógiai értékét és a perturbáció-elméleti alkal-

[3] Ugyanezen okból nem foglalkozunk az *MTA Alkalmazott Matematikai Intézete Közleményei* I—III. kötetével, melyek évkönyv-jelleggel jelentek meg; ezeket is dolgozatokként referálták.

mazásokról írt IX. fejezet újdonságait a szovjet olvasó számára. A mű azóta egyik első olvasmánya a Szovjetunióban mindazoknak, akik funkcionálanalízissel foglalkoznak. — 1955-ben jelent meg a 2. kiadás angol nyelvű fordítása, *Functional analysis* címmel, a Frederick Ungar Publ. Co. (New York) és a Blackie and Sons (Glasgow) kiadók közös emblémájával. Erről megemlékeztek a Bull. AMS-ben (**62** (1956) p. 423), a Math. Gaz.-ben (**41** (1957) No. 335, p. 69) T. A. A. BROADBENT, a referáló R. Zs. M.-ben (**1957**, No. 7, p. 89) csak címével, a Scr. Math.-ban (**22** (1956) pp. 234—244) R. P. BOAS jr., a referáló Zbl. f. Math.-ban (**70** (1957) p. 109) csak címével. Az ismertetők kiemelik, hogy most már azok is olvashatják, akik szép franciaságát nem értették, s így élvezhetik eleganciáját ennek a műnek, mely a klasszikusok közé sorolható és sokkal többet nyújt címénél.

1954

Ebben az évben jelent meg RÉDEI LÁSZLÓ: *Algebra I.* c. könyve, ezt a referáló M. R.-ben (**16** (1955) p. 559) P. R. HALMOS ismertette, a referáló R. Zs. M.-ben (**1956**, No. 12, p. 12) KERTÉSZ ANDOR, a referáló Zbl. f. Math.-ban (**55** (1955) pp. 257—259) FUCHS LÁSZLÓ, mindnyájan gazdag tartalmi ismertetést adva s kiemelve pedagógiai értékeit, szisztematikus felépítését. A munka német fordításban, emellett átdolgozva és bővítve 1959-ben jelent meg az Akademische Verlagsgesellschaft-nál (Geest und Portig K.-G.), Leipzigben; ezt a Jb. d. d. Math. Ver.-ben (**63** (1960) Heft I, p. 4.) E. A. BEHRENS, a referáló M. R.-ban (**21** (1960) pp. 894—895) A. SADE ismertette; tartalmi ismertetés után kiemelik újdonságait a magyar kiadáshoz viszonyítva, azt, hogy nem-algebristáknak is kiváló, bár több mint egy tankönyv, — dicsérik nagyszerű tagoltságát, indexe használhatóságát, s más nyelvekre fordítását is kívánatosnak tartják.

1955

RIESZ FRIGYES és SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA fenti műve 2. kiadásához SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA egy függeléket írt, melyet *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace* címmel füzet alakban jelentetett meg az Akadémiai Kiadó. E függeléket az Int. Mat. Nachr.-ban (**10** (1956) Aug., Nr. 45/46, p. 60) F. SELIG, a referáló M. R.-ban (**16** (1955) p. 837) M. M. DAY, a referáló R. Zs. M.-ben (**1956**, Nr. 9, p. 78), M. A. NAJMARK ismertette. E függelék hozzácsatolásával és több javítás s bővítéssel jelent meg ezután a párizsi Gauthier-Villars kiadóval közös emblémával az említett mű 3. kiadása; ezt a Bull. Sci. Math.-ban (**81** (1957) pp. 15—17) E. MOURIER, az Int. Math. Nachr.-ben (**10** (1956) April, Nr. 43/44, p. 61) H. REITER, a referáló M. R.-ben (**16** (1955) p. 837) M. M. DAY, a Math.-ben (**64** (1955) p. 135) R. DEAUX, a Scr. Math.-ban (**22** (1956) pp. 243—244) R. P. BOAS jr., a referáló Zbl. f. Math.-ban (**64** (1956) pp. 354—355) G. KÖTHE ismertette. Mindezek kiemelik, mennyire megmutatkoznak a műben Riesz Frigyes gazdag gondolatai, mennyire egységes és elegáns a tárgyalás, mennyire hű képe az elmúlt 50 év ez irányú irodalmának ez a klasszikus mű. A tartalomra vonatkozó megjegyzések főleg a már említett függelék körül összpontosulnak, kapcsolatba hozva azt az előző kiadással.

E 3. kiadás fordításai: a német nyelvű 1956-ban jelenik meg *Vorlesungen über Funktionalanalysis* címmel a VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften-nél Berlinben. Ezt ismerteti a Jb. d. d. Math. Ver.-ben (**60** (1958) Heft 3, p. 62) E. KAMKE, a Monatsh. f. Math.-ban (**1** (1957) p. 258) K. MAYRHOFER, s csak címét közli a referáló R. Zs. M. (**1957**, No, 8, p. 97) s a referáló Zbl. f. Math. (**72** (1958) p. 219). Az ismertetők örömüket fejezik ki, hogy e szép könyv immár német nyelven is olvasható. — A 3. kiadás kínai, valamint japán nyelven történő kiadásának előmunkálatai is folyamatban vannak.

Ez évben jelent meg KERÉKJÁRTÓ BÉLA két kötetes, a geometria alapjairól írt munkájának első kötete poszthumusz, francia nyelvű kiadásban, *Les fondements de la géometrie I. La construction élémentaire de la géometrie Euclidienne* címmel. A munkát a Math. Scand.-ban (**5** (1957) Fasc. 1, p. 116) P. NEERUP, a referáló M. R.-ban (**17** (1956) p. 995) H. BUSEMANN, a Monatsh. f. Math.-ban (**59** (1955) p. 346) J. RADON ismertette, a referáló R. Zs. M. (**1959**, No. 9, p. 153) H. BUSEMANN említett referátumát átvéve emlékezett meg róla. Az ismertetések a könyvet hézagpótlónak nevezik, a geometria alapjairól írt egyik leggazdagabb munkának, mely páratlanul áll a hasonló bevezetők közt. A tartalmi ismertetésnél megemlítik, hogy ritka eredmények is bele vannak dolgozva, a stílus kiváló. Melegen ajánlják a kezdőnek.

1956

JORDAN KÁROLY: *Fejezetek a klasszikus valószínűségszámításból* c. könyve az egyetlen ismertetésünk körébe tartozó kiadvány. Magyar nyelve ellenére ismertették a Biom.-ban (**44** (1957) p. 536) CEDRIC A. B. és PIRI SMITH, elmondva, milyen helyet tölt be a külföldi, ill. a magyar valószínűségszámítási irodalomban, ismertetve tartalmát, kiemelve jó indexét, s írígyelve a magyar olvasót, akinek rendelkezésére áll, míg más anyanyelvűek meg vannak fosztva olvasásától. A referáló R. Zs. M. (**1960**, No. 8, p. 170) cím szerint említette meg, a referáló Zbl. f. Math.-ban pedig (**74** (1960) p. 122) BÉKÉSSY ANDRÁS ismertette tartalmilag.

1957

Ekkor jelent meg PÉTER RÓZSA fent említett könyvének 2. javított és bővített kiadása, melyet ugyanebben az évben az Akadémiai Kiadóval munkaközösségben az Akademie-Verlag (Berlin) is megjelentetett (csak Németországban való terjesztésre). A Jb. d. d. Math. Ver.-ban (**61** (1958) Heft 1, p. 5) H. HERMES, a Jour, Symb. Log.-ban (**23** (1958) No. 3, p. 363) R. M. ROBINSON ismertette, a referáló R. Zs. M. (**1961**, No. 2, p. 16) cím szerint emlékezett meg megjelenéséről, a referáló Zbl. f. Math.-ban (**77** (1958) p. 13) J. C. SHEPHERDSON ismertette. Mindezek megemlítik az 1. kiadáshoz viszonyított változásokat, — amelyik először ismerteti, az teljes tartalmát is —, a bibliográfia bővülését. Hangsúlyozzák, hogy az 1. kiadás óta eltelt időt figyelembe véve is változatlanul a legjobb kézikönyv a témával foglalkozó számára s így igen ajánlják.

1958

Ez évben egyetlen vizsgálódásunk alá eső mű jelent meg: FUCHS LÁSZLÓ: *Abelian groups* című speciális algebrai munkája, melyet 1960-ban a Pergamon Press (London) átvett kiadásra. A Jb. d. d. Math. Ver.-ban (**62** (1960) Heft 2. p. 39)

F. WEVER, a referáló M. R.-ban (**21** (1960) pp. 1048—1050) F. W. LEVI, a Monatsh. f. Math.-ban (**64** (1960) p. 85) W. NÖBAUER, a N. Arch. v. Wisk.-ben (**8** (1960) p. 23) J. de GROOT ismertette. Gazdag tartalmi ismertetés mellett megemlítik, hogy a témakör jelen állását adja vissza, jobban, mint más tankönyvek; haladottabb egyetemista is tanulmányozhatja már; gazdag a bibliográfiája. Sokáig standard munka lesz, s nagy hatással a témakör további fejlősédére. Szép stílusú, nagyszabású, imponáló mű. 500 gyakorlata külön érték.

1959

Ez évben jelentek meg korán elhunyt nagy matematikusunk, HAAR ALFRÉD *Összegyűjtött munkái,* SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA szerkesztésében, a cikkeket fotokópiában adva vissza, a magyar nyelvűek német fordításával együtt. A hézagpótló vállalkozás gyors visszhangot váltott ki, az Int. Math. Nachr.-ben (**14** (1960) Mai Nr. 64, p. 44.) H. REITER, a referáló M. R.-ban (**21** (1960) pp. 893—894) E. HEWITT, a referáló R. Zs. M.-ban (**1960**, Nr. 4, p. 4.) K. A. KARPOV ismertették. Mindnyájan ismertetik a kötet tartalmát, megemlítik az értékes kommentárokat, általában igen melegen üdvözlik a kiadást.

A csak magyarul megjelent SZÁSZ GÁBOR: *Bevezetés a hálóelméletbe* című speciális algebrai munkáról a referáló R. Zs. M.-ban (**1960**, Nr. 10, p. 36) A. A. BOVDI emlékezett meg, a tartalom és egyes tételek részletes ismertetése formájában.

Az év harmadik idevágó könyve SURÁNYI JÁNOS: *Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der ersten Stufe* c. német nyelven megjelent matematikai logikai monográfiája volt (angol nyelvű kiadás is készül). A Jb. d. d. Math. Ver.-ban (**63** (1960) Heft 2, p. 22) W. ACKERMANN, a referáló M. R.-ban (**21** (1960) p. 1318) E. MENDELSON, a Monatsh. f. Math.-ban (**64** (1960) p. 290) W. NÖBAUER, a N. Arch. v. Wisk.-ben (**8** (1960) p. 104) E. W. BETH ismertette. Részletes tartalmi ismertetés mellett kiemelik a mű összefoglaló jellegét, szisztematikus, jól olvasható tárgyalásmódját, a rengeteg részleteredmény felvételét. A specialista számára igen nagy segítségnek minősítik a könyvet.

Az utolsó két év kiadványairól való megemlékezésünk már nem teljes, mert 1961-ben is jelentek meg rájuk vonatkozó recenziók, ezeket azonban — említett munkamódszerünknek megfelelően — már nem vehettük figyelembe.

Ugyancsak nem lévén róluk 1960. XII. 31. előtt megjelent recenzió, nem foglalkozhattunk a következő 1960-ban megjelent munkákkal: ALEXITS GYÖRGY: *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen,* CSÁSZÁR ÁKOS: *Fondements de la topologie générale* c. könyveivel, valamint RIESZ FRIGYES dolgozatainak s egy könyvének fotokópiás (magyar nyelvűeket francia fordításban is közlő) *Összegyűjtött munkái I—II* címmel CSÁSZÁR ÁKOS szerkesztésében megjelent kiadásával, melyről az 1961-es folyóiratokban már kezdenek megjelenni az elismerő bírálatok.

Befejezésül néhány észrevételt.

Általában az évek múltával egyre szélesebb lett az Akadémiai Kiadó kiadványait referáló folyóiratok köre, aminek valószínűleg az is az oka, hogy az Akadémiai Kiadó és a Kultúra az idegen nyelvű kiadványokból ma sokkal több helyre küld automatikusan recenziós példányt, mint kezdetben. Ennek a haszna meg is mutatkozik, s így a jövőben is kívánatos lesz. Magyar nyelvű kiadványok sorsa eleve mostohább, bár a referáló lapoknak ezekből is kellene automatikusan kapniok. Bolyai János Appendix-ének romániai kiadásáról referáló folyóiratok megemlékeztek, minthogy nyilván kaptak példányt; a magyar kiadásról nem esett szó. A többi magyar nyelvű kiadvány is csak kevés helyre jutott el, lehet, hogy a szerző maga küldött el belőlük. Mindenesetre jó volna, ha maguk a szerzők is eljuttatnának munkájukból olyan folyóiratokhoz, melyeknek az Akadémiai Kiadó stb. már biztosan nem küld recenziós példányt.

Meg kell emlékezni az idegen nyelvű kiadványok hazai vásárlóiról is. Egyes könyvekből sok megmaradt idehaza, másokból (különösen azóta, hogy a Kultúra a készlet nagy részét átveszi) sokan nem kaphattak. Az itthoni eladást az is befolyásolta, megjelent-e orosz fordításban is a mű, mert hiszen az oroszul olvasó a hazai ár 1/3-áért megkaphatta a fordítást. A francia nyelvű kiadványok megvásárolását meg az befolyásolta, hogy aránylag kevesen olvasnak franciául (Riesz Frigyes és Szőkefalvi-Nagy Béla könyve esetében éppen ezért sokan üdvözölték külön örömmel az angol, német és orosz kiadás megjelenését). Fuchs László könyve idehaza megjelenése után csakhamar megszerezhetetlen volt, mert a Kultúrának át. nem adott készlet elfogyott; voltak esetek, hogy a Pergamon Press-nél megjelent kiadását hozatták meg végül is; ez azonban devizagazdálkodás szempontjából nem előnyös megoldás.

Észrevételeink során megemlítjük még azt a gyér számú megjegyzést, ami a recenziókban a Kiadó munkájára vonatkozott. Egyes műveknél az idegen nyelvű szöveget nem találták elég gördülékenynek. Másoknál elég *sok a sajtóhiba*, vagy nincs tárgymutató, ill. árfeltüntetés. Több műnél viszont külön kiemelik a szép nyomást, kiállítást, „öröm, hogy importálhatjuk" írja az egyik mű bírálója. Egyes munkáknál külön gratulálnak az idegen nyelvű megjelentetéshez — vagy egyáltalán a megjelentetéshez — a Kiadónak, hogy ily módon a nemzetközi tudomány számára hozzáférhetővé tette a magyar kutatási eredményeket. Sajnos, ugyanilyen megokolású örömmel fogadják egyesek a hazai könyv idegen kiadónál, fordításban való megjelenését. Egyes könyveknél az újabb idegen nyelvekre fordítás igényét is hangoztatják a bírálók. — Reméljük, hogy ezen észrevételek összegyűjtött bemutatása az Akadémiai Kiadó számára is hasznos szempontokat nyújt jövőbeni munkájához.

Végül köszönetet mondunk mindazoknak, akik e cikk összeállításában segítséget nyújtottak.

RÖVIDÍTÉSEK

Biom.	= Biometrika (Anglia)
Bull. AMS	= Bulletin of the American Mathematical Society (Egyesült Államok)
Bull. Sci. Math.	= Bulletin des Sciences Mathématiques, II-e série (Franciaország)
Int. Math. Nachr.	= Internationale Mathematische Nachrichten. (Ausztria)
Jb. d. d. Math. Ver.	= Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung (Német Szövetségi Köztársaság)
Jour. Symb. Log.	= Journal of Symbolic Logic (Egyesült Államok)
Math. Gaz.	= Mathematical Gazette (Anglia)
Math. Scand.	= Mathematica Scandinavica (Dánia)
M. R.	= Mathematical Reviews (Egyesült Államok)
Math.	= Mathesis (Belgium)
Monatsh. f. Math.	= Monatshefte für Mathematik (Ausztria)
N. Arch. v. Wisk.	= Nieuw Archiev voor Wiskunde (Hollandia)
R. Zs. M.	= Referatyivnij Zsurnal Matyematyika (Szovjetunió)
Scr. Math.	= Scripta Mathematica (Egyesült Államok)
Zbl. f. Math.	= Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete (Német Demokratikus Köztársaság)

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A SHANNON-FÉLE ALAPTÉTEL ÁLTALÁNOS MEGFOGALMAZÁSA AZ INFORMÁCIÓELMÉLETBEN (III)*

Írta: R. L. DOBRUSIN

5. §. AZ ALAPTÉTELEK BIZONYÍTÁSA

5. 1. Az 1. tétel bizonyítása. Az átvitel módszerének megkonstruálása

Tegyük fel, hogy adva vannak $\{W^t\}$ közlemények és $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezések sorozatai, amelyekre az 1. tétel minden feltétele teljesül. Rögzítsük a tétel állításaiban szereplő $\varepsilon > 0$ számot. Válasszuk meg $\delta > 0$-t úgy, hogy fennálljon

$$\delta \leqq \frac{\varepsilon}{3}, \tag{5.1.1}$$

valamint

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{H^t(W)}{C^t(Q, V)} < \frac{1-\delta}{1+\delta} \tag{5.1.2}$$

(utóbbi a tétel II. feltétele folytán lehetséges). Akkor a (3. 1. 3), (4. 1. 3) jelölései mellett[1] fennáll

$$\lim_{t\to\infty} \frac{K_\delta^t}{L_\delta^t} = 0. \tag{5.1.3}$$

A tétel II. feltételéből következik, hogy minden elegendően nagy t-re a $H^t(W)$ entrópiára fennáll $H^t(W) < \infty$. — A tétel I., III., V. feltételeiből következik mármost a közleményekre vonatkozó alaplemma feltételeinek teljesülése (ε-t δ-val helyettesítjük). Tekintsük az ebben a lemmában bevezetett $q_i^t(x)$ $(i = 1, \ldots, K_\delta^t)$, $r^t(x)$ függvények rendszerét, és segítségükkel vezessünk be új — $s_{ij}^t(x)$ — függvényeket, amelyek ugyancsak mérhetők $x^t \in X^t$-re vonatkozólag. Az i, j indexek a következő értékeket fogják felvenni:

$$i = -2, -1, 0, 1, \ldots, K_\delta^t; \qquad j = 1, \ldots, R_i^t,$$

ahol a függvények összes száma

$$\sum_{i=-2}^{K_\delta^t} R_i^t = L_\delta^t; \tag{5.1.4}$$

* Uszpehi Matematicseszkih Nauk XIV. (1959), vip. 6 (90) 3—104. — Jelen befejező közlemény az eredeti tanulmány 5—6. §-ának a fordítását, továbbá az irodalomjegyzéket tartalmazza. A tanulmány 1 §-ának a fordítása az MTA III. Oszt. Közl. XI/4 (1961) számában (427—456. oldal), a 2—4. § fordítása ugyanezen folyóirat XII/1 (1962) számában (51—103. oldal) jelent meg.

[1] Ha $C^t(Q, V) = \infty$, akkor a (3. 1. 3) képlet nem nyújt lehetőséget L_δ^t meghatározására. Ilyen t-k esetére L_δ^t-t oly nagynak fogjuk választani, hogy fennálljon (5. 1. 3), és hogy a (Q^t, V^t) csatornára $L = L_\delta^t$ mellett teljesüljön FEINSTEIN 3. 9 pontbeli lemmájának állítása.

az R_i^t számokat alább fogjuk meghatározni. Nevezetesen, írjuk a következőket (a jelöléseket illetőleg l. a 4. 1 pontot)

$$\left.\begin{aligned} \bar{q}_i^t &= \int_{X^t} q_i^t(x) p_\xi^t(dx) \qquad (i=1, \dots, K_\delta^t), \\ \bar{q}_0^t &= \int_{X^t} r_\delta^t(x) p_\xi^t(dx), \\ \bar{q}_{-1}^t &= 1 - Q^t. \end{aligned}\right\} \tag{5.1.5}$$

A (4. 1. 6) definícióból, valamint (4. 1. 4), (4. 1. 5)-ből következik, hogy

$$0 \leqq \bar{q}_i^t \leqq 1, \quad \sum_{i=-1}^{K_\delta^t} \bar{q}_i^t = 1. \tag{5.1.6}$$

Legyen most

$$\begin{aligned} R_i^t &= \left[\frac{\bar{q}_i^t L_\delta^t}{2}\right] + 1 \qquad (i=-1, 0, 1, \dots, K_\delta^t), \\ s_{ij}^t(x) &= \frac{1}{R_i^t} q_i^t(x) \qquad (i=1, \dots, K_\delta^t;\ j=1, \dots, R_i^t), \\ s_{0j}^t(x) &= \frac{1}{R_0^t} r_\delta^t(x) \qquad (j=1, \dots, R_0^t), \\ s_{-1j}^t(x) &= \frac{1}{R_{-1}^t}[1 - Q^t(x)] \qquad (j=1, \dots, R_{-1}^t). \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

(5. 1. 6)-ból következik, hogy

$$\sum_{i=-1}^{K_\delta^t} R_i^t = \sum_{i=-1}^{K_\delta^t} \left[\frac{\bar{q}_i^t L_\delta^t}{2}\right] + K_\delta^t + 2 \leqq \frac{L_\delta^t}{2} \sum_{i=-1}^{K_\delta^t} \bar{q}_i^t + K_\delta^t + 2 \leqq \frac{L_\delta^t}{2} + K_\delta^t + 2. \tag{5.1.8}$$

(5. 1. 3)-ból következik, hogy minden elegendően nagy t-re (a következőkben csak ilyen t értékeket fogunk tekinteni)

$$\sum_{i=-1}^{K_\delta^t} R_i^t \leqq L_\delta^t. \tag{5.1.9}$$

Ezért írhatjuk a következőket:

$$\left.\begin{aligned} R_{-2}^t &= L_\delta^t - \sum_{i=-1}^{K_\delta^t} R_i^t \leqq L_\delta^t, \\ s_{-2j}^t(x) &\equiv 0 \qquad (j=1, \dots, R_{-2}^t). \end{aligned}\right\} \tag{5.1.10}$$

Minthogy definíció szerint

$$\sum_{j=1}^{R_i^t} \int_{X^t} s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx) = \begin{cases} \bar{q}_i^t & (i=-1, \dots, K_\delta^t), \\ 0 & (i=-2), \end{cases} \tag{5.1.11}$$

azért (5. 1. 6)-ból következik, hogy ha

$$p_{ij}^t = \int_{X^t} s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx), \tag{5. 1. 12}$$

akkor a következő összegre fennáll:

$$\sum_{i=-2}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} p_{ij}^t = 1. \tag{5. 1. 13}$$

Továbbá az (5. 1. 7), (5. 1. 10) definíciókból következik, hogy

$$p_{ij}^t = \begin{cases} \frac{1}{R_i^t} \bar{q}_i^t & (i = -1, \dots, K_\delta^t) \\ 0 & (i = -2) \end{cases} \tag{5. 1. 14}$$

nem nagyobb, mint $\frac{2}{L_\delta^t}$. Az (5. 1. 13), (5. 1. 14) egyenlőségek azt mutatják, hogy a p_{ij}^t valószínűségek összessége eleget tesz FEINSTEIN lemmája (3. 1. 4), (3. 1. 5) (analóg módon (3. 9. 1), (3. 9. 2)) feltételeinek. Éppen ebből a célból helyettesítettük a $q_i^t(x)$ függvényeket az $s_{ij}^t(x)$ függvényekkel.

Tekintsük most a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezés-sorozatot. A tétel IV. feltétele szerint létezik olyan $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ információ-stabilis sorozat, amely eleget tesz az (1. 7. 7), (1. 7. 8) feltételeknek. Az (1. 7. 7) feltétel — a $\frac{+\infty}{+\infty} = 1$ megállapodás felhasználásával — azt mutatja, hogy minden elegendően nagy t-re $C^t(Q, V) = \infty$-ből következik, hogy $I^t(\eta, \tilde{\eta}) = \infty$. Minthogy az $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ párok sorozata információ-stabilis, ez azt jelenti, hogy minden elegendően nagy t-re, melyre $C^t(Q, V) = \infty$, a $p_{\eta\tilde{\eta}}^t$ eloszlás szinguláris a $p_\eta^t \times p_{\tilde{\eta}}$ eloszlásra vonatkozólag. A tétel I és II feltételéből következik, hogy

$$\lim_{t\to\infty} C^t(Q, V) = \infty. \tag{5. 1. 15}$$

A $\{Q^t, V^t\}$ sorozatot bontsuk fel két részsorozatra úgy, hogy az egyikre $C^t(Q, V) < \infty$, a másikra pedig $C^t(Q, V) = \infty$; a tétel III. és IV. feltételéből azt kapjuk, hogy az első sorozatra alkalmazható FEINSTEIN 3. 1 pontbeli lemmája, és hogy minden elegendően nagy t-re mindazon átviteli berendezésekre, amelyek a második részsorozatban fordulnak elő, alkalmazható FEINSTEIN 3. 9 pontbeli lemmája. Ez utóbbinak állítása erősebb, mint a 3. 1 pontbeli lemmáé ((3. 9. 3)-ból nyilvánvalóan következik a (3. 1. 6) egyenlőtlenség). Ezért állíthatjuk, hogy minden elegendően nagy t-re teljesül FEINSTEIN 3. 1 pontbeli lemmájának állítása. A p_{ij}^t valószínűségek általunk most használt kettős számozásának megfelelően, a (3. 1. 6) és (3. 1. 7) feltételeket a következő alakban írhatjuk (ismét δ-val helyettesítjük ε-t):

$$\sum_{i=-2}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} p_{ij}^t Q^t(y_{ij}, A_{ij}) \geq 1 - \delta, \tag{5. 1. 16}$$

illetőleg

$$\left(\sum_{i=-2}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} p_{ij}^t \int_{\tilde{Y}^t} \pi_1^t(y_{ij}, \tilde{y}) Q^t(y_{ij}, d\tilde{y}), \dots, \sum_{i=-2}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} p_{ij}^t \int_{\tilde{Y}^t} \pi_{N^t}^t(y_{ij}, \tilde{y}) Q^t(y_{ij}, d\tilde{y}) \right) \in [\tilde{V}^t]_\delta. \tag{5. 1. 17}$$

Most hozzáfoghatunk az átviteli módszer leírásához. Az 1. 7 pont elején adott definíciónak megfelelően olyan $\xi_0^t, \eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t, \tilde{\xi}_0^t$ valószínűségi változókat kell konstruálnunk melyek értékei rendre az (X^t, S_X^t), (Y^t, S_Y^t), $(\tilde{Y}^t, S_{\tilde{Y}}^t)$, $(\tilde{X}^t, S_{\tilde{X}}^t)$ terekbe esnek, emellett Markov-láncot alkotnak. Úgy fogjuk tekinteni, hogy ezek a változók az $(\tilde{\Omega}^t, \tilde{\mathfrak{F}}^t, \tilde{P}^t)$ valószínűségi mezőn vannak megadva. Ismeretes (l. [9]), hogy tetszőleges előre megadott kezdeti valószínűségeloszlások és átmenet-függvények esetén létezik olyan Markov-lánc, amely ezekkel a kezdeti eloszlásokkal, illetve átmenet-függvényekkel rendelkezik. Következésképp a $\xi_0^t, \eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t, \tilde{\xi}_0^t$ változók megkonstruálásához elegendő megadni a $p_X(\cdot)$ kezdeti valószínűség-eloszlást és a $P_{XY}^t(\cdot,\cdot)$, $P_{Y\tilde{Y}}^t(\cdot,\cdot)$ és $P_{\tilde{Y}\tilde{X}}^t(\cdot,\cdot)$ átmenet-függvényeket. Az (X^t, S_X^t) téren megadott $p_X^t(\cdot)$ kezdeti valószínűség-eloszlásként vegyük a bemeneti közlemények $p_\xi^t(\cdot)$ eloszlását (l. az 1. 4 pontot); ekkor tetszőleges $A \in S_X^t$-re

$$\tilde{P}\{\xi_0^t \in A\} = p_\xi^t(A). \tag{5.1.18}$$

Továbbá, az $x^t \in X^t$, $B^t \in S_Y^t$-re definiált $P_{XY}^t(x, B)$ átmenet-függvényt a következő egyenlőség segítségével határozzuk meg:

$$P_{XY}^t(x, B) = \sum_{y_{ij}^t \in B^t} s_{ij}^t(x). \tag{5.1.19}$$

Ennek a függvénynek x^t szerint való mérhetősége az $s_{ij}^t(x)$ függvények mérhetőségéből következik. Az a tény, hogy rögzített x^t mellett ez valószínűségi mértéket ad, abból következik, hogy az (5. 1. 7), (5. 1. 10) és (4. 1. 5) definícióknak megfelelően $0 \leq s_{ij}^t(x) \leq 1$ és

$$\sum_{i=-2}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} s_{ij}^t(x) = \sum_{i=1}^{K_\delta^t} q_i^t(x) + r^t(x) + [1 - Q^t(x)] = 1. \tag{5.1.20}$$

(5. 1. 19)-ből következik, hogy bármely y_{ij}^t pontra és tetszőleges $A \in S_X^t$ halmazra fennáll

$$\tilde{P}^t\{\xi_0 \in A, \eta_0 = y_{ij}\} = \int_A s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx). \tag{5.1.21}$$

A $P_{Y\tilde{Y}}^t(y, \tilde{B})$ átmenet-függvénynek, amely $y^t \in Y^t$, $\tilde{B}^t \in S_{\tilde{Y}}^t$-re van értelmezve, vegyük egyszerűen a $Q^t(y, \tilde{B})$ függvényt, amelyet a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezés megadásakor használtunk fel:

$$P_{Y\tilde{Y}}^t(y, \tilde{B}) = Q^t(y, \tilde{B}). \tag{5.1.22}$$

Ilyen definíció mellett a $\tilde{P}^t\{\tilde{\eta}_0 \in \tilde{B}/\eta_0\}$ feltételes valószínűségre 1 valószínűséggel fennáll:

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\eta}_0 \in \tilde{B} | \eta_0\} = Q^t(\eta_0, \tilde{B}). \tag{5.1.23}$$

Végezetül adjuk meg a $P_{\tilde{Y}\tilde{X}}^t(\tilde{y}, \tilde{A})$ átmenet-függvényt, ahol $\tilde{y}^t \in \tilde{Y}^t$, $\tilde{A}^t \in S_{\tilde{X}}^t$. E célból adjuk meg tetszőlegesen az $\tilde{x}_+^t \in \tilde{X}^t$ pontot. Kiegészítve a közleményekre vonatkozó lemmában közölt konstrukciót, legyen most $\tilde{x}_0^t = \tilde{x}_{-1}^t = \tilde{x}_{-2}^t = \tilde{x}_+^t$. Végül pedig legyen:

$$P^t_{\tilde{Y}\tilde{X}}(\tilde{y}, \tilde{A}) = \begin{cases} 0, & \tilde{x}^t_i \notin \tilde{A}^t, \\ 1, & \tilde{x}^t_i \in \tilde{A}^t, \end{cases} \quad \tilde{y}^t \in A^t_{ij} \quad \begin{pmatrix} i=-2,-1,\dots,K^t_\delta \\ j=1,\dots,R^t_i \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} 0, & \tilde{x}^t_+ \notin \tilde{A}^t, \\ 1, & \tilde{x}^t_+ \in \tilde{A}^t, \end{cases} \quad \tilde{y}^t \notin \bigcup_{i,j} A^t_{ij}. \tag{5. 1. 24}$$

Minthogy a FEINSTEIN-lemma állításának megfelelően az A^t_{ij} halmazok páronként idegenek, az (5. 1. 24) definíció ellentmondásmentes. Az A^t_{ij} halmazok mérhetőségéből következik, hogy az (5. 1. 24) függvény, mint $\tilde{y}^t$ függvénye, mérhető. Az, hogy rögzített $\tilde{y}^t$ mellett ez valószínűségi mérték, rögtön következik a definícióból. (5. 1. 24)-ből közvetlenül folyik, hogy a következő feltételes valószínűségekre fennáll:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0 = \tilde{x}_i/\tilde{\eta}_0\} = 1, &\quad \tilde{\eta}^t_0 \in A^t_{ij}, \\ \tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0 = \tilde{x}_+/\tilde{\eta}_0\} = 1, &\quad \tilde{\eta}^t_0 \notin \bigcup_{i,j} A^t_{ij} \end{aligned}\right\}. \tag{5. 1. 25}$$

5. 2. Az 1. tétel bizonyítása. A tétel feltételei teljesülésének igazolása

Az ε valószínűségű eseménytől eltekintve pontos átvitel definíciójának megfelelően, amelyet az 1. 7 pont elején adtuk meg, meg kell most konstruálnunk a $\tilde{\xi}'^t_0$ kiegészítő változót, s azután igazolnunk kell az ott megfogalmazott 1—4. követelmények teljesülését. Nekikezdve e program végrehajtásának, először is megjegyezzük, hogy az 1. feltétel — amely abból áll, hogy a $\xi^t_0, \eta^t_0, \tilde{\eta}^t_0, \tilde{\xi}^t_0$ változók Markov-láncot képeznek — a konstrukció folytán közvetlenül teljesül. Igazoljuk most a 3. feltétel teljesülését; ez a feltételből abból állott, hogy az $\eta^t_0, \tilde{\eta}^t_0$ változókat a $\{Q^t, V^t_\varepsilon\}$ átviteli berendezés kapcsolja össze. Az (5. 1. 23) összefüggés az (1. 5. 1) egyenlőségnek a mi konkrét esetünkre való alkalmazása, és ezért csak azt kell még igazolnunk, hogy az $(\eta^t_0, \tilde{\eta}^t_0)$ pár eloszlása olyan, hogy a következő vektorra fennáll

$$(M\pi^t_1(\eta_0, \tilde{\eta}_0), \dots, M\pi^t_{N^t}(\eta_0, \tilde{\eta}_0)) \in [\overline{V}^t]_\delta \subset [\overline{V}^t]_\varepsilon. \tag{5. 2. 1}$$

Ezzel kapcsolatban jegyezzük meg, hogy (5. 1. 19)-ből következik, hogy az η^t változó 1 valószínűséggel csupán az y^t_{ij} értékeket veszi fel, és hogy (5. 1. 12) és (5. 1. 21)-nek megfelelően

$$\tilde{P}^t\{\eta_0 = y_{ij}\} = \int_{X^t} s^t_{ij}(x) p^t_\xi(dx) = p^t_{ij}. \tag{5. 2. 2}$$

Az (5. 1. 23) egyenlőség tehát azt mutatja, hogy tetszőleges k mellett

$$M\pi^t_k(\eta^t_0, \tilde{\eta}^t_0) = \sum_{i=-2}^{K^t_\delta} \sum_{j=1}^{R^t_i} p^t_{ij} \int_{\tilde{Y}^t} \pi^t_k(y_{ij}, \tilde{y}) Q(y_{ij}, d\tilde{y}), \tag{5. 2. 3}$$

és az (5. 2. 1) állítás most az (5. 1. 17) feltétel következménye.

Kezdjünk most hozzá a $\tilde{\xi}'^t_0$ valószínűségi változó megadásához. E célból elegendő megadnunk a $\xi^t_0, \eta^t_0, \tilde{\eta}^t_0, \tilde{\xi}^t_0, \tilde{\xi}'^t_0$ valószínűségi változók együttes valószínűség-eloszlását az $X^t\times Y^t\times \tilde{Y}^t\times \tilde{X}^t\times \tilde{\tilde{X}}^t$ téren. Minthogy a $\xi_0^t, \eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t, \tilde{\xi}_0^t$ változók együttes eloszlását már megadtuk az 5. 1 pontban, elegendő megadnunk tetszőleges $\tilde{A}^t\in S^t_{\tilde{X}}$ halmazra a

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0'\in\tilde{A}/\xi_0=x,\ \eta_0=y,\ \tilde{\eta}_0=\tilde{y},\ \tilde{\xi}_0=\tilde{x}\} \tag{5. 2. 4}$$

feltételes valószínűségeket. Minthogy az η_0^t változók értékkészlete az

$$y^t_{ij} \qquad (i=-2,\ldots,K^t_\delta;\ j=1,\ldots,R^t_i),$$

diszkrét érték-összesség, azért az (5. 2. 4) kifejezést csupán $y^t=y^t_{ij}$ esetében vizsgálhatjuk. Legyen mármost

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0'\in\tilde{A}/\xi_0=x,\ \eta_0=y_{ij},\ \tilde{\eta}_0=\tilde{y},\ \tilde{\xi}_0=\tilde{x}\}= \\ =\begin{cases}1, & \tilde{x}^t_i\in\tilde{A}^t,\\ 0, & \tilde{x}^t_i\notin\tilde{A}^t,\end{cases}\quad \text{ha}\quad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,K^t_\delta\\ j=1,2,\ldots,R^t_i\end{pmatrix}, \tag{5. 2. 5}$$

továbbá

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0'\in\tilde{A}/\xi_0=x,\ \eta_0=y_{0j},\ \tilde{\eta}_0=\tilde{y},\ \tilde{\xi}_0=\tilde{x}\}= \\ P^t\{\tilde{\xi}\in\tilde{A}/(\xi,\tilde{\xi})\notin F^t_\delta,\ \xi=x\} \qquad (j=1,\ldots,R^t_0), \tag{5. 2. 6}$$

ahol az egyenlőség jobb oldalán álló feltételes valószínűséget a tétel V. feltételében felhasznált $(\xi^t,\tilde{\xi}^t)$ pár együttes eloszlása alapján számítjuk ki, az F^t_δ halmazt pedig a (4. 1. 1) egyenlőség definiálja. Végezetül írjuk a következőt:

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0'\in\tilde{A}/\xi_0=x,\ \eta_0=y_{-1j},\ \tilde{\eta}_0=\tilde{y},\ \tilde{\xi}_0=\tilde{x}\}= \\ P^t\{\tilde{\xi}\in\tilde{A}/\xi=x\} \qquad (j=1,\ldots,R^t_{-1}). \tag{5. 2. 7}$$

Ami a

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0'\in\tilde{A}/\xi_0=x,\ \eta_0=y_{-2j},\ \tilde{\eta}_0=\tilde{y},\ \tilde{\xi}_0=\tilde{x}\} \qquad (j=1,\ldots,R^t_{-2})$$

feltételes valószínűségeket illeti, megadásuk módja lényegtelen, minthogy az (5. 2. 2) és (5. 1. 14) egyenlőségek azt mutatják, hogy

$$\tilde{P}^t\{\eta_0=y_{-2j}\}=0 \qquad (j=1,\ldots,R^t_{-2}). \tag{5. 2. 8}$$

Tanulmányozzuk most a $\tilde{\xi}_0'^t$ változó tulajdonságait. Mindenekelőtt igazoljuk a 4. feltételt, amely az ε valószínűségű eseménytől eltekintve pontos közleményátvitel definíciójában szerepel. E célból vegyük észre (5. 2. 5)-ből kiindulva, hogy

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0'=\tilde{x}_i/\eta_0=y_{ij}\}=1 \qquad (i=1,\ldots,K^t_\delta; j=1,\ldots,R^t_i). \tag{5. 2. 9}$$

Továbbá (5. 1. 25)-ből következik, hogy

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0=\tilde{x}_i/\eta_0=y_{ij}\}\geqq\tilde{P}^t\{\tilde{\eta}_0\in A_{ij}/\eta_0=y_{ij}\}. \tag{5. 2. 10}$$

(5. 1. 23) felhasználásával (5. 2. 9) és (5. 2. 10)-ből levezethető, hogy

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0\neq\tilde{\xi}_0'/\eta_0=y_{ij}\}\leqq 1-Q^t(y_{ij},A_{ij}) \qquad (i=1,\ldots,K^t_\delta; j=1,\ldots,R^t_i). \tag{5. 2. 11}$$

(5. 2. 11) és (5. 2. 8)-ból mármost következik, hogy

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0 \neq \tilde{\xi}_0'\} \leqq \sum_{i=1}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} \tilde{P}^t\{\eta_0 = y_{ij}\}[1 - Q^t(y_{ij}, A_{ij})] + \tag{5.2.12}$$
$$+ \sum_{j=1}^{R_0^t} \tilde{P}^t\{\eta_0 = y_{0j}\} + \sum_{j=1}^{R_{-1}^t} \tilde{P}^t\{\eta_0 = y_{-1j}\}.$$

(5. 2. 2) és (5. 1. 14)-ből következik, hogy (5. 2. 12) maga után vonja a

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0 \neq \tilde{\xi}_0'\} \leqq \sum_{i=1}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} p_{ij}^t[1 - Q^t(y_{ij}, A_{ij})] + \bar{q}_0^t + \bar{q}_{-1}^t \tag{5.2.13}$$

egyenlőtlenséget.

Az (5. 1. 16) egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy elegendően nagy t értékekre az (5. 2. 13) egyenlőtlenség jobb oldalán álló kettős összeg nem lépi túl a δ számot. (5. 1. 5)-ből és a (4. 1. 2) definícióból következik, hogy

$$\bar{q}_0^t = 1 - p_{\xi\tilde{\xi}}^t(F_\delta). \tag{5.2.14}$$

Minthogy a $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ párok sorozata információ-stabilis, az (5. 2. 14) egyenlőség jobb oldala zérushoz tart, ha $t \to \infty$, vagyis elegendően nagy t-kre a $\bar{q}_0^t$ számra fennáll: $\bar{q}_0^t \leqq \delta$. Végül (5. 1. 5) és (4. 1. 6) azt fejezik ki, hogy

$$\bar{q}_{-1}^t = 1 - \bar{Q}^t \to 0 \qquad (t \to \infty), \tag{5.2.15}$$

és azért minden elegendően nagy t-re $\bar{q}_{-1}^t \leqq \delta$. Tehát (5. 2. 13) azt mutatja, hogy minden elegendően nagy t-re

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0 \neq \tilde{\xi}_0'\} \leqq \varepsilon, \tag{5.2.16}$$

amiből következik, hogy a számunkra szükséges 4. feltétel minden elegendően nagy t-re teljesül.

Igazoljuk most a 2. feltétel teljesülését; e feltétel abból áll, hogy a ξ_0^t, $\tilde{\xi}_0'^t$ pár minden elegendően nagy t-re tegyen eleget $\{W_\varepsilon^t\}$ reprodukálás-pontossági feltételnek. Ki akarjuk számítani az $M\varrho_k^t(\xi_0, \tilde{\xi}_0')$ várható értéket. (5. 2. 5) és (5. 1. 21)-ből következik, hogy a $p_{\xi_0}^t = p_\xi^t$ mérték szerint majdnem mindenütt fennáll a következő feltételes valószínűségre:

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0' = \tilde{x}_i, \eta_0 = y_{ij}/\xi_0 = x\} = \tilde{P}^t\{\eta_0 = y_{ij}/\xi_0 = x\} = s_{ij}^t(x) \tag{5.2.17}$$
$$(i = 1, \ldots, K_\delta^t;\ j = 1, \ldots, R_i^t).$$

Továbbá, tetszőleges $\tilde{A}^t \in S_{\tilde{X}}^t$ halmazra a $p_{\xi_0}^t = p_\xi^t$ mérték szerint majdnem mindenütt fennáll a következő összefüggés:

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0' \in \tilde{A}, \eta_0 = y_{0j}/\xi_0 = x\} = \tilde{P}\{\tilde{\xi}_0' \in \tilde{A}/\xi_0 = x, \eta_0 = y_{0j}\}\tilde{P}^t\{\eta_0 = y_{0j}/\xi_0 = x\}. \tag{5.2.18}$$

(5. 1. 21)-ből következik, hogy majdnem minden x-re

$$\tilde{P}^t\{\eta_0 = y_{0j}/\xi_0 = x\} = s_{0j}^t(x). \tag{5.2.19}$$

(5. 2. 6), (5. 2. 18) és (5. 2. 19)-ből mármost levezethető, hogy majdnem minden x-re

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0'\in\tilde{A},\ \eta_0=y_{0j}/\xi_0=x\}=P^t\{\tilde{\xi}\in A/(\xi,\tilde{\xi})\notin F_\delta,\ \xi=x\}s_{0j}^t(x). \tag{5.2.20}$$

Felhasználva (5. 1. 7)-et és a (4. 1. 2) definíciót, (5. 2. 20)-ból azt kapjuk, hogy majdnem minden x-re

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{R_0}\tilde{P}^t\{\xi_0'\in\tilde{A},\ \eta_0=y_{0j}/\xi_0=x\}=\\ &=P^t\{\tilde{\xi}\in\tilde{A}/(\xi,\tilde{\xi})\notin F_\delta,\ \xi=x\}P^t\{(\xi,\tilde{\xi})\notin F_\delta/\xi=x\}=\\ &=P^t\{(\tilde{\xi}\in\tilde{A})\cap(\xi,\tilde{\xi})\notin F_\delta/\xi=x\}.\end{aligned} \tag{5.2.21}$$

Végül, (5. 2. 20) analogonjaként, (5. 2. 7)-ből levezethető, hogy a p_ξ mérték szerint majdnem mindenütt

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0'\in\tilde{A},\ \eta_0=y_{-1,j}/\xi_0=x\}=P^t\{\tilde{\xi}\in\tilde{A}/\xi=x\}s_{-1,j}^t(x). \tag{5.2.22}$$

Számítsuk most ki a következő várható értéket:

$$M\varrho_k^t(\xi_0,\tilde{\xi}_0')=\sum_{i=-2}^{K_\delta^t}\sum_{j=1}^{R_i^t}\int\limits_{\{\eta_0^t(\tilde{\omega})=y_{ij}^t\}}\varrho_k^t(\xi_0,\tilde{\xi}_0')\tilde{P}(d\tilde{\omega}). \tag{5.2.23}$$

(5. 2. 17)-ből következik, hogy

$$\int\limits_{\{\eta_0^t(\tilde{\omega})=y_{ij}^t\}}\varrho_k^t(\xi_0,\tilde{\xi}_0')\tilde{P}(d\tilde{\omega})=\int\limits_{X^t}\varrho_k^t(x,\tilde{x}_i)s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx) \tag{5.2.24}$$
$$(i=1,\dots,K_\delta^t;\ j=1,\dots,R_i^t).$$

Továbbá, (5. 2. 21)-ből adódik, hogy

$$\sum_{i=1}^{R_0^t}\int\limits_{\{\eta_0(\tilde{\omega})=y_{0j}\}}\varrho_k^t(\xi_0,\tilde{\xi}_0')\tilde{P}(d\tilde{\omega})=\iint\limits_{X^t\times\tilde{X}^t\setminus F_\delta^t}\varrho_k^t(x,\tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x}). \tag{5.2.25}$$

Végül (5. 2. 22)-ből következik, hogy

$$\int\limits_{\{\eta_0^t(\tilde{\omega})=y_{-1j}^t\}}\varrho_k^t(\xi_0,\tilde{\xi}_0')\tilde{P}(d\tilde{\omega})=\iint\limits_{X^t\times\tilde{X}^t}s_{-1j}^t(x)\varrho_k^t(x,\tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x}) \tag{5.2.26}$$
$$(j=1,\dots,R_{-1}^t).$$

Figyelembe véve (5. 2. 23), (5. 2. 24), (5. 2. 25), (5. 2. 26)-ot, valamint azt az (5. 2. 8)-ból következő tényt, hogy (5. 2. 23) $i=-2$-nek megfelelő összeadandói zérussal egyenlők, s figyelembe véve (5. 1. 7)-et is, nyerjük:

$$\begin{aligned}&M\varrho_k^t(\xi_0,\tilde{\xi}_0')=\sum_{i=1}^{K_\delta^t}\int\limits_{X^t}q_i^t(x)\varrho_k^t(x,\tilde{x}_i)p_\xi^t(dx)+\\ &+\iint\limits_{X^t\times\tilde{X}^t\setminus F_\delta^t}\varrho_k^t(x,\tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x})+\iint\limits_{X^t\times\tilde{X}^t}[1-Q^t(x)]\varrho_k^t(x,\tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x}).\end{aligned} \tag{5.2.27}$$

Összehasonlítva az (5. 2. 27) összeget a (4. 1. 7′) összeggel, látjuk, hogy a következő különbséget kell még becsülnünk:

$$\begin{aligned}(5.2.28)\qquad &\iint\limits_{X^t\times\tilde{X}^t}[1-Q^t(x)]\varrho_k^t(x,\tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x})-[1-Q^t]M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})=\\ &=\iint\limits_{X^t\times\tilde{X}^t}[1-Q^t(x)][\varrho_k^t(x,\tilde{x})-M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})]p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x}).\end{aligned}$$

(Itt figyelembe vettük Q^t definícióját; l. (4. 1. 6)-ot.)

E célból fel fogjuk használni a következő általános egyenlőtlenséget: tetszés szerinti, (z, S_Z) mérhető téren értelmezett $p(\cdot)$ mérték és tetszőleges mérhető $\varphi(z)$ és $0 \leqq f(z) \leqq 1$ függvények esetén $b>0$-ra fennáll:

$$(5.2.29)\qquad \Big[\int\limits_Z|\varphi(z)|f(z)p(dz)\Big]^{1+b}\leqq\int\limits_Z|\varphi(z)|^{1+b}p(dz)\Big[\int\limits_Z f(z)p(dz)\Big]^b.$$

Az (5. 2. 29) egyenlőtlenség az $|x|^{1+b}$ függvény konvex voltának következménye. Alkalmazva (5. 2. 29)-et, látjuk, hogy

$$\begin{aligned}(5.2.30)\qquad &\Big|\iint\limits_{X^t\times\tilde{X}^t}[1-Q^t(x)]\varrho_k^t(x,\tilde{x})p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x})-[1-Q^t]M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})\Big|\leqq\\ &\leqq\Big|\iint\limits_{X^t\times\tilde{X}^t}[1-Q^t(x)]|\varrho_k^t(x,\tilde{x})-M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})|p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x})\Big|\leqq\\ &\leqq\Big[\iint\limits_{X^t\times\tilde{X}^t}|\varrho_k^t(x,\tilde{x})-M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})|^{1+b}p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx,d\tilde{x})\Big]^{\frac{1}{1+b}}\times\\ &\times\Big[\iint\limits_{X^t\times\tilde{X}^t}[1-Q^t(x)]p_{\xi\tilde{\xi}}(dx,d\tilde{x})\Big]^{\frac{b}{1+b}}\leqq[c^t]^{\frac{1}{1+b}}[1-Q^t]^{\frac{b}{1+b}}.\end{aligned}$$

Az (1. 7. 12) és (4. 1. 6) feltételek azt mutatják, hogy az (5. 2. 30) egyenlőtlenség jobb oldalán álló kifejezés zérushoz tart, ha $t\to\infty$. Ebből következik, hogy minden elegendően nagy t-re az (5. 2. 28) különbség abszolút értékben nem fogja túllépni a δ számot. Alkalmazva a közleményekre vonatkozó alaplemma (4. 1. 7′) állítását és az (5. 1. 1) feltételt, látjuk, hogy minden elegendően nagy t-re fennáll a következő vektorra:

$$(5.2.31)\qquad (M\varrho_1^t(\xi_0,\tilde{\xi}_0'),\ldots,M\varrho_{M^t}^t(\xi_0,\tilde{\xi}_0'))\in[\tilde{W}^t]_\varepsilon,$$

amit bizonyítanunk kellett, hogy igazoljuk a 2. feltételt. Ezzel be is fejeztük az 1. tétel bizonyítását.

5. 3. A 2. tétel bizonyítása

Tekintettel arra, hogy a 2. tétel mindhárom állítása — A, B és C — analóg meggondolások segítségével bizonyítható, ez állítások közül csupán az utolsó bizonyítását közöljük. Jelöljük $\gamma > 0$-val a következő határértéket (l. (1. 7. 4)-et):

$$\gamma = 1 - \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{H^t(W)}{C^t(Q, V)}. \tag{5. 3. 1}$$

A VI., illetve VII. feltételek azt mutatják, hogy megválasztható egy $\varepsilon > 0$ szám úgy, hogy $\varepsilon \leqq \delta$ legyen (ahol δ a IV′, V′ feltételekben szereplő δ), és hogy minden elegendően nagy t-re fennálljon

$$\left| \frac{H^t(W_{-\varepsilon})}{H^t(W)} - 1 \right| < \alpha, \tag{5. 3. 2}$$

és

$$\left| \frac{C^t(Q, V_{-\varepsilon})}{C^t(Q, V)} - 1 \right| < \alpha, \tag{5. 3. 3}$$

ahol α-t oly kicsinyre választottuk, hogy fennálljon

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} > 1 - \gamma. \tag{5. 3. 4}$$

Akkor (5. 3. 1)-ből következik, hogy ilyen ε mellett

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{H^t(W_{-\varepsilon})}{C^t(Q, V_{-\varepsilon})} < 1. \tag{5. 3. 5}$$

(5. 3. 2)-ből és az I. feltételből az is következik, hogy

$$\lim_{t\to\infty} H^t(W_{-\varepsilon}) = \infty. \tag{5. 3. 6}$$

Az (5. 3. 6), (5. 3. 5) és IV′, V′ feltételek azt fejezik ki, hogy a $\{W^t_{-\varepsilon}\}$ közleménysorozatra és a $\{Q^t, V^t_{-\varepsilon}\}$ átviteli berendezés-sorozatra teljesülnek a már bebizonyított 1. tétel összes feltételei. Következésképp, alkalmazva ezt a tételt (ε helyett $\frac{\varepsilon}{2}$-t írva) és figyelembe véve, hogy a $[[\overline{W}]_{-\varepsilon}]_{\frac{\varepsilon}{2}}$ halmazra fennáll $[[\overline{W}]_{-\varepsilon}]_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset \overline{W}$ valamint, hogy $[[\overline{V}]_{-\varepsilon}]_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset \overline{V}$, megkapjuk a minket érdeklő 2. tételt.

5. 4. A 3. tétel bizonyítása. Az alaplemmák élesítése

Ennek a tételnek a bizonyítása szükségessé teszi, hogy kissé élesítsük a közleményekre és átviteli berendezésekre vonatkozó alaplemmák eredményeit — egyébként majdnem semmit se változtatva bizonyításaik menetén. Mindenekelőtt fogalmazzuk meg a közleményekre vonatkozó alaplemma következő általánosítását.

ÉLESÍTETT LEMMA A KÖZLEMÉNYEKRŐL. *Tegyük fel, hogy a közleményekre vonatkozó alaplemma (4. §) feltételein kívül teljesül a 3. tétel VIII. feltétele is. Akkor az* $\tilde{x}_i^t$ *pontok és* $q_i^t(x)$ *függvények megválaszthatók úgy, hogy a lemma I. és III. állításai mellett teljesüljenek még a következő állítások is.*

II′. *tetszőleges* $a>0$*-ra*

$$\lim_{t\to\infty}[1-Q^t](v^t)^a=0. \tag{4. 1. 6′}$$

IV. *minden* $t\geqq T$, $i=1,\dots,K_\varepsilon^t$, $x^t\in X^t$ *és* $k=1,\dots,M^t$*-re*

$$\int_{X^t}|\varrho_k^t(x,\tilde{x}_i)-M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})|q_i^t(x)p_\xi^t(dx)\leqq J^t_{\frac{\varepsilon}{1000}}\int_{X^t}q_i^t(x)p_\xi^t(dx). \tag{5. 4. 1}$$

V. *minden olyan* $t\geqq T$, $k=1,\dots,M^t$*-re és minden* $i=1,\dots,K_\varepsilon^t$*-re, amelyekre fennáll*

$$\bar{q}_i^t=\int_{X^t}q_i^t(x)p_\xi^t(dx)>0, \tag{5. 4. 2}$$

igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\int_{X^t}|\varrho_k^t(x^t,\tilde{x}_i)-M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})|p_\xi^t(dx)\leqq 2^{\frac{\varepsilon}{100}H^t(W)}. \tag{5. 4. 3}$$

Ennek az állításnak a bizonyításához a 4. §-beli konstrukción csupán a következő változtatásokat kell elvégeznünk. Írjunk a rövidség kedvéért $\bar{\varepsilon}=\dfrac{\varepsilon}{1000}$-et. A 4.4. pont tárgyalását úgy módosítjuk, hogy bevezetünk egy θ tetszőleges konstansot. U_k-val fogjuk jelölni az $(x,\tilde{x})$ pontoknak azt a halmazát, melyekben $\tilde{x}$ olyan, hogy fennáll:

$$\int_X|\varrho_k(x,\tilde{x})-M\varrho_k(\xi,\tilde{\xi})|\varrho_\xi(dx)>\theta. \tag{5. 4. 4}$$

Megjegyezzük, hogy mivel (1. 7. 23)-ból következik

$$\int_{\tilde{X}}\left[\int_X|\varrho_k(x,\tilde{x})-M\varrho_k(\xi,\tilde{\xi})|\,p_\xi(dx)\right]^{1+\hat{b}}p_{\tilde{\xi}}(d\tilde{x})\leqq\hat{c}, \tag{5. 4. 5}$$

azért a Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$p_{\xi\tilde{\xi}}(U_k)\leqq\frac{\hat{c}}{\theta^{1+\hat{b}}}. \tag{5. 4. 6}$$

Felhasználva most a $B_{\bar{\varepsilon}}$ halmazt, amelyet a VIIId. feltételben vezettünk be, vezessük be — eltérően attól, ahogy azt a 4. 4 pontban tettük — a következő halmazt:

$$G=(D_1\cup\dots\cup D_M)\cup(U_1\cup\dots\cup U_M)\cup(X\times\tilde{X}\setminus B_{\bar{\varepsilon}})\cap F. \tag{4. 4. 4′}$$

A (4. 4. 5) egyenlőtlenséget most az (5. 4. 6) és (4. 4. 2)-ből levezetett következő egyenlőtlenség fogja helyettesíteni:

$$p_{\xi\tilde{\xi}}(G) \leqq \frac{Mc}{\beta^{1+b}} + \frac{M\hat{c}}{\theta^{1+\hat{b}}} + [1 - p_{\xi\tilde{\xi}}(B_{\bar{\varepsilon}})]. \tag{4. 4. 5'}$$

A (4. 4. 6) egyenlőtlenséget a következő egyenlőtlenség fogja helyettesíteni:

$$\int\int_G |\varrho_k(x, \tilde{x}) - M\varrho_k(\xi, \tilde{\xi})| p_{\xi\tilde{\xi}}(dx, d\tilde{x}) \leqq \tag{4. 4. 6'}$$

$$\leqq \frac{c(M+1)}{\beta^b} + \frac{\beta M\hat{c}}{\theta^{1+\hat{b}}} + [1 - p_{\xi\tilde{\xi}}(B_{\bar{\varepsilon}})]\beta.$$

A további konstrukciókat változatlanul hagyjuk, csupán a (4. 4. 11) egyenlőtlenséget kell kicserélni a

$$\int_X (\bar{r}(x) - r(x)) p_\xi(dx) \leqq \frac{Mc}{\beta^{1+b}} + \frac{M\hat{c}}{\theta^{1+\hat{b}}} + [1 - p_{\xi\tilde{\xi}}(B_{\bar{\varepsilon}})] \tag{4. 4. 11'}$$

-vel, és a (4. 4. 29) egyenlőtlenséget

$$MQ(\tilde{\omega}) \geqq (1 - 2\gamma)\left[1 - \frac{2^{H(W)\left(1 + \frac{3\varepsilon}{4}\right)}}{K\gamma^2}\right] - \frac{Mc}{\beta^{1+b}} - \frac{M\hat{c}}{\theta^{1+\hat{b}}} - [1 - p_{\xi\tilde{\xi}}(B_{\bar{\varepsilon}})] \tag{4. 4. 29'}$$

-vel. A 4. 5 pont konstrukcióit változatlanul hagyjuk.

A 4. 6 pontot illetőleg a (4. 6. 1) definíciókat a következőképpen választjuk meg, ill. egészítjük ki:

$$\theta^t = 2^{H^t(W)\frac{\varepsilon}{100}}, \quad \beta^t = \min\left(2^{H^t(W)\frac{\varepsilon}{200}}, [1 - p^t_{\xi\tilde{\xi}}(B_{\bar{\varepsilon}})]^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{4. 6. 1'}$$

Akkor az (1. 7. 5) és (1. 7. 24) feltételekből az fog következni, hogy elegendően nagy t-kre

$$\frac{M^t\hat{c}^t}{(\theta^t)^{1+\hat{b}}} \leqq 2^{-H^t(W)\frac{\varepsilon}{500}}. \tag{5. 4. 7}$$

Figyelembe véve azokat a meggondolásokat, amelyeket a 4. 6 pontban a (4. 6. 3) egyenlőtlenség levezetéséhez felhasználtunk, figyelembe véve továbbá kiegészítőleg (5. 4. 7) és (4. 6. 1')-t, levezethetjük (4. 4. 29')-ből a következő (4. 6. 3') egyenlőtlenséget, amely fenn fog állni minden elegendően nagy t-re:

$$MQ^t(\tilde{\omega}) \geqq 1 - \varphi^t_\varepsilon, \tag{4. 6. 3'}$$

ahol

$$\varphi^t_\varepsilon = 2^{-H^t(W)\frac{\varepsilon}{1000}} + [1 - p^t_{\xi\tilde{\xi}}(B_{\bar{\varepsilon}})] + [1 - p^t_{\xi\tilde{\xi}}(B_{\bar{\varepsilon}})]^{\frac{1+b}{2}} M^t c^t. \tag{5. 4. 8}$$

Az (1. 7. 5), (1. 7. 27) és (1. 7. 31) feltételekből következik, hogy tetszőleges $a > 0$-ra

$$\lim_{t \to \infty} \varphi^t_\varepsilon (v^t)^a = 0. \tag{5. 4. 9}$$

A (4. 6. 4), (4. 6. 5), (4. 6. 6), (4. 6. 7) egyenlőségek levezetésében felhasznált meggondolások nem változnak meg. Csupán a (4. 6. 8) egyenlőtlenség levezetésében kell (4. 4. 6) helyett ennek az egyenlőtlenségnek új, (4. 4. 6′) variánsát felhasználni, és ennek következtében (4. 6. 8)-at a

$$\left| \iint\limits_{F_\varepsilon^t \setminus \bar{F}_\varepsilon^t} \varrho_k^t(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) - [Q^t(\tilde{\omega}) - \bar{Q}^t(\tilde{\omega})] M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}) \right| \leqq \qquad (4.6, 8')$$
$$\leqq \frac{c^t(M^t+1)}{(\beta^t)^b} + \frac{\beta^t M^t \hat{c}^t}{(\theta^t)^{1+\hat{b}}} + \beta^t[1 - p_{\xi\tilde{\xi}}^t(B_{\tilde{\varepsilon}})]$$

egyenlőtlenséggel helyettesíteni. Megjegyezzük, hogy (4. 6. 1), (4. 6. 1′), és az (1. 7. 5) és (1. 7. 24) feltételekből következik, hogy elegendően nagy t-kre

$$\frac{\beta^t M^t \hat{c}^t}{(\theta^t)^{1+\hat{b}}} \leqq 2^{-H^t(W)\frac{\varepsilon}{500}}; \qquad (5.4.10)$$

a (4. 6. 10) 4. 6 pontbeli levezetésében felhasznált meggondolásokból, valamint (5. 4. 10)-ből és az (1. 7. 31) és (4. 6. 1′)-ből folyó

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t[1 - p_{\xi\tilde{\xi}}^t(B_{\tilde{\varepsilon}})] = 0 \qquad (5.4.11)$$

állításból következik, hogy minden elegendően nagy t-re

$$M|S_k^t(\tilde{\omega}) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi})| \leqq \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (4.6.10')$$

(4. 6. 10′)-ből következik (4. 6. 11), továbbá (4. 6. 12) is. A (4. 6. 14) egyenlőtlenség helyett most a következő fog állni

$$\tilde{P}^t\{Q(\tilde{\omega}) \geqq 1 - 4\varphi_\varepsilon^t\} \geqq \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (4.6.13')$$

A (4. 6. 15) egyenlőtlenségek közül a második helyett a következő fog állni:

$$Q^t(\tilde{\omega}_0) \geqq 1 - 4\varphi_\varepsilon^t. \qquad (4.6.14')$$

A (4. 1. 6′) feltétel (4. 6. 14′) és (5. 4. 9)-ből következik.

Igazoljuk most, hogy teljesülnek a közleményekre vonatkozó általánosított lemma IV. és V. állításai. E célból megjegyezzük, hogy a (4. 4. 13), (4. 4. 8), (4. 4. 7) és (4. 4. 4′) definíciók mutatják, hogy

$$q_i^t(x, \tilde{\omega}) = 0, \quad \text{ha} \quad (x, \zeta_i(\tilde{\omega})) \notin B_\varepsilon. \qquad (5.4.12)$$

Ezért (1. 7. 29) és (4. 6. 16)-ból következik, hogy ha $q_i^t(x^t) > 0$, akkor

$$|\varrho_k^t(x^t, \tilde{x}_i^t) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi})| \leqq J_\varepsilon^t$$

Ebből közvetlenül következik a keresett (5. 4. 1) egyenlőtlenség. Továbbá (5. 4. 12) analógiájára megállapítjuk, hogy

$$q_i^t(x, \tilde{\omega}) = 0, \quad \text{ha} \quad (x, \zeta_i(\tilde{\omega})) \in U_k, \qquad (5.4.13)$$

úgyhogy vagy $q_i^t(x)=0$, vagy pedig ((4. 6. 1')-nek megfelelően) teljesül az (5. 4. 3) egyenlőtlenség, amit bizonyítanunk kellett.

Fogalmazzuk most meg FEINSTEIN átviteli berendezésekről szóló lemmájának következő általánosítását.

FEINSTEIN ÉLESÍTETT LEMMÁJA. *Tegyük fel, hogy teljesülnek Feinstein lemmájának összes feltételei, melyeket a 3. 1 pontban fogalmaztunk meg. Tegyük fel továbbá, hogy az M^t szám olyan, hogy tetszőleges $\delta>0$ mellett*

(5. 4. 14) $$\lim_{t\to\infty} M^t \cdot 2^{-\delta C^t(Q,V)}=0.$$

Tetszőleges $k=1,\dots,M^t$ mellett legyen adva a ${}_k\varrho_{ij}^t$, $i=1,\dots,L_\varepsilon^t$, $j=1,\dots,L_\varepsilon^t$ $(i\neq j)$ nemnegatív számok olyan összessége, hogy minden $j=1,\dots,L_\varepsilon^t$-re

(5. 4. 15) $$\sum_{i(i\neq j)} {}_k\varrho_{ij}^t \leqq 2^{\frac{\varepsilon}{100}C^t(Q,V)} \text{ legyen.}$$

Akkor az y_i^t pontokat és A_i^t halmazokat meg lehet úgy választani, hogy az I, II, III. állításokon kívül még a következő állítások is teljesüljenek:

IV. *tetszőleges $t\geqq T$-re és tetszőleges $i=1,\dots,L_\varepsilon^t$-re*

(5. 4. 16) $$Q^t(y_i, A_i)\geqq 1-p_{\eta\tilde\eta}^t\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde\eta}(y,\tilde y)}{I(\eta,\tilde\eta)}-1\right|>\frac{\varepsilon}{6}\right)-2^{-\frac{\varepsilon}{200}C^t(Q,V)},$$

V. *tetszőleges $k=1,\dots,M^t$ mellett és minden $t\geqq T$-re*

(5. 4. 17) $$\sum_{i=1}^{L_\varepsilon^t}\sum_{j=1}^{L_\varepsilon^t} {}_k\varrho_{ij}^t Q^t(y_i, A_j)\leqq\frac{\varepsilon}{3}.$$

Ennek az állításnak a bizonyításánál változatlanul megtartjuk a 3. 2—3. 8 pontok minden meggondolásait, csupán a következő vonatkozásban egészítjük ki azokat.

Megjegyezzük, hogy (3. 5. 16) és (3. 5. 5)-ből következik, hogy tetszőleges $i=1,\dots,L$-re

(5. 4. 18) $$MQ(\zeta_i(\tilde\omega), \overline{F}_i(\tilde\omega))\geqq p_{\eta\tilde\eta}(F)-L\cdot 2^{-C(Q,V)(1-3\delta)};$$

Továbbá megjegyezzük, hogy (3. 5. 4)-ből következik, hogy minden i és j-re $(i\neq j)$

(5. 4. 19) $$MQ(\zeta_i(\tilde\omega), \overline{F}_j(\tilde\omega))\leqq MQ(\zeta_i(\tilde\omega), F_{\zeta_j(\tilde\omega)}).$$

Hogy az (5. 4. 19) egyenlőtlenségnek értelme legyen, igazolnunk kell, hogy $Q(\zeta_i(\tilde\omega), F_{\zeta_j(\tilde\omega)})$ mérhető függvény lesz a $\mathfrak{B}$ σ-algebrára vonatkozólag. Ez a (3. 4. 2) függvény már bizonyított mérhetőségéből következik, hogyha abba $\mathfrak{G}=\mathfrak{F}_j$, $G(\tilde\omega)=$ $=F_{\zeta_j(\tilde\omega)}$-ot helyettesítünk (l. (3. 5. 1)). Minthogy a $\zeta_i(\tilde\omega)$ és $\zeta_j(\tilde\omega)$ valószínűségi változók függetlenek, és mindegyiküknek $p_\eta(\cdot)$ az eloszlása, azért

(5. 4. 20) $$MQ(\zeta_i(\tilde\omega), F_{\zeta_j(\tilde\omega)})=\int_Y\int_Y Q(y_1, F_{y_2}(p_\eta\times p_\eta(dy_1, dy_2)).$$

(Szigorúan véve, még be kell bizonyítani azt is, hogy $Q(y_1, F_{y_2})$ az (y_1, y_2) változó-párnak az $S_Y \times S_Y$ σ-algebrára vonatkozólag mérhető függvénye. Az erre vonatkozó meggondolást nem közöljük, minthogy az analogonja a 3. 4 pontban közölt meggondolásnak.) Minthogy az $\eta, \tilde{\eta}$ változókat a $\{Q, V\}$ átviteli berendezés kapcsolja össze, azért (l. (1. 5. 1)-et)

$$(5.4.21) \qquad \int_Y Q(y_1, F_{y_2}) p_\eta(dy_1) = p_{\tilde{\eta}}(F_{y_2}).$$

Alkalmazva Fubini tételét és ezt a tényt, (5. 4. 20)-ból levezethető, hogy

$$(5.4.22) \qquad MQ(\zeta_i, (\tilde{\omega}), F_{\zeta_j(\tilde{\omega})}) = \int_Y p_{\tilde{\eta}}(F_y) p_\eta(dy).$$

A (3. 2. 2) és (5. 4. 19) egyenlőtlenségekből a következő végső becslést vezethetjük le:

$$(5.4.23) \qquad MQ(\zeta_i(\tilde{\omega}), \overline{F}_j(\tilde{\omega})) \leqq 2^{-C(Q,V)(1-\delta)}.$$

Ekkor (5. 4. 15)-ből következik, hogy tetszőleges k-ra

$$(5.4.24) \qquad M\left\{\sum_{i=1}^{L} \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{L} {}_k\varrho_{ij} Q(\zeta_i(\tilde{\omega}), \overline{F}_j(\tilde{\omega}))\right\} \leqq L 2^{\frac{\varepsilon}{100} C(Q,V)} 2^{-C(Q,V)(1-\delta)}.$$

Most még kissé kiegészítjük a 3. 8 pont meggondolásait. E pont jelölései mellett (5. 4. 18) és (5. 4. 24) a következő alakra írhatók át:

$$(5.4.25) \qquad MQ^t(\zeta_i(\tilde{\omega}), \overline{F}_i(\tilde{\omega})) \geqq p^t_{\eta\tilde{\eta}}(F) - L^t_\varepsilon \cdot 2^{-(1-3\delta)C^t(Q,V)}$$

és minden $k = 1, \ldots, M^t$-re

$$(5.4.26) \qquad M\left\{\sum_{i=1}^{L^t_\varepsilon} \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{L^t_\varepsilon} {}_k\varrho^t_{ij} Q^t(\zeta_i(\tilde{\omega}), \overline{F}_j(\tilde{\omega}))\right\} \leqq L^t_\varepsilon \cdot 2^{\frac{\varepsilon}{100} C^t(Q,V)} \cdot 2^{-(1-\delta)C^t(Q,V)}.$$

Az L^t_ε szám és a δ szám meghatározásából következik, hogy minden elegendően nagy t-re

$$(5.4.27) \qquad \begin{aligned} L^t_\varepsilon \cdot 2^{-C^t(Q,V)(1-3\delta)} &\leqq 2^{-\frac{\varepsilon}{200} C^t(Q,V)}, \\ L^t_\varepsilon \cdot 2^{-C^t(Q,V)(1-\delta)} \cdot 2^{\frac{\varepsilon}{100} C^t(Q,V)} &\leqq 2^{-\frac{\varepsilon}{200} C^t(Q,V)}. \end{aligned}$$

Ezért a (3. 8. 9), (5. 4. 25), (5. 4. 26) és (5. 4. 14) összefüggésekből levezethető, hogy létezik oly $\tilde{\omega}^t_0 \in \tilde{\Omega}^t$ elemi esemény, hogy (3. 8. 10)-en kívül még a következő egyenlőtlenségek is teljesülnek,

$$(5.4.28) \qquad Q^t(\zeta_i(\tilde{\omega}_0), \overline{F}_i(\tilde{\omega}_0)) \geqq p^t_{\eta\tilde{\eta}}(F) - 2^{-\frac{\varepsilon}{200} C^t(Q,V)},$$

és minden $k = 1, \ldots, M^t$-re

$$(5.4.29) \qquad \sum_{i=1}^{L^t_\varepsilon} \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{L^t_\varepsilon} {}_k\varrho^t_{ij} Q^t(\zeta_i(\tilde{\omega}^t_0), \overline{F}^t_j(\tilde{\omega}^t_0)) \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ha most

$$y_i^t = \zeta_i^t(\tilde{\omega}_0^t),$$

$$A_i^t = \overline{F}_i^t(\tilde{\omega}_0^t),$$

olyan pontok rendszerét kapjuk, amely eleget tesz FEINSTEIN élesített lemmája I—V. állításainak.

5. 5. A 3. tétel bizonyítása. Az átvitel módszerének megkonstruálása

Be fogjuk bizonyítani, hogy a 3. tétel (1. 7. 32) feltételéből következik annak VIIId. feltétele. E célból vezessük be a következő jelölést:

$$J_\delta^t = \min\left(\left[p_{\eta\tilde{\eta}}^t\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y,\tilde{y})}{I(\eta,\tilde{\eta})}-1\right|>\delta\right)\right]^{-\frac{1}{2}},\ 2^{\frac{\delta}{100}H^t(W)}\right) \tag{5.5.1}$$

és a B_δ^t halmaznak vegyük a következőt:

$$B_\delta^t = \{|\varrho_k^t(x,\tilde{x}) - M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})| \leqq J_\delta^t,\ k=1,\dots,M^t\}. \tag{5.5.2}$$

Ekkor az (1. 7. 29) feltétel konstrukciónk alapján igaz. Az (1. 7. 30) feltétel egyrészt abból következik, hogy az $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$ sorozat információ-stabilitása folytán

$$\lim_{t\to\infty}\left[p_{\eta\tilde{\eta}}^t\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y,\tilde{y})}{I(\eta,\tilde{\eta})}-1\right|>\delta\right)\right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

— másrészt pedig az (5. 5. 1) definícióból. Hogy igazoljuk az (1. 7. 31) feltétel teljesülését, először is megjegyezzük, hogy (1. 7. 11)-ből a Csebisev-féle egyenlőtlenség segítségével következik, hogy

$$1 - p_{\xi\tilde{\xi}}^t(B_\delta) \leqq \frac{c^t M^t}{(J_\delta^t)^{1+b}}, \tag{5.5.3}$$

az (5. 5. 1) definícióból pedig az következik, hogy

$$1 - p_{\xi\tilde{\xi}}^t(B_\delta) \leqq c^t M^t p_{\eta\tilde{\eta}}^t\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y,\tilde{y})}{I(\eta,\tilde{\eta})}-1\right|>\delta\right)^{\frac{1+b}{2}} + c^t M^t \cdot 2^{-\frac{\delta(1+b)}{100}H^t(W)}. \tag{5.5.4}$$

Az (1. 7. 31) feltétel mármost (1. 7. 32), (1. 7. 12) és (1. 7. 5)-ből következik. Most megmutatjuk, hogy (1. 7. 28) és VIIIa.-ból következik a VIIIc. feltétel. E célból megjegyezzük, hogy (1. 7. 23)-ból és a Csebisev-féle egyenlőtlenségből következik, hogy tetszőleges $k=1,\dots,M^t$ mellett

$$p_{\tilde{\xi}}\left(\int_{X^t} \varrho_k^t(x,\tilde{x}) - M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})|^{1+\hat{b}}p(dx) \geqq 2\hat{c}^t M^t\right) \leqq \frac{\hat{c}^t}{2\hat{c}^t M^t} = \frac{1}{2M^t}. \tag{5.5.5}$$

Ebből következik, hogy létezik egy olyan $\tilde{x}_+$ pont, amelyre

$$\max_{k=1,\dots,M^t}\int_{X^t}|\varrho_k^t(x,\tilde{x}_+) - M\varrho_k^t(\xi,\tilde{\xi})|^{1+\hat{b}}p(dx) \leqq 2\hat{c}^t M^t. \tag{5.5.6}$$

(1. 7. 24) és (1. 7. 28)-ból következik, hogy $v^t \leqq 2\hat{c}^t M^t$ esetén fennáll az (1. 7. 27) egyenlőség.

Ennek a tételnek a bizonyításában megtartjuk az 5. 1 pont minden konstrukcióját; csak azokat a kiegészítéseket említjük meg külön, amelyeket hozzá kell fűzni az ott elvégzett konstrukciókhoz. Tegyük fel, hogy teljesülnek a 3. tétel feltételei. Annak analógiájára, ahogy az az 5. 1 pontban történt, kapjuk, hogy olyan δ-kra, melyek eleget tesznek az (5. 1. 1) feltételnek, teljesülnek, az 5. 4 pontban közölt, a közleményekre vonatkozó élesített lemma feltételei, ha azokban ε-t δ-val helyettesítjük. Tekintsük most ebben az élesített lemmában bevezetett $q_i^t(x)$ és $r^t(x)$ függvényeket, és végezzük el velük ugyanazokat a konstrukciókat, amelyek az 5. 4 pontban szerepeltek.

Áttérve a $\{Q^t, V^t\}$ átviteli berendezés-sorozat tanulmányozására, mindenekelőtt megjegyezzük, hogy Feinstein végtelen kapacitású átviteli berendezésekre vonatkozó lemmájának állítása (l. a 3. 9 pontot) erősebb, mint Feinstein élesített lemmájának állítása (5. 4. pont). Ennek folytán — ugyanúgy okoskodva, mint az 5. 1 pontban is — észrevehetjük, hogy a 3. tétel feltételeinek teljesüléséből következik, hogy minden elegendően nagy t-re teljesül FEINSTEIN élesített lemmájának állítása. A p_{ij}^t valószínűségek általunk használt kettős számozásának megfelelően e lemma (3. 1. 7) (5. 4. 16), (5. 4. 17) állításai (5. 1. 17) alakban, illetve a következő alakokban írhatók:

$$Q^t(y_{ij}, A_{ij}) \geqq 1 - p_{\eta\tilde{\eta}}^t\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y})}{I(\eta, \tilde{\eta})} - 1\right| > \frac{\delta}{6}\right) - 2^{-\frac{\delta}{200}C^t(Q,V)}, \tag{5. 5. 7}$$

és

$$\sum_{i=-2}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} \sum_{\substack{l=-2 \\ (i,j)\neq(l,m)}}^{K_\delta^t} \sum_{m=1}^{R_l^t} {}_k\varrho_{ij;lm}^t Q^t(y_{ij}, A_{lm}) \leqq \frac{\delta}{3}, \tag{5. 5. 8}$$

(ε-t újból δ-val helyettesítettük; a ϱ számok most négy indextől függenek).

A $\zeta_0^t, \eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t, \tilde{\zeta}_0^t$ változók megkonstruálása ugyanúgy történik, mint az 5. 1 pontban. A különbség csupán abból áll, hogy az $\tilde{x}_+^t$ pont, amelyet a $p_{\tilde{Y}\tilde{X}}^t$ $(\tilde{y}, \tilde{A})$ átmenet-függvény megkonstruálásánál használtunk fel, nem választható meg tetszőlegesen, hanem úgy, hogy fennálljon:

$$\int_{X^t} |\varrho_k^t(x, \tilde{x}_+) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi})|^{1+\hat{b}} p_\xi^t(dx) \leqq v^t. \tag{5. 5. 9}$$

Egy ilyen megválasztás lehetősége az (1. 7. 26) feltételből következik.

5. 6. A 3. tétel bizonyítása. A tétel feltételei teljesülésének igazolása

Az a tény, hogy a $\zeta_0^t, \eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t, \tilde{\zeta}_0^t$ változók Markov-láncot képeznek, közvetlenül folyik magából a konstrukcióból. Az a tény, hogy az $\eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t$ változókat a $\{Q^t, V_\varepsilon^t\}$ átviteli berendezés kapcsolja össze, pontosan ugyanúgy bizonyítható, mint az 5. 2 pontban. A tétel bizonyításához igazolnunk kell, hogy elegendően nagy t-re a $\zeta_0^t, \tilde{\zeta}_0^t$ változó-pár eleget tesz a $\{W_\varepsilon^t\}$ reprodukálás-pontossági feltételnek. Abból a tényből, hogy a $\zeta_0^t, \eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t, \tilde{\zeta}_0^t$ változók Markov-láncot képeznek, és az (5. 1. 25),

(5. 1. 23), (5. 1. 21) feltételekből levezethető, hogy a következő feltételes valószínűségre majdnem mindenütt fennáll:

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0 = x_l | \xi_0 = x\} = \sum_{i=-2}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} \sum_{m=1}^{R_l^t} s_{ij}^t(x) Q^t(y_{ij}, A_{lm}) \qquad (l=1, \ldots, K_\delta^t) \tag{5.6.1}$$

és (számításba véve, hogy definíció szerint $\tilde{x}_{-2}^t = \tilde{x}_{-1}^t = \tilde{x}_0^t = \tilde{x}_+^t$)

$$\tilde{P}^t\{\tilde{\xi}_0 = \tilde{x}_+ | \xi_0 = x\} = \tag{5.6.2}$$
$$= \sum_{i=-2}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} \left(\sum_{l=-2}^{l=0} \sum_{m=1}^{R_l^t} s_{ij}^t(x) Q^t(y_{ij}, A_{lm}) + s_{ij}^t(x) Q^t(y_{ij}, \tilde{X} \setminus \bigcup A_{lm}) \right).$$

Rögzítsünk most valamilyen $k=1, \ldots, M^t$, számokat, és írjuk a rövidség kedvéért a következőt:

$$\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}) = \varrho_k^t(x, \tilde{x}) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}). \tag{5.6.3}$$

(5. 1. 18)-ból most levezethető, hogy a következő várható értékre fennáll:

$$M\bar{\varrho}_k^t(\xi_0, \tilde{\xi}_0) = \sum_{i=-2}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} \Bigg\{ \sum_{l=1}^{K_\delta^t} \sum_{m=1}^{R_l^t} Q^t(y_{ij}, A_{lm}) \int_{X^t} \bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_l) s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx) +$$
$$+ \left[\sum_{l=-2}^{0} \sum_{m=1}^{R_l^t} Q^t(y_{ij}, A_{lm}) + Q^t(y_{ij}, \tilde{X} \setminus \bigcup_{l,m} A_{lm}) \right] \cdot \tag{5.6.4}$$
$$\cdot \int_{X^t} \bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+) s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx) \Bigg\}.$$

Foglalkozzunk most az (5. 6. 4) összeg egyes részeinek tanulmányozásával. Rögzítsük az $i=1, \ldots, K_\delta^t$; $j=1, \ldots, R_i^t$ indexeket, és jegyezzük meg, hogy

$$\sum_{l=1}^{K_\delta^t} \sum_{m=1}^{R_l^t} Q^t(y_{ij}, A_{lm}) \int_{X^t} \bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_l) s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx) =$$
$$= \int_{X^t} \bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_i) s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx) + [1 - Q^t(y_{ij}, A_{ij})] \int_{X^t} \bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_i) s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx) + \tag{5.6.5}$$
$$+ \sum_{\substack{l=1 \\ (l,m) \neq (i,j)}}^{K_\delta^t} \sum_{m=1}^{R_l^t} Q^t(y_{ij}, A_{lm}) \int_{X^t} \bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_l) s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx).$$

Az (5. 1. 7) definícióból következik, hogy

$$\sum_{j=1}^{R_i^t} \left| \int_{X^t} \bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_i) s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx) \right| \leqq \tag{5.6.6}$$
$$\int_{X^t} |\varrho_k^t(x, \tilde{x}_i) - M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi})| q_i^t(x) p_\xi^t(dx).$$

Ezért (5. 4. 1) és (5. 5. 7)-ből következik, hogy az (5. 6. 5) egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő második tagok összegének abszolút értékére fennáll:

$$\left|\sum_{i=1}^{K_\delta^t}\sum_{j=1}^{R_i^t}[1-Q^t(y_{ij},A_{ij})]\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_i)s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)\right|\leqq$$

(5. 6. 7)

$$\leqq J^t_{\frac{\delta}{1000}}\left[p_{\eta\tilde{\eta}}^t\left(\left|\frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y,\tilde{y})}{I(\eta,\tilde{\eta})}-1\right|>\frac{\delta}{6}\right)+2^{-\frac{\delta}{200}C^t(Q,V)}\right]\cdot\sum_{i=1}^{K_\delta^t}\int_{X^t}q_i^t(x)p_\xi^t(dx).$$

A tétel (1. 7. 30) feltételéből, valamint abból, hogy $\sum_{i=1}^{K_\delta^t} q_i^t(x)\leqq 1$, következik, hogy az (5. 6. 7) egyenlőtlenség jobb oldala 0-hoz tart, ha $t\to\infty$. Ezért minden elegendően nagy t-re

(5. 6. 8)
$$\left|\sum_{i=1}^{K_\delta^t}\sum_{j=1}^{R_i^t}[1-Q^t(y_{ij},A_{ij})]\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_i)p_\xi^t(dx)\right|\leqq\frac{\delta}{3}.$$

Hogy becslést adjunk a harmadik összeadandókra (5. 6. 5)-ben, először is jegyezzük meg, hogy (5. 4. 3), (5. 1. 7) és (4. 1. 5)-ből következik, hogy tetszőleges $l=1,\ldots,K_\delta^t$-re és elegendően nagy t-kre

$$\sum_{i=-2}^{K_\delta^t}\sum_{j=1}^{R_i^t}\int_{X^t}|\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_l)|s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)=\sum_{i=-2}^{K_\delta^t}\int_{X^t}|\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_l)|q_i^t(x)p_\xi^t(dx)\leqq$$

(5. 6. 9)

$$\leqq\int_{X^t}|\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_l)|p_\xi^t(dx)\leqq 2^{\frac{\delta}{100}H^t(W)}.$$

Legyen most

(5. 6. 10)
$$_k\varrho_{ij;lm}^t=\begin{cases}\int_{X^t}|\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_l)|s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx), & l=1,\ldots,K_\delta^t\\ 0 & l=-2,-1,0.\end{cases}$$

Az így definiált $_k\varrho_{ij;lm}^t$ állandókra teljesül Feinstein élesített lemmájának (5. 4. 15) feltétele. Felhasználva e lemma állítását ((5. 5. 8) alakjában) levezethető, hogy minden elegendően nagy t-re

(5. 6. 11)
$$\sum_{\substack{i=-2,\,j=1,\,l=1,\,m=1\\(i,j)\neq(l,m)}}^{K_\delta^t\;\;R_i^t\;\;K_\delta^t\;\;R_l^t} Q^t(y_{ij},A_{lm})\int_{X^t}|\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_l)|s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)\leqq\frac{\delta}{3}.$$

Megjegyezzük, hogy (5. 1. 7)-ből következik, hogy

(5. 6. 12)
$$\sum_{j=1}^{R_i^t}\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_i)s_{ij}^t(x)p_\xi^t(dx)=\int_{X^t}\bar{\varrho}_k^t(x,\tilde{x}_i)q_i(x)p_\xi^t(dx).$$

Ezért (5. 6. 5), (5. 6. 8), (5. 6. 11) és (5. 6. 12)-ből következik, hogy minden elegendően nagy t-re:

$$\sum_{i=-2}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} \sum_{l=1}^{K_\delta^t} \sum_{m=1}^{R_l^t} Q^t(y_{ij}, A_{lm}) \int_{X^t} \bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_l) s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx) = \tag{5. 6. 13}$$
$$= \sum_{i=1}^{K_\delta^t} \int_{X^t} \bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_i) q_i(x) p_\xi^t(dx) + \frac{2}{3} \delta \theta_k^t,$$

ahol $|\Theta_k^t| \leqq 1$. Vizsgáljuk most az (5. 6. 4) összeg második tagját. E célból megjegyezzük, hogy $i=1, \ldots, K_\delta^t$-re

$$\sum_{l=-2}^{0} \sum_{m=1}^{R_l^t} Q^t(y_{ij}, A_{lm}) + Q^t(y_{ij}, \tilde{X} \setminus \bigcup_{l,m} A_{lm}) \leqq 1 - Q^t(y_{ij}, A_{ij}). \tag{5. 6. 14}$$

(5. 5. 7) és (5. 5. 9)-ből mármost azt kapjuk, hogy

$$\left| \sum_{i=1}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} \left[\sum_{l=-2}^{0} \sum_{m=1}^{R_l^t} Q^t(y_{ij}, A_{lm}) + Q^t(y_{ij}, \tilde{X} \setminus \bigcup_{l,m} A_{lm}) \right] \cdot \int_{X^t} \bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+) s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx) \right| \leqq$$
$$\leqq \left[p_{\eta\tilde{\eta}}^t \left(\left| \frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y})}{I(\eta, \tilde{\eta})} - 1 \right| > \frac{\delta}{6} \right) + 2^{-\frac{\delta}{200} C^t(Q, V)} \right] \cdot \sum_{i=1}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} \int_{X^t} |\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+)| s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx) \leqq$$
$$\leqq \left[p_{\eta\tilde{\eta}}^t \left(\left| \frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y})}{I(\eta, \tilde{\eta})} - 1 \right| > \frac{\delta}{6} \right) + 2^{-\frac{\delta}{200} C^t(Q, V)} \right] \cdot \int_{X^t} |\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+)| p_\xi^t(dx) \leqq \tag{5. 6. 15}$$
$$\leqq \left[p_{\eta\tilde{\eta}}^t \left(\left| \frac{i_{\eta\tilde{\eta}}(y, \tilde{y})}{I(\eta, \tilde{\eta})} - 1 \right| > \frac{\delta}{6} \right) + 2^{-\frac{\delta}{200} C^t(Q, V)} \right] \cdot (v^t)^{\frac{1}{1+\delta}}.$$

A tétel (1. 7. 4) és (1. 7. 27) feltételeiből következik, hogy az (5. 6. 15) egyenlőtlenség jobb oldala zérushoz tart, ha $t \to \infty$, és ezért minden elegendően nagy t-re

$$\left| \sum_{i=1}^{K_\delta^t} \sum_{j=1}^{R_i^t} \left[\sum_{l=-2}^{0} \sum_{m=1}^{R_l^t} Q^t(y_{ij}, A_{lm}) + Q^t(y_{ij}, \tilde{X} \setminus \bigcup_{l,m} A_{lm}) \right] \times \right. \tag{5. 6. 16}$$
$$\left. \times \int_{X^t} \bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+) s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx) \right| \leqq \frac{\delta}{6}.$$

Hogy becslést adhassunk az utolsó fennmaradt tagokra, vegyük észre először is, hogy mindig fennáll

$$\sum_{l=-2}^{0} \sum_{m=1}^{R_l^t} Q^t(y_{ij}, A_{lm}) + Q^t(y_{ij}, \tilde{X}^t \setminus \bigcup_{l,m} A_{lm}) \leqq 1, \tag{5. 6. 17}$$

és hogy ezért (5. 1. 7) és (5. 1. 10)-ből következik, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{i=-2}^{0}\sum_{j=1}^{R_i^t}\left[\sum_{l=-2}^{0}\sum_{m=1}^{R_l^t} Q^t(y_{ij}, A_{lm}) + Q(y_{ij}, \tilde{X}^t \setminus \bigcup_{l,m} A_{lm})\right]\times \\ \times \int_{X^t} |\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+)| s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx) \leqq \\ \leqq \sum_{i=-2}^{0}{}' \sum_{j=1}^{R_i^t} \int_{X^t} |\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+)| s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx) = \\ = \int_{X^t} [(1-Q^t(x)+r_\delta^t(x)] |\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+)| p_\xi^t(dx).\end{aligned} \tag{5. 6. 18}$$

A közleményekre vonatkozó élesített lemma (4. 1. 6′) állításából és a (4. 1. 2) definícióból következik, hogy tetszőleges $a>0$ mellett

$$\int_{X^t} [(1-Q^t(x)+r_\delta^t(x)] p_\xi^t(dx) = p_{\xi\tilde{\xi}}^t \left\{\left|\frac{i_{\xi\tilde{\xi}}(x, \tilde{x})}{I(\xi, \bar{\xi})} - 1\right| > \frac{\delta}{4}\right\} + o_m((v^t)^{-a}). \tag{5. 6. 19}$$

(5. 6. 19)-ből, a tétel (1. 7. 27) feltételéből és (5. 5. 9)-ből kapjuk, ha alkalmazzuk (5. 2. 29)-et, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \int_{X^t} [1-Q^t(x)+r_\delta^t(x)] |\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+)| p_\xi^t(dx) = 0. \tag{5. 6. 20}$$

(5. 6. 20) és (5. 6. 18)-ból következik mármost, hogy minden elegendően nagy t-re

$$\begin{aligned}\Bigg|\sum_{i=-2}^{0}\sum_{j=1}^{R_i^t}\left[\sum_{l=-2}^{0}\sum_{m=1}^{R_l^t} Q^t(y_{ij}, A_{lm}) + Q^t(y_{ij}, \tilde{X} \setminus \bigcup_{l,m} A_{l,m})\right]\times \\ \times \int_{X^t} |\bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_+)| s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx)\Bigg| \leqq \frac{\delta}{6}.\end{aligned} \tag{5. 6. 21}$$

Egybevetve az (5. 6. 4), (5. 6. 5), (5. 6. 8), (5. 6. 11), (5. 6. 16) és (5. 6. 21) összefüggéseket, azt kapjuk, hogy minden elegendően nagy t-re

$$\left| M\bar{\varrho}_k^t(\xi_0, \tilde{\xi}_0) - \sum_{i=1}^{K_\delta^t}\sum_{j=1}^{R_i^t} \int_{X^t} \bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_i) s_{ij}^t(x) p_\xi^t(dx)\right| \leqq \delta. \tag{5. 6. 22}$$

Felhasználva (5. 1. 7)-et, az (5. 6. 22) egyenlőtlenség a következő alakra írható át:

$$\left| M\bar{\varrho}_k^t(\xi_0, \tilde{\xi}_0) - \sum_{i=1}^{K_\delta^t} \int_{X^t} \bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_i) q_i(x) p_\xi^t(dx)\right| \leqq \delta. \tag{5. 6. 23}$$

Megjegyezzük, hogy alkalmazva az (5. 2. 29) általános egyenlőtlenséget a $p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x})$ mértékre és $f(x, \tilde{x})$-nek az $A^t \in S_X^t \times S_{\tilde{X}}^t$ halmaz indikátor-függvényét véve, (1. 7. 11)-

ből levezethető, hogy

$$\left|\iint_A \bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x})\right| \leq (p_{\xi\tilde{\xi}}^t(A))^{\frac{b}{1+b}}(c^t)^{\frac{1}{1+b}}. \tag{5. 6. 24}$$

Alkalmazva az (5. 6. 24) képletet és figyelembe véve a tétel (1. 7. 25) feltételét, kapjuk,

$$\lim_{t\to\infty} \iint_{X^t \times \tilde{X}^t \setminus F_\delta^t} \bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}) p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) = 0. \tag{5. 6. 25}$$

Ezért a közleményekre vonatkozó lemma (4. 1. 7) állításából és abból, hogy

$$\begin{aligned} S_k^t = \sum_{i=1}^{K_\delta^t} \int_{X^t} \bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_i) q_i^t(x) p_\xi^t(dx) + \\ + \iint_{X^t \times \tilde{X}^t \setminus F_\delta^t} \bar{\varrho}_k^t(x, \tilde{x}_i) p_{\xi\tilde{\xi}}^t(dx, d\tilde{x}) + M\varrho_k^t(\xi, \tilde{\xi}), \end{aligned} \tag{5. 6. 26}$$

következik, hogy minden elegendően nagy t-re a következő vektorra fennáll:

$$\begin{aligned} \Bigg(\sum_{i=1}^{K_\delta^t} \int_{X^t} \bar{\varrho}_1^t(x, \tilde{x}_i) q_i^t(x) p_\zeta^t(dx) + M\varrho_1^t(\xi, \tilde{\xi}), \ldots \\ \ldots, \sum_{i=1}^{K_\delta^t} \int_{X^t} \bar{\varrho}_M^t(x, \tilde{x}_i) q_i(x) p_\xi^t(dx) + M\varrho_M(\xi, \tilde{\xi})\Bigg) \in [\overline{W^t}]_\delta. \end{aligned} \tag{5. 6. 27}$$

(5. 6. 27) és (5. 6. 22)-ből következik végül, hogy minden elegendően nagy t-re a következő vektorra fennáll

$$(M\varrho_1^t(\xi_0, \tilde{\xi}_0), \ldots, M\varrho_M^t(\xi_0, \tilde{\xi}_0)) \in [\overline{W^t}]_\varepsilon, \tag{5. 6. 28}$$

ez azonban azonos a 3. tétel állításával.

6. §. MEMÓRIA NÉLKÜLI ÁTVITELI BERENDEZÉS ÉS FÜGGETLEN KOMPONENSŰ KÖZLEMÉNYEK

6. 1. Független komponensű közlemények

Tekintsünk egy független komponensű közleményt, amelyet az 1. 4 pont végén definiáltunk. Az ott bevezetett jelöléseket fogjuk használni. Mindenekelőtt bebizonyítjuk a következő fontos állítást. Legyen $\xi^t = (\zeta_1, \ldots, \zeta_t)$ és $\tilde{\xi}^t = (\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_t)$ változókból álló pár a független komponensű közlemények reprodukálás-pontossági feltételével összekapcsolva. Akkor fennáll

$$I^t(\xi, \tilde{\xi}) \geq \sum_{i=1}^{t} (\zeta_i, \tilde{\zeta}_i). \tag{6. 1. 1}$$

A (6. 1. 1) állítást t-re vonatkozó indukcióval fogjuk bizonyítani. Tegyük fel, hogy már ismeretes a következő:

$$I^{t-1}(\xi,\tilde{\xi}) \geqq \sum_{i=1}^{t-1} I(\zeta_i,\tilde{\zeta}_i). \tag{6.1.2}$$

Fel fogjuk használni a három változó információira vonatkozó azonosságot, amelyet a 2. 6 pontban bizonyítottunk be. Ennek megfelelően fennáll a következő azonosság:

$$\begin{aligned} I^t(\xi,\tilde{\xi}) &= I((\xi^{t-1},\zeta_t),(\tilde{\xi}^{t-1},\zeta_t)) = \\ &= I(\xi^{t-1},(\zeta_t,\tilde{\xi}^{t-1},\tilde{\zeta}_t)) + I(\zeta_t,(\tilde{\xi}^{t-1},\tilde{\zeta}_t)) - I(\xi^{t-1},\zeta_t). \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

Minthogy ξ^{t-1} és ζ^t függetlenek, azért (l. (1. 2. 4)-et)

$$I(\xi^{t-1},\zeta_t)=0.$$

A 2. 5 pont eredményéből következik, hogy

$$\left.\begin{aligned} I(\xi^{t-1},(\zeta_t\,\tilde{\xi}^{t-1},\tilde{\zeta}_t)) &\geqq I(\xi^{t-1},\tilde{\xi}^{t-1}), \\ I(\zeta_t,(\tilde{\xi}^{t-1},\tilde{\zeta}_t)) &\geqq I(\zeta_t,\tilde{\zeta}_t). \end{aligned}\right\} \tag{6.1.4}$$

Ezért (6. 1. 3)-ból adódik:

$$I^t(\xi,\tilde{\xi}) \geqq I(\xi^{t-1},\tilde{\xi}^{t-1}) + I(\zeta_t,\tilde{\zeta}_t). \tag{6.1.5}$$

(1. 6. 2) és (6. 1. 5)-ből folyik a (6. 1. 1) állítás.

Most megjegyezzük, hogy ha a $(\xi^t,\tilde{\xi}^t)$ pár eleget tesz $\{W^t\}$ reprodukálás-pontossági feltételnek, akkor tetszőleges $(\zeta_k,\tilde{\zeta}_k)$ pár is eleget tesz $\{W^1\}$ reprodukálás-pontossági feltételnek, tehát

$$I(\zeta^k,\tilde{\zeta}^k) \geqq H(W^1). \tag{6.1.6}$$

(6. 1. 1) és (6. 1. 6)-ból következik, hogy

$$I^t(\xi,\tilde{\xi}) \geqq t\,H(W^1). \tag{6.1.7}$$

Másrészről, jelöljük $p^{\varepsilon}_{\zeta\tilde{\zeta}}$-val azon $(\zeta_\varepsilon,\tilde{\zeta}_\varepsilon)$ változók együttes eloszlását, amelyek eleget tesznek $\{W^1\}$ reprodukálás-pontossági feltételnek, amellett fennáll rájuk

$$I(\zeta_\varepsilon,\tilde{\zeta}_\varepsilon) \leqq H(W^1)+\varepsilon. \tag{6.1.8}$$

Legyen $(\xi^t_\varepsilon,\tilde{\xi}^t_\varepsilon)$ olyan, hogy a

$$(\zeta_i,\tilde{\zeta}_i) \qquad (i=1,\dots,t)$$

párok kölcsönösen függetlenek és mindegyik eloszlása $p^{\varepsilon}_{\zeta\tilde{\zeta}}$. Akkor a $(\xi^t_\varepsilon,\tilde{\xi}^t_\varepsilon)$ változók eleget tesznek $\{W^t\}$ reprodukálás-pontossági feltételnek. A (2. 9. 1) képletből következik, hogy

$$I(\xi^t_\varepsilon,\tilde{\xi}^t_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{t} I(\zeta_i,\tilde{\zeta}_i) = tI(\zeta_\varepsilon,\tilde{\zeta}_\varepsilon) \leqq t\big(H(W_1)+\varepsilon\big); \tag{6.1.9}$$

minthogy $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi, azért (6. 1. 7) és (6. 1. 9)-ből következik az (1. 4. 11) egyenlőség.

Bizonyítsuk most be független komponensű közlemények sorozatának információ-stabilitását $t \to \infty$ esetén. E célból rögzítsük a véges információjú $(\zeta^0, \tilde{\zeta}^0)$ változó-pár valamilyen $p_{\zeta^0, \tilde{\zeta}^0}$ eloszlását, és tekintsük a t számú független $(\zeta_1^0, \tilde{\zeta}_1^0), \ldots, (\zeta_t^0, \tilde{\zeta}_t^0)$ pár összességét, ahol mindegyiknek az eloszlása $p_{\zeta^0, \tilde{\zeta}^0}$. Legyen

$$\xi_0^t = \zeta_1^0, \ldots, \zeta_t^0), \ \tilde{\xi}_0^t = (\tilde{\zeta}_1^0, \ldots, \tilde{\zeta}_t^0).$$

A (2. 9. 2) képlet szerint

$$i_{\xi_0 \tilde{\xi}_0}^t = \sum_{k=1}^{n} i_{\zeta_k^0 \tilde{\zeta}_k} (\zeta_k^0, \tilde{\zeta}_k^0). \tag{6. 1. 10}$$

Az $i_{\zeta_k^0 \tilde{\zeta}_k^0}(\zeta_k^0, \tilde{\zeta}_k)$ összeadandók független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyek várható értékeire fennáll:

$$M i_{\zeta_k^0 \tilde{\zeta}_k^0} (\zeta_k^0, \tilde{\zeta}_k^0) = I(\zeta^0, \tilde{\zeta}^0). \tag{6. 1. 11}$$

Ezt tekintetbe véve, alkalmazva a (6. 1. 10) sorozatra a nagy számok szokásos törvényét, azt kapjuk, hogy minden elegendően nagy t-re és tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra

$$P^t \left\{ \left| \frac{i_{\xi^0 \tilde{\xi}^0} (\zeta^0, \tilde{\zeta}^0)}{t I(\zeta^0, \tilde{\zeta}^0)} - 1 \right| > \varepsilon \right\} < \varepsilon. \tag{6. 1. 12}$$

Ezért a $p_{\zeta\tilde{\zeta}}^t$ eloszlások sorozata megválasztható úgy, hogy ha

$$(\zeta_k^t, \tilde{\zeta}_k^t) \qquad (k = 1, \ldots, t)$$

-vel jelöljük t számú olyan független változópár összességét, melyek mindegyikének $p_{\zeta\zeta}^t$ az eloszlása, akkor a $(\zeta_k^t, \tilde{\zeta}_k^t)$ párok eleget tesznek W^1 reprodukálás-pontossági feltételnek (és ezért a

$$\xi^t = (\zeta_1^t, \ldots, \zeta_t^t), \ \tilde{\xi}^t = (\tilde{\zeta}_1^t, \ldots, \tilde{\zeta}_t^t)$$

párok eleget tesznek $\{W^t\}$ reprodukálás-pontossági feltételnek), úgyhogy

$$I(\zeta_k^t, \tilde{\zeta}_k^t) \to H(W^1),$$

és ezért

$$I^t(\xi, \tilde{\xi}) \sim H^t(W) \qquad (t \to \infty), \tag{6. 1. 13}$$

továbbá úgy, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra

$$\lim_{t \to \infty} P^t \left\{ \left| \frac{i_{\xi\tilde{\xi}}(\xi, \tilde{\xi})}{I(\xi, \tilde{\xi})} - 1 \right| > \varepsilon \right\} = 0. \tag{6. 1. 14}$$

(6. 1. 13) és (6. 1. 14)-ből következik, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra

$$\lim_{t \to \infty} P \left\{ \left| \frac{i_{\xi\tilde{\xi}}^t(\xi, \tilde{\xi})}{H^t(W)} - 1 \right| > \varepsilon \right\} = 0, \tag{6. 1. 15}$$

és ezért a $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ változók sorozata eleget fog tenni azoknak a feltételeknek, melyeket a közlemény-sorozat információ-stabilitásának definíciójában felhasználtunk.

Az 1. 7 pontnak azon állítása, hogy az (1. 7. 17) feltételek elegendők az 1. tétel V. feltételének teljesüléséhez, nyilvánvalóan következik a fentebb végzett konstrukciókból.

6. 2. Memória nélküli átviteli berendezés

Egy memória nélküli átviteli berendezés tulajdonságainak vizsgálatához szükséges meggondolások sokban analogonjai a 6. 1 pontban felhasznált meggondolásoknak.

Ennek folytán csak arra szorítkoztunk, ami lényeges változtatásokkal jár. Tekintsük az

$$\eta^t = (\zeta_1, \ldots, \zeta_t) \quad \text{és} \quad \tilde{\eta}^t = (\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_t)$$

változókból álló párt, amelyeket memória nélküli átviteli berendezés kapcsol össze (l. az 1. 5 pontot). Be akarjuk bizonyítani (l. (6. 1. 1)-et), hogy

$$I^t(\eta, \tilde{\eta}) \leqq \sum_{k=1}^{t} I(\zeta_k, \tilde{\zeta}_k). \tag{6. 2. 1}$$

Ugyanúgy, mint a (6. 1. 1) egyenlőtlenség esetében is, a bizonyítás teljes indukció segítségével fog történni. Legyen (6. 2. 1) már bizonyított $t-1$ összeadandó esetére. (6. 1. 3)-mal analóg módon azt kapjuk, hogy

$$I^t(\eta, \tilde{\eta}) = I(\tilde{\eta}^{t-1}, (\zeta_t, \eta^{t-1}, \tilde{\zeta}_t)) + I(\tilde{\zeta}_t, (\eta^{t-1}, \zeta^t)) - I(\tilde{\zeta}^t, \tilde{\eta}^{t-1}). \tag{6. 2. 2}$$

A memória nélküli átviteli berendezés definíciója azt mutatja, hogy azon feltétel mellett, hogy az η^{t-1}, ζ^t változók rögzítve vannak, az $\tilde{\eta}^{t-1}$ és $\tilde{\zeta}^t$ változók függetlenek és hogy $\tilde{\eta}^{t-1}$ azon feltétel mellett vett feltételes eloszlása, hogy η^{t-1} és ζ^t rögzítettek, csupán η^{t-1} értékétől függ, ζ^t értékétől azonban nem. Ebből következik, hogy az $\tilde{\eta}^{t-1}$, η^{t-1} és $(\zeta_t, \tilde{\zeta}_t)$ változók Markov-láncot képeznek, és ezért a (2. 8. 1) képlet azt adja, hogy

$$I(\tilde{\eta}^{t-1}, (\zeta_t, \eta^{t-1}, \tilde{\zeta}_t)) = I(\tilde{\eta}^{t-1} \eta^{t-1}). \tag{6. 2. 3}$$

Továbbá hasonló okokból

$$I(\tilde{\zeta}_t, (\eta^{t-1}, \zeta_t)) = I(\zeta, \tilde{\zeta}). \tag{6. 2. 4}$$

Minthogy $I(\zeta_t, \eta^{t-1}) > 0$, azért (6. 2. 2), (6. 2. 3) és (6. 2. 4)-ből következik, hogy

$$I^t(\eta, \tilde{\eta}) \leqq I^{t-1}(\eta, \tilde{\eta}) + I(\zeta_t, \tilde{\zeta}_t), \tag{6. 2. 5}$$

ahonnan a (6. 2. 1) egyenlőtlenség már következik. Ezt a meggondolást a diszkrét esetre részletesebben végigvezettük [8] munkánkban.

A további konstrukciók, amelyek a kapacitásra vonatkozó (1. 5. 7) képlet levezetéséhez szükségesek, a memória nélküli átviteli berendezés információ-stabilitásának a bizonyítása, valamint annak bizonyítása, hogy az (1. 7. 14), (1. 7. 15) feltételek elegendők az 1. tétel IV. feltételének teljesüléséhez, teljesen analogonjai a 6. 1 pont megfelelő konstrukcióinak. Épp ezért itt ezeket nem részletezzük.

IDÉZETT IRODALOM

[1] С. Н. Бернштейн: Теория вероятностей: М.—Л., Гостехиздат, 1946.
[2] J. Wolfowitz: The coding of message subject to chance errors, *Illinois Journ. Math.* **1**, No 4 (1957) 591–606.
[3] J. Wolfowitz: Information theory for mathematicians, *Ann. Math. Stat.* **29**, No 2 (1958) 351–356.
[4] И. М. Гельфанд, А. Н. Колмогоров, А. М. Яглом: К общему определению количества информации, ДАН **111**, № 4 (1956), 745—748.
[5] И. М. Гельфанд, А. М. Яглом: О вычислении количества информации о случайной функции, содержащемся в другой такой функции, УМН **XII**, вып. 3 (1957), 3–52.
[6] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров: Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М., Гостехиздат, 1949.
[7] S. Goldman: *Information theory*, Constable and Company, London, 1953; orosz ford. С. Гольдман: Теория информации, М., ИЛ, 1957.
[8] Р. Л. Добрушин: Передача информации по каналу с обратной связвю, Теория вероятн. и ее применения **3**, № 4 (1958).
[9] J. L. Doob: *Stochastic processes*, N. Y., John Wiley & Sons, London, Chapman and Hall, 1953; orosz ford. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956.
[10] А. Н. Колмогоров: Untersuchungen über Integralbegriff, *Math. Ann.* **103** (1930) 654–696.
[11] А. Н. Колмогоров: Теория передачи информации Сессия Акад. наук СССР по научным проблемам автоматизации производства, Пленарн. засед., Изд. АН СССР, М., 1957, 66—99; angol változata: A. N. Kolmogorov: To the Shannon theory of information transmission in the continuous signal case, *Trans. IRE, Sect. Inf. Theor.* **2**, No 4 (1956) 102–108.
[12] А. Н. Колмогоров: Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега, ДАН **119**, № 5 (1958).
[13] K. Krickeberg: Convergence of martingales with a direct index set, Trans, *Amer. Math. Soc.* **83**, No 2 (1956) 313–337.
[14] Л. Я. Лейфман: Об условиях существования интеграла Колмогорова и понятии дифференциальной эквивалентности, УМН **XII**, вып. 3 (1957), 343—352.
[15] B. Mac-Millan: The basic theorems of information theory, *Ann. Math. Statist.* **24**, No 2 (1953) 196–219.
[16] S. Muroga: On the capacity of a noisy continuous channels, *Trans. IRE, Sect. Inf. Theory* **3**, No 1 (1957) 44–51.
[17] A. Perez: Notions généralisées d'incertitude, d'entropie et d'information du point de vue la théorie de martingales, *Trans. of the first Prague conference on information theory, statistical decision functions, random processes*, Publ. House of the Czechoslovac. Acad. of Sci., Prague (1957) 183–208.
[18] A. Perez: Sur la théorie de l'information dans le cas d'un alphabet abstrait, *Trans. of the first Prague conference on information theory, statistical decision functions, random processes*, Publ. House of the Czechoslovac. Acad. of Sci., Prague (1957) 209–244.
[19] A. Perez: Sur la convergence des incertitudes, entropies et informations échantillon vers leurs valeurs vraies, *Trans. of the first Prague conference on information theory, statistical decision functions, random processes*, Publ. House of the Czechoslovak Acad. of Sci., Prague (1957) 245–252.
[20] М. Розенблат—Рот: Энтропия стохастических процессов, ДАН **112**, № 1 (1957), 16–19.
[21] М. Розенблат—Рот: Теория передачи информации через стохастические каналы, ДАН **112**, № 2 (1957), 202 205.
[22] A. Feinstein: A new basic theorem of information theory, *Trans. IRE, Sect. Inf. Theory*, No 4 (1954) 2–22.
[23] A. Feinstein: *Foundations of information theory*, Mc. Graw Hill Book Company, Inc., New York–Toronto–London, 1958.
[24] P. Halmos: *Measure Theory*, New York, 1950; orosz ford. П. Халмош, Теория меры, М., ИЛ, 1953.
[25] А. Я. Хинчин: Понятие энтропии в теории вероиатностей, УМН **VIII**, вып. 3 (1953), 3—20.

[26] А. Я. Хинчин: Об основных теоремах теории информации, УМН XI, вып. 1 (1956), 17—75

[27] И. П. Цареградский Замечание о пропускной способности стационарного канала с конечной памятью, Теория вероятн. и ее применения 3, № 1 (1958), 84—96.

[28] Цзян Цзы-пей, Замечание об определении количества информации, Теория вероятн. и ее применения 3 № 1 (1958), 99—102.

[29] C. E. SHANNON: Certain results in coding theory for noisy channels, *Inform. and Control* **1**, No 1 (1957) 6—25.

[30] C. E. SHANNON and W. WEAVER: *The mathematical theory of Communication*, University of Illinois Press, Urbana, Ill., 1949; orosz ford. (nem teljes) К. Шеннон, Статистическая теория передачи электрических сигналов, а Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, М., ИЛ, 1953, c. könyvben. 7—87.

[31] D. BLACKWELL—L. BREIMAN—A. J. THOMASIAN: Proof of Shannon's transmission theorem for finite state indecomposable channels, *Ann. Math. Stat.* **29**, No 4 (1958) 1209—1220.

[32] Р. Л Добрушин: По поводу формулировки основной теоремы Шеннона (Резюме доклада на заседании научн.-исслед. семинара по теории вероятностей 19/III 1957 г., Теор. вероятн. и ее прилож **2**, № 4 (1958).

[33] Р. Л Добрушин, Общая формулировка основной теоремы Шеннона в теории информации, ДАН (1959).

[34] K. JACOBS: Die Übertragung diskreter Informationen durch periodische und fast periodische Kanäle, *Math. Ann.*, **137**, No 2 (1959) 125—135.

Fordította: MEDGYESSY PÁL

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Reimann József kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

A *Tudományos Minősítő Bizottság* 1960. május 30-ára tűzte ki REIMANN JÓZSEF *„Bolyongási problémák matrixelméleti tárgyalása és néhány statisztikai alkalmazása"* című értekezésének nyilvános vitáját. A disszertáció opponensei PRÉKOPA ANDRÁS és RÓZSA PÁL, a matematikai tudományok kandidátusai voltak.

A bíráló bizottság tagjaiul a *Tudományos Minősítő Bizottság* a következőket kérte fel: elnöknek KALMÁR LÁSZLÓ levelező tagot, tagoknak TANDORI KÁROLYt, a matematikai tudományok doktorát, valamint MEDGYESSY PÁLt és SARKADI KÁROLYt, a matematikai tudományok kandidátusait. A bizottság titkári teendőit alulírott látta el.

REIMANN JÓZSEF kandidátusi értekezésében a bolyongási problémáknak azt az esetét tárgyalja, amikor a bolyongó pont a helybenmaradás lehetőségének is kizárásával mindig szomszédos rácspontokba megy át. Az 1. §-ban matrixelméleti segédeszközökről van szó. A 2. §. az egydimenziós elnyelő és visszaverő falas bolyongás esetével foglalkozik. A 3. §-nak a síkbeli rácstéglalapon való bolyongás a tárgya. A téglalap határa elnyelő fal. A 4. §-ban rámutat a szerző arra, hogyan lehet a 3. § eredményeinek felhasználásával analóg kérdéseket megválaszolni elvileg tetszőleges alakú tartomány esetén. Az 5. §-ban ugyancsak rácstéglalapon való bolyongást vizsgál, a kerület azonban most visszaverő fal. Ugyanezt a kérdést tárgyalja a 6. §-ban is azzal a különbséggel, hogy a téglalap két-két szemben fekvő oldala elnyelő, illetve visszaverő fal. A 7. §-ban elnyelő falakkal ellátott rácspont hasábban való bolyongást vizsgál. A 8. §-ban megmutatja, hogy módszerét az n-dimenziós elnyelő falas, illetve visszaverő falas bolyongás esetére is alkalmazni lehet. A 9. §-ban a korlátlan bolyongással kapcsolatban tesz néhány megjegyzést. A 10. § jellege eltér az előzőékétől. A szerző itt a diffuzió Ehrenfest-féle modelljét általánosítja. A 11. §., egyben a dolgozat utolsó paragrafusa, a dolgozat disszertáció jellege következtében függeléknek tekintendő, mivel itt a szerző VINCZE ISTVÁNnal közösen elért rendstatisztikai vonatkozású eredményeit ismerteti.

PRÉKOPA ANDRÁS opponens a benyújtott dolgozatot értékelve megállapítja, hogy az idetartozó alapvető kérdéseket új, igen elegáns matrixelméleti módszerrel tárgyalja, amely lehetővé teszi az egyes kérdések megválaszolását elvileg akárhány dimenzióban és a bolyongásnak elvileg akármilyen tartományra való korlátozása esetén is. Ezzel a módszerrel a szerző számos olyan új eredményt ér el, amelyet az eddig használt módszerekkel nem sikerült bizonyítani. A következőkben jelölt módszerének korlátaival foglalkozik. A disszertáció formuláiból aszimptotikus formulák is levezethetők. Erre azonban a dolgozat írója nem tér ki. Opponens különben a 9. §-t feleslegesnek tartja, mivel az itt közölt eredmények triviális módon vezethetők vissza az előző paragrafusokban már târgyalt esetekre. A disszertáció formai kiállításának egyik hiányossága, hogy a szerző eredményéit nem fogalmazza meg tételszerűen. Ez az áttekinthetőség rovására megy. Helyenként fukarkodik a jelölések megmagyarázásával és egy-két helyen zavaróan hat a képletbeírási hiba. E formai hibák azonban nem csökkentik a disszertáció értékét.

Rózsa Pál opponens véleményében rámutat arra, Reimann érdeme, hogy felismerte annak lehetőségét, miszerint a többdimenziós bolyongási problémák számos esetben ugyancsak tárgyalhatók matrixelméleti eszközökkel. Ennek a módszernek segítségével számos új eredményhez is jut. Kár, hogy Reimann nem mondja ki — amit tulajdonképpen megmutat dolgozatában —, hogy valószínűségszámítási és matrixelméleti megfontolások segítségével a Poisson-féle differenciálegyenleteknek a Green-matrixát kapja meg. Hiányolja az opponens, hogy Reimann nem jelöli meg azt az irányt, amelyben a kutatások tovább folytathatók. A dolgozat stílusa jó, kiállítása nagyon szép. A bevezetés teljes áttekintést ad a disszertációról. Kifogásolja, hogy a szerző eredményeit nem tételszerűen mondja ki. A továbbiakban felsorol főleg a képletek beírása során elkövetett kisebb hibát, számszerint 29-et, amelyek a disszertáció érdemi részét azonban nem befolyásolják.

Reimann József az opponenseknek adott válaszában mindenekelőtt kijelenti, hogy a bírálatokkal egyetért. Azután részletesen foglalkozik módszerének további alkalmazhatóságával. Újabb általánosítást jelentene a megszámlálhatóan végtelen dimenziós térben való bolyongás vizsgálata. Alkalmazások szempontjából a bolyongásoknak a matematikai statisztikában való további felhasználására lát lehetőséget.

Sarkadi Károlynak arra a kérdésére, vajon a Tudományos Minősítő Bizottság adott-e elegendő időt a jelöltnek az opponensi vélemények átnézésére, Reimann József megemlíti, ő maga kérte, hogy a vita időpontját május vége előttre tűzzék ki. Prékopa András megemlíti, hogy ha a véges esetben a visszaverő falat a lépésszámhoz képest nagynak választjuk, akkor valószínűségszámítási úton érdekes olyan azonosságokhoz juthatunk, amelyek formális bizonyítása meglehetősen nehéz volna. Kalmár László aziránt érdeklődik, hogyan értendő az a kijelentés, hogy a matrix n-edik hatványa vezet megoldásra, hiszen diagonálmatrixokról van szó és így csak az elemek hatványozását kell elvégezni. Továbbá, vajon hipermatrix alkalmazása helyett nincs-e lehetőség az n-dimenziós matrix bevezetésére és kezelésére. Rózsa Pál megemlíti, hogy n-dimenziós matrixokkal a szóban forgó kérdések felírhatók, csakhogy ezek kezeléséhez n-dimenziós szemlélet volna szükséges. Reimann József válaszában előadta, hogy eredetileg ő is térbeli matrixokkal való tárgyalásra gondolt, de ezek bonyolult kezelése miatt nem jutott eredményre. A matrix n-edik hatványával kapcsolatban megemlítette, hogy ez csak akkor vezetne diagonális matrixok hatványozására, ha a szereplő matrixok valamennyien normálmatrixok volnának. Azonban általában a sztochasztikus matrixokra ez nem teljesedik.

Miután újabb kérdések nem adódtak, és a kiküldött bizottság a jelölt válaszát kielégítőnek találta, egyhangú határozatként kiemelte azt, hogy Reimann József a valószínűségszámítás egy elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt jelentős kérdéskörében a bolyongáselméletben ért el figyelemre méltó új eredményeket. Disszertációjából kitűnik, hogy a választott téma irodalmát alaposan feldolgozta és a többdimenziós bolyongási probléma tárgyalására hatékony új módszert adott, amelynek segítségével számos ismert eredményt általánosított és olyan e kérdéskörbe vágó problémákat is megoldott, amelyeket az eddig ismert módszerekkel nem sikerült eredményesen tárgyalni. Módszere további idevágó kutatások alapjául szolgálhat, ezenkívül a matematikai statisztikában és a numerikus analízisben is eredményesen alkalmazható. A dolgozat kiállítása mintaszerű. Az eredményeknek tételek formájában való kimondása az áttekinthetőséget még növelte volna. Mindezek alapján a bíráló bizottság megállapítja, hogy a benyújtott értekezés teljes mértékben kielégíti a kandidátusi disszertációk elé állított követelményeket és *egyhangúan javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy* REIMANN JÓZSEF*et nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.*

GYIRES BÉLA
a matematikai tudományok kandidátusa

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1962. IV. 11. — Terjedelem: 5,75 (A/5) ív

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 62-1451

Ára: 13,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XII. KÖTET 3. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1962

// A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XII. kötet 3. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

AZ OSZTÁLYVEZETŐSÉG BESZÁMOLÓJA*

I.

A MSZMP VII. Kongresszusának ismeretes határozatában a tudomány jelentőségének nagy elismerése jut kifejezésre abban, hogy a határozat a népgazdasági célok elérését mind az iparban, mind a mezőgazdaságban csak akkor tartja lehetségesnek, ha *a gyakorlattal, a termeléssel élő kapcsolatban álló magasszintű tudományos munka* folyik. A Szovjetunió Kommunista Pártjának a XXII. Kongresszusán elfogadott program tömören és félreérthetetlenül kifejezi a tudomány mai és jövőbeli szerepét: „A tudomány alkalmazása a társadalmi termelőerők hatalmas növekedésének döntő tényezőjévé válik.", továbbá: „A tudomány gyümölcsöző fejlődésének az a biztosítéka, hogy elszakíthatatlanul a nép alkotó munkájához, a kommunista építés gyakorlatához kapcsolódik." A Magyar Forradalmi Munkás-Paraszt Kormány határozatából való a következő idézet, amely a távlati tudományos kutatási tervről szól: „A Kormány nagy figyelmet szentel a kutatás anyagi feltételeinek biztosítására. Az állami kiadásoknak mind fokozottabb mértékben kell a tudományos kutatásokat szolgálniok. A tudományos kutatás költségeit elvileg a termelési költségek részének kell tekinteni." Ezek a felismerések és összefüggések teszik érthetővé, hogy mindenütt a szocialista országokban a Tudományos Akadémiák iránt élesebben megfogalmazott igényeket állítanak, különböző módon újból kijelölik az Akadémiák tevékenységi körét és feladatait újból meghatározzák.

Fentiekből következik, hogy társadalmi fejlődésünk mai szakaszában a Magyar Tudományos Akadémiának és ezen belül OSZTÁLYunknak is nagyobb feladatokat kell vállalnia.

Az eltelt egy év alatt gazdasági, társadalmi és kulturális fejlődésünk meggyorsult, s a béke megőrzéséért folytatott világméretű harcban növekedett a gazdasági verseny lehetősége mellett a kulturális verseny lehetősége és jelentősége is. Mindez félreérthetetlenül tovább növelte a tudománnyal, így területünkön a matematikával, fizikával és csillagászattal szemben támasztott igényeket.

Ilyen helyzetben és ilyen igényeket szem előtt tartva kell tehát megítélnünk az OSZTÁLY és az intézetek múlt évi tevékenységét és ebből kiindulva kell kitűznünk további feladatainkat.

Az új követelmények teljesen érthetővé teszik, hogy az OSZTÁLY irányításában, tudománypolitikai és tudományszervező munkájában az eddigi módszerek fejlesztésére, jelentős előrelépésre van szükség. Tudományszervező munkánkat abból a szempontból kell tehát vizsgálnunk, hogy azok mennyiben segítették elő a tudományos eredmények elérését.

*Az 1962. április 5-én tartott nyilvános osztályülésen HAJÓS GYÖRGY akadémikus, osztálytitkár ismertette.

Az OSZTÁLY testületeiben nyílt és őszinte vita folyik, s az állásfoglalások felelősségében a párttagok és pártonkívüliek mind egyértelműbben osztoznak. Az OSZTÁLYVEZETŐSÉG és a BIZOTTSÁGOK ülései nem formálisak, a javaslatok sorsa általában magukon az üléseken dől el. Ebben a gyakorlatban még vannak zökkenők és további fejlődésre van még szükség.

A legfőbb biztosítéka a fejlődés kedvező irányának az, hogy erősödött az OSZTÁLY vezetésének hatékonysága, növekvőek a tudományos eredmények, különösen pedig az, hogy kezdeményezőbb lett az OSZTÁLY. Örvendetesen tapasztalhatjuk azt is, hogy az akadémiai intézetek nagyobb vonzóerőt gyakorolnak a fiatalokra, mint korábban. Ma már azt tapasztaljuk, hogy akár az egyetemekről, akár a gyakorlatból szívesen jönnek fiatal szakemberek intézeteinkbe.

Mindezzel azonban nem lehetünk megelégedve. Tudjuk, hogy nagyarányú a fejlődés, de több olyan feladat áll előttünk, amit ezután kell még megoldanunk. Különösen annak a szükségét érezzük, hogy közelebb kerüljünk az élethez, a gyakorlathoz. Ez azt jelenti, hogy mind az alapkutatások, mind a kutatási eredmények alkalmazása és ennek megfelelően tudományszervező és tudománypolitikai tevékenységünk még következetesebben szolgálja a szocialista építés előrehaladását. E célból erősítenünk és fejlesztenünk kell a nyílt, alkotó vita légkörét a tudományos kérdésekben, és a tudománypolitikai álláspontok tekintetében.

II.

Az OSZTÁLYhoz tartozó kutatóintézetek és a céltámogatásban részesített egyetemi intézetek az 1961. évi munkájukról szóló jelentésben általában eredményes kutatómunkáról számolhattak be. Maguknak a **beszámoló jelentések**nek az előkészítése tekintetében is fejlődés és néhány helyes kezdeményezés volt tapasztalható.

Az akadémiai intézetekben a beszámolókat a *Tudományos Tanácsok* megvitatták. Az ATOMKI*-ban és a MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETBEN a *Tudományos Tanácsok* ülésein — és a vitában is — részt vettek a nem tanácstag tudományos osztály- és csoportvezetők is. A *Tudományos Tanácsok* munkája a korábbi időhöz képest sokat javult. A vitákban résztvevők bátran bírálták és csak indokolt esetben dicsérték. Örvendetes, hogy a fiatalok felelősségérzettel és hozzáértően vettek részt a vitában és bátran kezdeményeztek. Talán helyes volna, ha intézeteinkben a jövőben a beszámolók és a tervek összeállításakor nyilvános ülést tartanának, amelyen részt vennének az összes kutatók. Nagyon hasznosnak bizonyulhat az intézet évi munkájának ez az újszerű megvitatása, mert a kutatók mind az elismerést, mind a kritikát közvetlenül hallgathatnák és a *Tudományos Tanácsok* a teljes intézeti kollektíva véleményére támaszkodhatnának.

A *Tudományos Tanácsok* jó munkája tette lehetővé, hogy a tudományos beszámolók reális képet adtak az intézetek múlt évi munkájáról.

Ugyancsak jó kritikai szellem jellemezte az OSZTÁLY keretében működő SZAKBIZOTTSÁGOK munkáját is az intézeti beszámolók és tervek tárgyalásakor. E testületek *felkért opponensek*kel végezték munkájukat. Az opponensek szinte minden esetben igen alapos, részletes véleményt mondtak az intézetek munkájáról. Az opponensi vélemények elhangzása után gyakran szakmai jellegű vita alakult ki.

* Atommag Kutató Intézet

Különösen alaposan tárgyalta a *Matematikai Bizottság* a MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET múlt évi beszámolójelentését. A bizottságok egyszerre tárgyalták az egyes intézetek 1961. évi beszámolóit és az 1962. évi tudományos terveket, így lehetőség nyílt különböző összehasonlításokra is. A viták során több, lényeges észrevétel hangzott el főleg az ez évi tervekkel kapcsolatban. A tervezés érdemi követelményei tekintetében az intézetek és a bizottságok igyekeztek érvényesíteni a következő szempontokat: a kutatni kívánt téma kapcsolódik-e a távlati tervben kitűzött kutatási feladatokhoz, segíti-e a szocialista építés gyakorlatában felmerülő problémák megoldását, figyelembe veszi-e a nemzetközi kooperáció szükségét, illetve lehetőségét és végül megvannak-e a legszükségesebb feltételek a kutatás eredményes folytatásához. Mindezek mellett az intézetek tervező munkájában a bizottságok és az OSZTÁLYVEZETŐSÉG felülvizsgálati tevékenységében még sok a formális elem, számos részletkérdés megoldatlan, ill. a megoldások még bizonytalanok. Ilyenek főképpen: a kutatásra előirányzott időtartam megtervezése, a célkitűzések meghatározása, az egyes témákra fordítandó szellemi és anyagi erők megtervezése.

Hasznos lenne, ha a BIZOTTSÁGOK a jövőben a céltámogatásban részesített intézetek tudományos tervjavaslatait nem intézmények szerinti csoportosításban vitatnák meg, hanem az egyes tudományterületek tervét témacsoportokra kellene bontani és egy-egy témacsoportot két opponensnek kiadni bírálatra. Az opponensek egy adott témacsoporton belül egységben látják az országban folyó akadémiai kutatásokat, fontosságuk szerint tudják majd súlyozni a kutatási témákat, feltárhatják az összefüggő ill. párhuzamos kutatásokat és az eddigieknél jobb, érdemibb véleményt tudnak mondani.

Célszerűnek látszik, hogy a közeljövőben az éves beszámoló és tervjavaslat megvitatáson túlmenően az OSZTÁLY illetékes bizottságai ilyen alapon megvitassák és az OSZTÁLYVEZETŐSÉG elé terjesszék egy-egy tudományágon belül a hosszabb idő óta céltámogatásban részesített kutatások helyzetéről készített jelentést. Ezzel a módszerrel könnyebben összegezhetők az elért eredmények és szembeállíthatók a téma kutatására fordított anyagi eszközökkel.

Az OSZTÁLYhoz tartozó tudományterületeken teljes egészében sikerült megvalósítani a céltámogatás koncentrálását. A koncentrálás során négy akadémiai tanszéki kutató csoport alakult ki: Ezek.

ELMÉLETI FIZIKAI ALAPKUTATÓ CSOPORT
(ELTE* Elméleti Fizikai Intézetben);

LUMINESZCENCIA ÉS FÉLVEZETŐ KUTATÓ CSOPORT
(Szegedi Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetben)

KRISTÁLYNÖVEKEDÉSI KUTATÓ CSOPORT
(Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Kísérleti Fizikai Intézetében);

KRISTÁLYFIZIKAI KUTATÓ LABORATÓRIUM
(Bpesti Orvosi Fizikai Intézetben).

Sikerült az *akadémiai álláshelyek* koncentrálása is, ugyanis egy laboráns, egy adminisztrátor és egy kutató kivételével akadémiai állásúak csak a fenti *kutató csoportokban* és az akadémiai célhitellel támogatott ELTE MATEMATIKAI INTÉZETben dolgoznak. E *kutató csoportok* csak olyan fontos szilárdtestfizikai és elméleti

* Eötvös Loránd Tudomány Egyetem

fizikai témák kutatásával foglalkoznak, amelyek kutatása akadémiai intézetekben nem folyik.

Az 1961. évben az OSZTÁLY összesen 18 egyetemi intézetet részesített céltámogatásban. Ezek közül 1962-től kezdve csak 6 intézet — a fenti *négy kutatócsoport* és *két kiemelt egyetemi intézet* (ELTE MATEMATIKAI INTÉZET, a SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM MATEMATIKAI INTÉZETE) — kap az osztálytól célhitelt. A többi egyetemi intézet a Művelődésügyi Minisztériumtól kapja a kutatómunka végzéséhez szükséges anyagi támogatást.

A *tanszéki kutatócsoportok* sok szervezeti nehézséggel küzdenek. Bár ugyanúgy tervet készítenek és beszámolójelentést adnak, mint az akadémiai intézetek, és a megbízott vezető az intézeti igazgatókhoz hasonló felelősséggel irányítja a munkájukat, ténylegesen sok esetben mégsem képeznek szervezett tudományos műhelyt. Ennek okai: a szűkös egyetemi elhelyezés, egyes intézetekben az akadémiai álláson levők túlzott oktatási tevékenysége, a munkában résztvevő tanszéki munkatársakkal kapcsolatos egyes problémák stb.

A következőkben a **matematika** területén elért eredményekről, hiányosságokról és feladatokról számolunk be.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETBEN eredményes kutatómunka folyt a matematika számos fejezetében. Az Intézet kutatóinak 1961. évben 151 tudományos dolgozata, illetve könyve jelent meg, illetve került sajtó alá. Ebből 104 az 1961. évi munka eredménye. Ezek közül 87 új tudományos eredményt tartalmazó munka. Kiemelkedő új eredményeket értek el az Intézet kutatói többek között a funkcionálanalízis, az információelmélet, az interpolációelmélet, a konstruktív függvénytan, a számelmélet, a differenciálegyenletek elmélete, az ókori matematikatörténet, valamint a számológépek programozásának elmélete terén.

A *funkcionálanalízis*ben több irányban folytak eredményes vizsgálatok. Lényegesen kibővültek a *Hilbert-tér* általános típusú operátorai ún. unitér dilatációinak a szerkezetére vonatkozó ismereteink. Két értékes kandidátusi disszertációt védtek meg. Egyikük a funkcionálanalízis és az algebra egy határterületéről (ún. *Neumann*-algebrák elméletéből) vette témáját. A másik az indefinit metrikájú terek szerkezetével és operátoraival foglalkozik; e témának aktuális fizikai vonatkozásai is vannak a terek kvantumelméletében.

A *valószínűségszámítás* terén 1961-ben az intézetben végzett kutatómunka középpontjában egy modern és az alkalmazások szempontjából jelentős új irány, az információelmélet állott. Az információelmélet egy — az Intézetben kezdeményezett — új témakörében, az *információ-akkumuláció* statisztikus törvényszerűségeire vonatkozólag, számos eredményt sikerült elérni. Eredményes volt a JU. V. LINNIK által a legutóbbi években megindított új irány, a valószínűségszámítás határeloszlástételeinek információelméleti úton való bizonyítási módszereinek a továbbfejlesztése terén végzett munka is.

Az OSZTRÁK MATEMATIKAI TÁRSULAT által Eisenstadtban rendezett *valószínűségszámítási és matematikai statisztikai kollokviumon* elhangzott 27 előadás közül 13-at az Intézet dolgozói tartottak. Különösen ki kell emelnünk a legfiatalabb kutatók sikeres szereplését.

Az *interpolációelméletben* sikerült átlagkonvergenciatételt bizonyítani végtelen intervallumra, ha az alappontrendszert általános súlyfüggvényhez tartozó ortogonális polinomok gyökei alkotják. E téren ez az első ilyen jellegű eredmény.

A *Sturm-Liouville* típusú differenciálegyenletek sajátfüggvényei szerint haladó sorfejtés közelítő mértékéről sikerült kimutatni, hogy ugyanolyan jó, mint a *Fourier*-sor esetében. Az eredmény technikai és fizikai problémák megoldásánál is jól felhasználható. Sima függvények *Fourier*-sorát vizsgálva, sehol sem differenciálható folytonos függvények egy olyan általános osztályát sikerült megadni, amely WEIERSTRASS híres példáját is magában foglalja.

Az év során az Intézetben sikerült megoldani egy ZYGMUND által 20 éve felvetett, a *trigonometrikus sorok elméletére* vonatkozó problémát. Először valószínűségszámítási módszerrel sikerült egy ellenpélda létezését bebizonyítani ZYGMUND sejtésére, majd később explicit ellenpélda konstrukciója is sikerült.

A *számelmélet* terén elért jelentős eredmények közül is kiemelkednek az összehasonlító primszámelméletre vonatkozó eredmények, melyek részben magyar—lengyel együttműködés során jöttek létre. Megelőzőleg e témakörben több mint száz éven keresztül szinte semmi előrehaladás nem történt.

Számottevő eredmények kidolgozására került sor a *differenciálegyenletek elméletében* is, az inhomogén hővezetési egyenlet megoldása gradiensének a perem- és kezdeti értékek alapján való becslésére vonatkozólag.

Az *ókori görög matematika történetére* vonatkozó kutatások eredményesen folytatódtak, különösen az arányelmélet tekintetében.

Kidolgozásra került egy közvetlen matematikai formulanyelven programozható, *gyorsműködésű elektronikus digitális számológép* teljes logikai sémája. Az ilyen típusú számológépnél a használatos gépek legidőigényesebb folyamata, a programkészítés, minimálisra csökkent.

Bár az Intézet még ma sem rendelkezik elektronikus számológéppel — amelynek hiánya egyre égetőbbé válik —, máris komoly elméleti és gyakorlati munka folyik az *elektronikus számológépek programozás*ával, különösen a *gépi nyelvek* vizsgálatával kapcsolatban. Így pl. egy interpreter kidolgozására került sor az URAL lebegővesszős programozásához. Kézikönyv készült az URAL gép programozóinak számára. Ezek a vizsgálatok részét képezik annak a törekvésnek, hogy az Intézet elméletileg felkészüljön arra, hogy elektronikus számológépet működtessen.

Eredményes munka folyt az Intézet birtokában levő MN-7 típusú *analóg számológép*en, valamint annak tökéletesítése terén.

Az Intézetben elért tudományos eredmények létrejöttében lényeges szerepet játszott a *kollektív munka módszerei*nek fejlődése. Ez a munka főként az Intézet szemináriumaiban folyik. Az Intézet szemináriumai 1962-ben összesen 232 ülést tartottak, amelyeken az egyetemeken és az iparban dolgozó matematikusok, valamint egyetemi hallgatók is részt vettek.

Bár a fent mondottakból is kitűnik, külön is hangsúlyozni szeretnénk, hogy az Intézetben elért új tudományos eredmények nagy része közvetlen gyakorlati jelentőséggel bír. Az Intézet azt a feladatát, hogy a tudományt a gyakorlat, a népgazdaság szolgálatába állítsa, két módon teljesíti: egyrészt a gyakorlati alkalmazások szempontjából jelentős új elméleti eredmények elérése útján, részben pedig konkrét külső megbízások teljesítésével.

Rátérünk most az Intézet ez utóbbi téren 1961-ben végzett munkájára.

Az Intézet *külső megbízások*ra végzett munkája is egészségesen fejlődött. Azok az ipari és tudományos kutatóintézetek, üzemek és intézmények, amelyekkel az utóbbi években összeköttetés alakult ki, újabb problémákkal fordultak az intézethez, egyes intézményekkel az együttműködés állandó jellegűnek mutatkozik. Emellett néhány újabb intézmény is jelentősebb megbízással fordult az Intézethez. Mind több intézmény fordul szaktanácsért az Intézethez vagy kér munkatársat szakértői közreműködésre. Kétségtelen, hogy az Intézet ez irányú kapacitását lényegesen növelni kellene a jövőben, hogy az Intézet ezt a népgazdaság szempontjából fontos tevékenységét további területekre is ki tudja terjeszteni. Az év során érkezett külső megbízások száma 140 volt, míg az év folyamán elintézett megbízások száma 126. Az Intézet által alapítása óta megoldott feladatok száma 1466.

Míg az Intézet által a matematika gyakorlati alkalmazásai terén végzett munka a múltban csaknem kizárólag a matematika módszereinek a természettudományok és a technika, valamint az utóbbi években a gazdasági élet területén való alkalmazásaira vonatkozott, az 1961-es évben megkezdődött a kapcsolatok felvétele más területekkel is, így pl. a nyelvészekkel. Az e téren megindult munkát tükrözték (a már 1962-ben rendezett) matematikai-nyelvészeti konferencián elhangzott előadások, így pl. az algebra és a halmazelmélet módszereinek *nyelvészeti alkalmazás*áról, továbbá az információelmélet nyelvészeti alkalmazásairól tartott beszámolók.

Az alábbiakban példaként néhány, az Intézetben külső megbízásra megoldott problémát sorolunk fel.

Transzformációs formula kidolgozására került sor, a KÖZPONTI STATISZTIKAI HIVATAL Ágazati Kapcsolatok Mérlege és az ORSZÁGOS TERVHIVATAL (OT) Szaktárca Mérlegek között. Ezt az eredményt az OT munkája során máris jól fel tudta használni.

Az Intézet a HÍRADÁSTECHNIKAI KUTATÓ INTÉZET megbízásából eredményesen foglalkozott *alkatrészek élettartam-eloszlásának vizsgálatával.* Ezzel az Intézet hozzájárult a KGST keretében Magyarország által elvállalt nagy gazdasági jelentőségű feladatok megoldásához.

A KGM HÍRADÁSTECHNIKAI IGAZGATÓSÁGának megbízásából foglalkozott az Intézet alkatrészek meghibásodási sűrűségéből egész *berendezésláncok megbízhatóságának*, azaz az üzemképtelenség idejének meghatározásával.

Foglalkozott az Intézet *bányaidomkövek mintavizsgálatának* kérdésével, és sikerült kidolgozni az eddiginél hatásosabb és gazdaságosabb módszert.

A NAGYNYOMÁSÚ KÍSÉRLETI INTÉZET megbízásából az Intézet tervet dolgozott ki *kísérletek gazdaságos elvégzésére és kiértékelésére* vonatkozólag, amely jelentős költség- és időmegtakarítást tesz lehetővé.

A PHYLAXIA ÁLLAMI OLTÓANYAGTERMELŐ INTÉZET dolgozóival a diftéria antitoxin termelés céljából *hiperimmunizált lovak immunválaszát* vizsgálták. A közel 800 ló adatai alapján keresték, hogy az immunizálásnak melyik az a módja, amellyel a legrövidebb idő alatt a legjobb értékű szérumot lehet nyerni.

A KÍSÉRLETI ORVOSTUDOMÁNYI KUTATÓ INTÉZETnek a *mellékvesekéreg működésével kapcsolatos témájának* kidolgozásában, a kísérletek értékelésében, részben a tervezésbe bekapcsolódva részt vettek az Intézet munkatársai.

Az Intézet előtt álló feladatok közül, melyek megoldására az erőfeszítéseket a jövőben fokozni kell, a következőket emeljük ki:

A távlati tudományos kutatási terv útmutatásai alapján tovább kell fejleszteni az alapkutatásokat a matematika különböző fejezeteiben. Nagy súlyt kell helyezni az elért eredmények gyakorlati alkalmazására és a matematika azon ágainak művelésére, amelyek a gyakorlati alkalmazások tekintetében kiemelkedő szerepet játszanak. Fejleszteni kell a matematikai logikai kutatásokat és műszaki, valamint kibernetikai kérdésekre való alkalmazásait, továbbá a matematikai gépek programozásának egyszerűsítésére való felhasználását. Nagy súlyt kell helyezni a numerikus megoldási módszerek fejlesztésére. Tovább kell fejleszteni a valószínűségszámítás, a matematikai statisztika, az információelmélet és ezek gyakorlati alkalmazására irányuló kutatásokat. Fokozottabban kell koncentrálni az erőket a differenciálegyenletekkel való foglalkozásra, továbbá a funkcionálanalízis fejlesztésére. Folytatni kell a kutatómunkát a valós és a komplex függvénytan, az algebra és a geometria területén, az eddigieknél nagyobb figyelmet fordítva a matematika ezen ágainak gyakorlati alkalmazásaira. Azon területek közül, ahol a matematikai módszerek gyakorlati felhasználását továbbra is különösen szorgalmazni kell, az ipar és a mezőgazdaság mellett külön kiemelendők a matematika közgazdasági alkalmazásai, melyeknek népgazdasági jelentősége rendkívül nagy. E területen máris folynak eredményes kutatások és konkrét problémákra vonatkozó munkálatok mind a MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETben, mind pedig a SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTban és egyebütt. E kutatásokat a jövőben sokkal jobban koordinálni kell. E kérdéssel a MATEMATIKAI BIZOTTSÁGnak is foglalkoznia kell a II. OSZTÁLY bevonásával.

A SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONT az M-3-as elektronikus számológépen, átlag havi 300 órás számolási időben, száznál több tudományos, műszaki és gazdasági feladatot oldott meg, akadémiai és más kutatók, valamint a népgazdaság több intézménye és nagyüzeme részére. Ilyen feladat volt pl. az *optikai lencserendszerek tervezésének* még kidolgozás alatt álló *automatizálása*, mely optikai gyártmányainkat versenyképessé teheti vagy a hazai bőrimport optimális összetételének meghatározása, mely jelentős összegű devizamegtakarítást tesz lehetővé.

A számítások során több, elméleti szempontból is figyelmet érdemlő kutatási feladatot oldott meg a Központ a *numerikus analízis* és az *operációkutatás*, a *programozáselmélet* és az *algoritmusok elmélete* területén.

A gépen a NYELVTUDOMÁNYI INTÉZETtel közösen végzett *nyelvi hangstatisztikai vizsgálatok* és a *gépi fordítás*sal kapcsolatos előkészítő munka a kibernetikai nyelvészeti kutatások megindulását jelzi.

Az M-3 teljesítőképessége kicsinek bizonyult még a csupán kísérleti jellegű feladatok számára is. Ezért sebességének 30—50-szeresre emelése indult meg 1961-ben. Elkészült egy, a jelenleginél 30—40-szer gyorsabb kiíró berendezés. Mágneses logikai alegység első lépéseként egy ferrit-diódás alegység készült el.

A fejlett ipari és tudományos bázissal rendelkező országokban a digitális technika és a digitális számológépek alkalmazása a tudományos kutatás, a műszaki fejlesztés, sőt az élet igen sok más területén is mindennapos igény és követelmény lett. A magyarországi helyzetet vizsgálva azt tapasztalhatjuk, hogy — bár bizonyos haladás történt az MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTjának létrehozásával és egyes ipari tárcák területén is — lemaradásunk ezen a területen igen nagy és az eddigi intézkedések még arra sem voltak elegendők, hogy a lemaradás tovább ne fokozódjék nagymértékben. Mindezek alapján az Osztályvezetőség úgy tartja, hogy az MTA feladatai adott esetben két csoportra oszthatók:

a) egyrészt olyan intézkedések megtétele, amelyek a már meglevő kutatóbázisok optimális felhasználását célozzák,

b) másrészt olyan tervezet készítése, amely biztosítja az országnak és ezen belül a MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁnak a többi szervekkel együttes, tervszerűen koordinált fejlesztését a számológépek felhasználásában.

a) Az első feladattal kapcsolatban az OSZTÁLYVEZETŐSÉG a következő véleményt alakította ki: Miután 1956-ban nyugatról valuta és embargo nehézségek miatt digitális számológépet nem tudtunk beszerezni, a Szovjetunió pedig azokban az időkben még nem szállított gépeket, a SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTban szovjet dokumentáció alapján egy M-3 gépet építettek meg. A gép kisebb-nagyobb nehézségek után üzembe került és 1960. január óta üzemel folyamatosan. A gép ma már nem tekinthető korszerűnek, de egy sereg feladat megoldására még hosszú ideig alkalmas.

Időközben azonban a gépbeszerzési lehetőségek területén jelentős változások következtek be, amennyiben ma már a nyugati beszerzés embargo okoknál fogva nem lehetetlen és szovjet szállítási lehetőségek is fennállnak bizonyos típusokra. Így általában mindazon okok, melyek annak idején indokolták az M-3 saját erőből történő építését már jelentős részben nem állnak fenn.

Ugyanakkor hazai vonatkozásban is bizonyos változások következtek be a gyártási területen, amennyiben hazai gyáraink vagy már gyártanak, vagy a közeljövőben elkezdenek gyártani bizonyos digitális elemeket. Következésképp megszűnt annak a kényszere, hogy egy intézményünk teljes vertikalitással foglalkozzék az elektronikus számológépek építésével összefüggő tudományos és praktikus kérdésekkel — ezt amúgy sem győzné erővel egyik szóbajövő intézményünk sem. A SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONT feladata ezért a jövőben ilyen tekintetben inkább olyan logikai tervek kidolgozására kell, hogy szorítkozzék, amelyek hazai digitális elemekből megfelelő, kisebb vagy közepes kapacitású gépek összeállítására vonatkozik. Ezt a feladatot a Központ matematikus és műszaki gárdája el is tudja végezni.

Máris érezhetően gátolja e gépek jó és sokoldalú kihasználását, hogy a programozáselméleti, numerikus és az algoritmusokkal foglalkozó praktikus kutatások, továbbá az operációkutatás területén is lemaradtunk. Közepes és nagy kapacitású gépeket jó hatásfokkal csakis modern programozási módszerek alkalmazásával lehet üzemeltetni, a technikai és gazdasági feladatok nagyobb része, a szervezési, tudományos, különösen pedig a komplex tudományos problémák zöme pedig csak akkor oldható meg, ha a numerikus módszerek, az algoritmusok és automaták területét érintő kutatások és az operációkutatás megfelelően előrehaladnak. Erről a jövőben gondoskodnunk kell.

Az eddig kikristályosodottnak tekinthető elgondolások szerint ennek megfelelően a SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONT fő feladatává egyre inkább az elektronikus számológépeken alapuló korszerű számítástechnika meghonosítása és fejlesztése válik. Emellett kísérleti bázist kell biztosítania a kibernetika különböző elektronikus számológépet igényelő ágainak (logika, biológia, nyelvészet stb.). A fenti feladat megvalósítása érdekében biztosítani kell a központban rendelkezésre álló elektronikus számológép, illetve gépek maximális kihasználását, továbbá a Központnak kutatásokat kell végeznie a számítástechnika alábbi területein:

1.) programozáselmélet,
2.) numerikus módszerek,
3.) automaták és algoritmusok elmélete,
4.) gazdasági alkalmazások (operációkutatás).

Igen komoly problémákat okoz máris a digitális technika káderszükségletének biztosítása. Különösen gyakorlati és numerikus szempontból jól képzett matematikusokban érezhető máris komoly hiány, s ez a közeljövőben rohamosan erősödni fog egyrészt az egyetemi évfolyamok létszáma, másrészt a matematikusképzés tartalmi fogyatékosságai következtében. Itt a MŰVELŐDÉSÜGYI MINISZTÉRIUM és a MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA együttes erőfeszítésére van szükség. Nem biztosítható azonban könnyen a digitális technikához jól értő mérnökszükséglet sem. Ezért a MŰSZAKI OSZTÁLYnak és a SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTnak fontos feladata, hogy bázist biztosítson a számítástechnika káderszükségletének kiképzéséhez is. Gondoskodni kell emellett természetesen a meglevő gépek és a továbbiakban beszerzendő gépek megfelelő, jó kihasználású, magas színvonalú üzemeltetéséről is.

A SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONT személyi összetételében olyan struktúrát örökölt, amely részben az M-3 gép építésének folyamán alakult ki, részben pedig azt az elképzelést tükrözte, hogy az intézet fő feladata a jövőben is elektronikus számológépek építése lesz.

Ily módon a KÖZPONT jelenlegi összetétele a fent vázolt feladatoknak nem felel meg és így szükséges a feladatokban bekövetkezett eltolódásnak megfelelő változás szervezeti és személyi vonatkozású konzekvenciáját végrehajtani.

Ennek megfelelően, figyelembe véve továbbá, hogy a MŰSZAKI OSZTÁLY keretén belül működő AUTOMATIKAI KUTATÓ LABORATÓRIUM digitális alapáramkörökkel, illetve digitális elemek tervezésével és alkalmazási lehetőségeivel is foglalkozik, a SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTON belül működő és a digitális elemekkel foglalkozó műszaki csoportot át kell helyezni az AUTOMATIKAI KUTATÓ LABORATÓRIUMba, kutatási feladatukkal együtt.

Ugyanakkor a SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTnak az M-3 gép építésénél felmerülő feladatok megoldása céljából felduzzasztott műszaki segéderőlétszámát a további feladatok figyelembevételével erőteljesen csökkentenie kell és helyettük a kutatási, illetve üzemeltetési feladatok megoldásában ténylegesen résztvevő matematikusokat, ill. közgazdászokat kell felvennie.

b) A második feladattal kapcsolatban az OSZTÁLYVEZETŐSÉG javasolja, hogy az AKADÉMIA ELNÖKSÉGE sürgősen bízzon meg egy bizottságot az érdekelt osztályok képviselőiből, annak felmérésére, hogy melyek a feladatok a számológépek alkalmazása és elterjesztése vonatkozásában, a kutatás, káderfejlesztés stb. érdekében és ez a bizottság az OMFB, TFT és érdekelt minisztériumokkal tervezetet dolgozzon ki a teendők tekintetében, melyet az ELNÖKSÉG terjesszen a kormány elé.

Eredményes munka folyt *a célhitellel támogatott egyetemi intézetek*ben is a beszámolási időszakban.

Az ELTE MATEMATIKAI INTÉZETÉBEN folyó kutatómunka jelenleg a matematika következő ágaira terjed ki: *számelmélet és algebra, geometria, topológia, valós-* és *komplexfüggvénytan, funkcionálanalízis, differenciálegyenletek, valószínűségszámítás és ennek alkalmazási területei, a matematika alapjai, halmazelmélet, a matematika oktatása.* A felsorolt területek szinte mindegyikében értékes részeredmények születtek az elmúlt évben.

Mind több, az Intézetben dolgozó idősebb és fiatal matematikus vállal hosszabb lélegzetű, alaposabb előkészítést igénylő tudományos feladatot, pl. monográfia írását.

A Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetében eredményes és kiterjedt kutatások folytak *az ortogonális sorok elméletében,* az ortogonális sorok konvergenciája és szummációs kérdéseinek a vizsgálatában. A *funkcionálanalízis*ben jelentős eredmények születtek a Hilbert-tér általános típusú operátorainak a vizsgálata terén. Sikerült az ezekre vonatkozó függvénykalkulust nem-korlátos függvények egy széles osztályára is kiterjeszteni, eközben meglepő kapcsolatok derültek ki komplex függvénytani kérdésekkel.

Eredményes munka folyt az *algebrai kutatások*ban is. Sikerült elegendő feltételeket találni arra, hogy egy félcsoportban a reguláris elemek csoportot alkossanak. Eredményesen lezárult a speciális hálóosztályok vizsgálata. A geometriai objektumok elméletében bizonyos r-paraméteres transzformációs csoportoknak geometriai objektumokkal való jellemzését sikerült megadni.

Sikerült egyszerűsíteni a természetes számok aritmetikája axiomarendszerének ellentmondástalanságát állító tétel Gentzen-féle bizonyítását. Elvi jelentőségű a Tarski-féle igazság-definíciók marxista ismeretelmélethez való viszonyának tisztázása, amellyel az intézet a múlt évben kezdett foglalkozni. A *matematikai logika* legújabb eredményeinek marxista értelmezésével is foglalkoznak az intézetben.

A Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematikai Intézetében különböző vizsgálatokat folytattak a *hiperbolikus síkgeometria* körében. Eredményesen folytak a *metrikus és affinösszefüggő terek leképezéseinek* vizsgálatai. Részeredmények születtek a *csoportelméleti,* a *gyűrűelméleti* és az *általános algebrai kutatások* terén. Eredménnyel folytatódik a *függvényegyenletek és alkalmazásaik* vizsgálata.

A *valószínűségszámítás* határeloszlástételeire és a *sztochasztikus folyamatok elméletére* vonatkozó kutatások ugyancsak eredményesek voltak a múlt évben.

Az Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Matematikai Tanszéke a *Finsler-féle terek* és általánosított nem-euklideszi terek közötti összefüggések, a Finsler-féle terek affin csoportjának struktúrája, ill. a tér görbületi viszonyai közötti kapcsolat vizsgálatával foglalkozott eredményesen.

A Budapesti Műszaki Egyetem Villamos-mérnökkari Matematikai Tanszéke foglalkozott a matematikának és általában a gépi számolásnak *orvosi,* elsősorban *diagnosztikai alkalmazásá*val. Részeredmények születtek az *operátorszámítás* és *disztribució elmélet* terén. Néhány eredményt sikerült elérni a *differenciálegyenletek differenciálgeometriai* vizsgálatával kapcsolatban.

A Budapesti Műszaki Egyetem III. Matematikai Tanszéke az *ortogonális sorok Riesz-féle szummációjával* és az *általános topológia* újabb felépítési módszereinek vizsgálatával foglalkozott.

A matematika területén mutatkozó hiányosságokról és problémákról szólva a következőket említhetjük. A matematika területén erőteljesen törekedni kell arra, hogy a matematikai kutatást újabb fejezetek bekapcsolásával és az alkalmazások szem előtt tartásával továbbfejlesszük, mert ilyen vonatkozásban helyenként számottevő hiányok vannak. Emellett nem szabad elhanyagolni a matematika azon területeit sem, amelyeket nálunk már eddig is igen eredményesen műveltek és amelyeknek hagyományai vannak.

Nagymértékben akadályozza a Matematikai Kutató Intézet fejlesztését az a körülmény, hogy a szükséges létszámkeretnek évek során csak a töredékét sikerült biztosítani. A távlati tudományos tervből adódó feladatok, a matematika nálunk elmaradott, de az alkalmazások szempontjából is fontos ágainak fejlesztése (pl. differenciálegyenletek elmélete és alkalmazásai), a külső megbízások teljesítése és a megbízások számának növelése úgy oldható meg megnyugtatóan, ha az Intézet a szükséges létszámkeretet megkapja. A szükséges létszámkeret biztosítását halaszthatatlanul szükségessé teszi a matematikai logika és alkalmazásai osztály fejlesztése is.

Hátráltatja az Intézet munkáját a helyiséghiány is. Az Intézet Szegeden működő részlegei elhelyezését is mielőbb meg kell oldani. Az OSZTÁLY javasolta, hogy Szegeden létesüljön egy akadémiai székház, ahol az Akadémia Szegeden működő más részlegeivel együtt az Intézet szegedi részlegei is megfelelő elhelyezést kapnának.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET kutatómunkája és a külső megbízások zavartalan, gyors elintézése múlhatatlanul szükségessé teszi, hogy az Intézet mielőbb elektronikus számológépet üzemeltethessen. A helyiséghiányt ez a körülmény is nyomatékosan aláhúzza.

A magyar matematikai kutatás és oktatás eredményeinek elismerését is jelenti az a körülmény, hogy az utóbbi időben elég sok külföldi meghívás érkezett Akadémiánkhoz és intézeteinkhez is, amelyben matematikusokat hívnak meg hosszabb időre vendégprofesszornak. A meghívások elfogadásakor matematikusainknak nagyobb nyomatékkal kell mérlegelniök azt a szempontot, vajon távollétük nem akadályozza-e a rájuk bízott munkát és a gondjaikra bízott fiatalok szakmai fejlődését, s hogy bár ápolnunk kell a tőkés országokkal a tudományos kapcsolatot, mégis elsősorban a baráti országokkal fennálló kapcsolatok megerősítésére kell törekednünk.

A kibernetikai kutatások és az ennek alapjául szolgáló matematikai, ill. *matematikai-logikai kutatások* erőteljes fejlesztése egyik elsőrendű feladatunk, bár ez részben túlnyúlik az OSZTÁLY hatáskörén. Az előttünk álló feladatok kifejezetten megkövetelik a kibernetika széleskörű alkalmazását, az elektronikus számoló- és szabályozó berendezések által nyújtott lehetőségek kihasználását a termeléstechnikában, a tervezési és szerkesztési munkákban, és nem utolsósorban magában a tudományos kutatásban (a fizikai és műszaki tudományok területén kívül a nyelvtudományban, a közgazdaságtudományban, valamint a biológiában és az orvostudományban is).

A kibernetikai kutatások még korántsem folynak jelentőségüknek megfelelően az országban. Az egyes, főleg spontán létesült kutatórészlegek, amelyek ezen a területen is dolgoznak elszigeteltek és ennek megfelelően gyengék. Meg kell vizsgálni, hogyan lehetne ezen segíteni. Első lépésként megszervezte az ELNÖKSÉG a KIBERNETIKAI BIZOTTSÁGOT. Ez egyesíti a kibernetikai kutatások különböző tudományos erőit, s már a legközelebbi jövőben javaslatokat dolgoz ki az ezen a téren folyó tudományos tevékenység fokozására és koordinálására.

A következőkben a **fizikai** kutatások helyzetéről számolunk be.

A közelmúltban az OSZTÁLYVEZETŐSÉG, az ORSZÁGOS ATOMENERGIA BIZOTTSÁG ALKALMAZOTT és ALAPKUTATÁSOK SZAKBIZOTTSÁGA és a TUDOMÁNYOS TANÁCS együttes ülésén tárgyalta meg a KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZET (KFKI) múlt évi tudományos beszámolóját és ez évi tudományos tervét. Az előző évekkel szemben fokozottabban érvényesült a KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZETben az a törekvés, hogy az anyagi és szellemi erőket néhány jól kiválasztott kutatási területen koncentrálják. Az Intézetben folyó kutatómunka 1961-ben a következő négy fő irányban haladt:

I. Elvi jelentőségű alapkutatások az *anyag hullámrészecske természetével*, az *atommagok* és *nagyenergiájú részecskék szerkezetével*, valamint a *szilárdtestek fizikájával* kapcsolatos területen.

II. Alkalmazott kutatások a *szerves hűtő-* és *lassítóközegű reaktorok* egyes fizikai, kémiai és műszaki kérdéseinek tisztázására.

III. Alkalmazott kutatások a *radioaktív izotópok* előállítási módszereinek fejlesztésére és gyártási tevékenység a szükségletek kielégítésére.

IV. Alkalmazott kutatások a *nukleáris elektronikus mérőberendezések* fejlesztésére; gyártási, együttműködési tevékenység a kidolgozott készülékek ipari átadásának és gyártmánybevezetésének előmozdítására.

Az 1961. évre jóváhagyott tervben szereplő 13 főtéma ezeknek a feladatoknak a megoldását célozta. A tervben szereplő konkrét célkitűzéseket a baráti országok között kialakult és egyre erősödő kapcsolatok figyelembevételével, a legfontosabb területeken a lehetséges koordináció kihasználásával, szabták meg.

A reaktorkutatási program helyességének megítélésében nagy segítséget jelentett az 1961 júniusában Moszkvában megtartott megbeszélés, amelyen a KURCSATOV-ról elnevezett ATOMENERGIA INTÉZET szakembereivel a programot a KFKI vezetői részletesen ismertették és egyeztették.

Az izotóp kutatási és gyártási program helyes módszereinek kialakításában nagy jelentősége volt annak a szovjet szakértői látogatásnak, amely 1961 elején valósult meg. A kutatási és gyártási program a KGST illetékes szakbizottságában egyeztetést nyert. A nukleáris műszerkutatás és gyártási program a hazai adottságok figyelembevételével ugyancsak a KGST megfelelő szekciójában kialakult elképzelések szerint formálódott.

Meg kell jegyezni azonban, hogy nem minden területen sikerült még a kellő mértékű koordinációt biztosítani és ennek hátrányos következményei is vannak. Így pl. a kooperáció elmaradása a magfizikai gyorsító berendezések építése terén meghosszabbította mind a kutatás, mind az ipar számára fontos berendezések szakszerű elkészítését.

A következőkben a KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZETben a múlt évben elért legfontosabb eredményeket ismertetjük.

A *nagyenergiájú magkölcsönhatások* vizsgálata területén jelentős az a felismerés, hogy a nukleon-nukleon kölcsönhatás hatáskeresztmetszete igen széles energiatartományon belül állandónak adódik. Nem kevésbé értékes az a munka sem, amelyet a BOLGÁR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA hegyi laboratóriumában a KFKI-ban kidolgozott mérőberendezések segítségével végeztek az Intézet munkatársai a *kiterjedt légizáporok átmeneti effektusai*nak vizsgálata terén. Figyelemre méltó, hogy a *kozmikus sugárzás geofizikai* és *asztrofizikai vonatkozásai*nak vizsgálatára az intézetben működik a világ egyik legnagyobb kozmikus teleszkópja, amelynek segítségével sikerült az asztrofizikai jelenségek és a kozmikus sugárzás intenzitása közötti jellegzetes kapcsolatot biztonsággal kimutatni.

A *magfizikai kutatások* területén eredményeket értek el az intézetben egyes könnyű magok szerkezetének, továbbá a maghasadáskor lejátszódó folyamatok mechanizmusának vizsgálata területén.

A *szilárdtestfizikai kutatások* területén új eredményeket sikerült elérni néhány ötvözet (Cu_3Au és Fe_3Al) rendeződési mechanizmusának vizsgálata terén.

Az elmúlt évek során *sikerrel üzemeltették* az 1960. végén megépült *O-teljesít-*

ményű reaktort (ZR—1), és rajta az organikus hűtő- és lassítóközegű reaktorok vizsgálatához értékes előkísérleteket folytattak az Intézetben.

Az 1961. év folyamán az *izotoptermelés* az egészségre ártalmas egészségügyi viszonyok mellett is kielégítően folyt mindaddig, amíg az egészségügyi feltételek megjavítása érdekében módosításokat kellett a programban végrehajtani. Az izotóptermelés eredményeit a következő adatok jellemzik: Az Intézetben rendszeresen 25 féle izotópféleséget állítanak elő 35 különböző vegyület formájában. 1961. január 1-től október 30-ig az Intézetben, mintegy 30 C általános összaktivitással 233 izotópkészítményt készítettek el, amelyek devizaforintban kifejezhető értéke mintegy 400 000 forintra tehető.

Népgazdasági szempontból különösen nagy jelentősége van a *nukleáris műszerfejlesztés* terén végzett munkásságnak. Értékes eredmények születtek a különböző nukleáris alapműszerek fejlesztése és alegységekre való bontása terén. Jelentős volt az a tevékenység, amelyet a kutatók az ipari átadás és gyártmánybevezetés, valamint az ipari üzemekkel való együttműködés érdekében folytattak. A KFKI által kifejlesztett és az iparnak átadott típusokból a hazai ipar 1962-ben mintegy 70 millió értékben fog nukleáris műszereket gyártani.

Az eredmények felsorolása kapcsán rá kell mutatni arra a körülményre, hogy az Intézet tevékenységének színvonala a felsorolt kutatási ágazatok legtöbbjében, bár elmarad a legfejlettebb országok színvonalától, egyes területeken — elsősorban az elvi jelentőségű alapkutatások néhány kérdésében — kielégítő. Ennek az az oka, hogy a kis országokban a divatos, tudományos problémák kidolgozása helyett sokkal hasznosabb néhány alapvető kérdésben hosszú perspektívára berendezkedő, elmélyült kutató tevékenységet folytatni. A divatos kérdésekkel való foglalkozás ugyanis arra késztetne, hogy állandóan változtatni kellene a munka célkitűzéseit, ami sok anyagi és szellemi energiát követelne, és így a kutatók nem tudnának elmélyült munkát végezni. Az elvi jelentőségű alapkutatások területén *a továbbiakban is messzemenően biztosítani kell a hosszú időre szóló elmélyült tevékenységet* és csak igen nagy meggondoltsággal szabad új kutatási program kidolgozásához kezdeni.

Az Intézetben a magfizikai kutatások műszaki feltételei elmaradnak a fejlettebb országokban meglevő feltételektől, viszont a rendelkezésre álló szerény berendezésekkel, néhány helyesen megválasztott területen mind a baráti országok, mind a közepes fejlettségű tőkés országok viszonylatában néhány területen azonos színvonalat sikerül tartani. A következő években azonban feltétlenül szükséges, hogy egyrészt a műszaki feltételek (új gyorsító berendezések), másrészt a szakkáderekkel való ellátottság jobb biztosításával elérje az intézet, hogy a kutatások színvonala ne csökkenjen.

A kísérleti reaktorkutatás vonalán a baráti országok viszonylatában élvezett előny csak akkor tartható fenn, ha a programot nem szélesíti az Intézet és messzemenően támaszkodik a szovjet intézményekkel való szoros tudományos együttműködésre. A radioizotóp termelés terén az eredmények színvonala jónak mondható a többi népi demokratikus ország színvonalához képest, bár ezekben az országokban előbb kezdtek munkához és a technikai feltételek is kedvezőbbek. Az elért színvonal megtartásához nélkülözhetetlenül szükséges az izotóp üzem mielőbbi megépítése, továbbá a forró atomok kémiája terén végzett kutatómunka jelentős fejlesztése.

Az 1961. évi tudományos tevékenység során a következő hiányosságok mutatkoztak. A gyors neutronspektroszkópiai vizsgálatok célkitűzéseit kellő időben nem határozta meg az Intézet és ezért állt elő az a helyzet, hogy az 1961. évi tervben szereplő célkitűzések módosulást szenvedtek. A magkémiai vizsgálatok terén a szerves lassító és hűtőközegek kémiai vizsgálata nem indult meg kellő lendülettel. Nehézségek voltak a reaktorban történő besugárzási kísérletek előkészítésével is. A kidolgozott mérési módszerek nem voltak kellően megbízhatók.

Az Intézet tudományos tevékenységét nagymértékben segítette az a körülmény, hogy mind a mérési adatok feldolgozására, mind pedig bizonyos számítási feladatok elvégzésére rendelkezésre állt az URAL—1 *típusú elektronikus számológép.* A gép teljes kapacitását lekötötte az intézet tudományos tevékenységével kapcsolatban jelentkező feladatok megoldása.

Szükséges megemlékezni az 1961. évi tudományos tevékenység kapcsán arról a munkásságról, amely a *fizikával kapcsolatos filozófiai kérdések* tisztázása érdekében folyt. Számos előadáson és megbeszélésen került megvitatásra a relativitáselmélet értelmezésével kapcsolatos új koncepció.

Megállapítható, hogy a KFKI tudományos tevékenysége eredményes volt és az 1961. évre jóváhagyott terv fő célkitűzéseiben végrehajtásra került.

Az atomkutatás és az atomenergia békés alkalmazásának második ötéves tervében a tudományos kutatás fő irányait a KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZETben az alábbi célkitűzések határozták meg:

a) Biztosítani kell a tudományos felkészültséget az atomreaktorok tervezéséhez és egyes részeinek gyártásához szükséges műszaki alapok perspektivikus kialakítása céljából.

b) Fejleszteni kell a radioaktív izotópok és jelzett vegyületek gyártási módszereit.

c) Meg kell teremteni a nukleáris mérés- és szabályzástechnika tudományos és népgazdasági felhasználásának feltételeit korszerű műszerek kifejlesztésének és gyártásának megvalósítása révén.

d) Elvi jelentőségű kutatásokat kell folytatni a nagyenergiájú részecskék fizikája, a magfizika, a szilárdtestfizika és magkémia néhány aktuális problémakörében.

Meg kell említeni, hogy már az 1961. évi tudományos terv összeállításánál is ezek a célkitűzések érvényesültek.

Az 1962. évi tudományos célkitűzéseket az Intézet az előző év tapasztalatainak elemzése alapján állította össze. Szükségesnek látszott a kutatás további koncentrálása az alapvető feladatok megoldása érdekében, s ezért a fő témák bizonyos átcsoportosítását hajtotta végre az intézet vezetősége.

Az OSZTÁLYVEZETŐSÉG megállapította, hogy az Intézet 1962. évi tudományos tervében mind az elvi alapkutatások, mind a gyakorlati szempontból fontos alkalmazott kutatások kellő súllyal szerepelnek.

A *magfizikai kutatások*ról a dubnai EGYESÍTETT ATOMKUTATÓ INTÉZET TUDOMÁNYOS TANÁCSÁNAK KISENERGIÁJÚ MAGFIZIKAI SZEKCIÓJA által rendezett konferencián — amelynek célja az elvi kutatások területén lehetséges koordináció megvalósítása — rendszeresen beszámol az Intézet.

A *nagyenergiájú részecskék fizikájával kapcsolatos kutatási területen* intenzív kapcsolata van az intézetnek az EGYESÍTETT ATOMKUTATÓ INTÉZETtel. Célszerű ezt a kapcsolatot aktív együttműködés formájában 1962 folyamán tovább szélesíteni.

Mindez arra mutat, hogy a KFKI tudományos célkitűzései a szocialista országokkal való együttműködés szellemében készültek és így megfelelnek az ötéves terv azon általános elvi célkitűzésének, hogy kutatásaikkal néhány jól kiválasztott területen a baráti országokkal és elsősorban a Szovjetunióval való szoros együttműködésre támaszkodva biztosítsák a magenergia népgazdasági felhasználásához a szükséges tudományos előfeltételeket.

Az 1962. évi tudományos terv végrehajtásához fokozni kell az Intézet műszaki kapacitását a finommechanikai és bizonyos anyagtechnológiai tevékenység területén. Növelni kell azon gépészmérnökök számát, akik a tudományos kutatásban aktívan részt vesznek és a tudományos kutatómunka mérnöki feladatainak megoldásához kellő tapasztalattal és tehetséggel rendelkeznek. Gondoskodni kell az erősebben fejlődő területeknek fiatal, tehetséges fizikusokkal, elektromérnökökkel, gépészmérnökökkel és vegyészmérnökökkel való ellátásáról.

Összefoglalva megállapítható, hogy a KFKI 1962. évi tudományos terve az ötéves tervben kitűzött fő feladatok megoldására irányul, hasznosítja a nemzetközi együttműködés lehetőségeit, célkitűzéseiben figyelembe veszi a reális adottságokat. A terv végrehajtása az intézet tudományos továbbfejlődését biztosítja.

Az ATOMMAG KUTATÓ INTÉZETben a *magspektroszkópia* tárgykörű kutatási programban értékes részeredmények születtek. Így pl. a J^{131} bomlási sémájának vizsgálatában új gamma-vonalat és új nívót sikerült találni, továbbá egy eddig a sémában el nem helyezett gamma vonal helyét sikerült teljes bizonyossággal megállapítani. Egy további kérdéses nívó létezését is sikerült bizonyítani és energiaértékét pontosabban meghatározni.

Igen intenzíven foglalkoznak az Intézetben a *magreakciók mechanizmusának* tisztázásával. Ebből a célból több magfolyamat megvizsgálására került sor. Eredményesen vizsgálták magfolyamatok hatáskeresztmetszetének viszonyát. Meghatározták az (n, gamma) hatáskeresztmetszet abszolút értékét 25 KeV neutron energiánál. A termikus energia kivételével ilyen mérésekre eddig még nem került sor.

Foglalkoznak az Intézetben *atommagok gerjesztett állapota*inak vizsgálatával is. A Na^{23} (alfa, gamma) magfolyamat gerjesztési függvényére és a gammasugárzás energiaspektrumára vonatkozó mérések, valamint azok kiértékelése befejeződött.

A természetben található *radioaktív anyagok tanulmányozása* során száznál több természetes vízminta URa és R_n tartalmának emanométeres és fluoriméteres vizsgálata készült el, melynek alapján megállapítható, hogy a természetes vizekben a bomlástermékek között nincs radioaktív egyensúly.

A SZOVJETUNIÓ TUDOMÁNYOS AKADÉMIÁJA VERNADSZKIJ GEOKÉMIAI INTÉZETÉvel együttműködve *kőzetek és meteoritek tömegspektroszkópiai* vizsgálatával is foglalkozik az Intézet. A dunántúli ólomércek izotóparányainak vizsgálata már befejeződött. Várható, hogy a vizsgálatok hozzájárulnak bizonyos geo- és kozmokémiai, geológiai problémák tisztázásához.

Nagy tudományos és gazdasági jelentősége van a *hasadási termékeknek a humuszon való visszatartására* vonatkozó vizsgálatoknak. Az Intézetben korábban megállapították, hogy a talajban mindenütt megtalálható humuszsavak természetes kation kicserélőként működnek. Így lehetőség van arra, hogy az atomipar és az atomrobbantások útján a talajba jutó radioaktiv anyagok ne kerüljenek teljes egészükben a táplálkozási láncba, mivel nagy részük oldott állapotban, kation-alakban van és ezért a humuszon történő adszorpciója lehetővé válik. A téma gyakorlati jelentőségét fokozza az, hogy a tőzeg, amely a humuszsavak fő forrása, a legolcsóbb természetes kationkicserélő. Az intézetben 1961-ben megvizsgálták az uránoxidban keletkező, 30 napnál hosszabb felezési idejű hasadási termékek visszatartását tőzegpreparátumon. Megállapítást nyert, hogy a ritkaföldfémek és a biológiailag veszélyes és hosszú életű izotópok közül a Cs és Sr jól megkötődik a tőzegpreparátumon.

A beszámolási időszakban szembetűnően megjavult az ATOMMAGKUTATÓ INTÉZET vezetési színvonala. 1961-ben főleg a kutatómunka gyorsabb előrehaladása és a fiatal kutatók fejlődési lehetőségének további biztosítása önálló tudományos osztályok és ezeken belül csoportok alakítását tette szükségessé. (Eddig az Intézetben ilyen tagozódás nem volt.) Három *osztály* alakult, ezek: *neutronfizikai*, *magspektroszkópiai*, valamint *magreakciók és alkalmazásai*. Ezeket az osztályokat, valamint a csoportokat tehetséges, az intézetben felnőtt fiatal fizikusok vezetik. AZ ATOMMAG KUTATÓ INTÉZET korábban a többi hasonló profilú magyar intézettel alig tartott kapcsolatot. 1961-re ezt az elszigeteltséget sikerült csaknem teljesen megszüntetni. Ma már az Intézet együttműködik a KFKI-vel, az ELTE ELMÉLETI FIZIKAI INTÉZETÉvel, a MŰSZAKI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZETtel, a helyi ipari vállalatokkal, a NUKLEÁRIS MÉRŐKÉSZÜLÉKEK GYÁRÁval. Az Intézet tapasztalatait ipari hasznosításra ez utóbbi gyárnak adja át és ez tette lehetővé, hogy a gyár 1961-ben Debrecenben fiók-üzemet létesített.

Célszerű, hogy a magspektroszkópia területén tovább folyjanak az Intézetben a szcintillációs és mágneses béta- és gamma spektroszkópia módszerével a radioaktív izotópok bomlási sémájának és a bomlásban szereplő nívók jellemzőinek vizsgálata, az atommagok gerjesztett állapotainak meghatározása, továbbá a gyorsneutronokkal létrehozott egyes magreakciók vizsgálata a magreakciók mechanizmusának tisztázása céljából. Ezek a vizsgálatok az országos magfizikai kutatások ötéves tervében szereplő feladatok szerves részét alkotják. Gyakorlati és népgazdasági szempontból is kívánatos, hogy az Intézetben a jövőben is foglalkozzanak a magfizikai és a radioaktív módszerek alkalmazásaival, így pl. a hasadási termékek humuszon való visszatartására vonatkozó kutatásokkal.

AZ ELMÉLETI FIZIKAI KUTATÓ CSOPORT munkatársai az *atommagok statisztikus elméleté*nek vizsgálata során számításokat végeztek két C^{12} magból álló magmolekula kvázistacionárius állapotainak meghatározására. Eljárást dolgoztak ki, amelynek segítségével a $2C^{12}$ magmolekula elméletében figyelembe lehet venni a magdeformáció perturbáló hatását.

A *többvalenciás fémek* és *félvezetők elektronszerkezeté*nek vizsgálatával kapcsolatban a tellur atomra vonatkozó kutatások befejeződtek, az univerzális potenciállal nyert normál hullámfüggvényekkel kiszámították a Te^{4+}, Te^{6+} és Te^{2-} ionok diamágneses szuszceptibilitását. Számításokat végeztek a *Fermi—Amaldi* módszerrel módosított potenciállal a külső elektronok eloszlására.

Részeredmények születtek a *kristályok hibahelyei*nek és az ezzel kapcsolatos jelenségek vizsgálatában.

A *kovalens molekulák* vizsgálata során sikerült egyenletrendszert levezetni szigorúan ortogonális többelektronpályákra, valamint közelítő eljárásokat kidolgozni ezeknek a megoldására. Sikerült ezenkívül több közelítő eljárást kidolgozni „majdnem ortogonális" két-elektronpályák meghatározására.

A Csoportban változatlan intenzitással folynak a vizsgálatok olyan *atommodell kialakításá*ra, amely a hullámmechanikai modellt a lehető legjobban megközelíti. Hasonlóan továbbfolytatódik a kutatás olyan *magmodell kialakításá*ra is, amely a valóságot jól megközelíti. Részeredmények várhatók az év végére a többvalenciás fémek és félvezetők elektronszerkezetének, valamint a kristályok hibahelyeinek és az ezzel kapcsolatos jelenségeknek a vizsgálata terén.

AZ ELMÉLETI FIZIKAI ALAPKUTATÓ CSOPORT munkatársai a relativitáselmélet területén a homogén gravitációs tér vizsgálata során egy többször vitatott paradoxont szüntettek meg azáltal, hogy a *hiperbolamozgás sugárzásmentességét igazolták.*

Befejeződtek a *klasszikus relativisztikus mozgásegyenletek*kel kapcsolatban hét éven keresztül folytatott vizsgálatok. Utolsó eredményként a töltéssel és mágneses dipolmomentummal rendelkező részecske sugárzási visszahatását sikerült meghatározni.

Az *elemi részek gyenge kölcsönhatásá*nak tanulmányozása során számításokat végeztek annak eldöntésére, hogy melyik folyamat látszik legalkalmsabbnak a kölcsönhatást feltételesen közvetítő bozontér kimutatására. Megállapítható, hogy nagyenergiájú neutrinóknak magok *Coulomb*-terében történő abszorpciójának észlelése látszik a legcélravezetőbbnek.

Évek óta folynak a Csoportban olyan vizsgálatok, amelynek az *indefinit metrikájú Hilbert-tér* által nyújtott lehetőségekkel foglalkoznak. 1961-ben elsősorban az indefinit metrika tapasztalatilag közvetlenül hozzáférhető következményeit vizsgálták meg: a multipól szellemállapotok befolyását a propagátorokra és diszperziós relációkra.

A kvantumtérelméleti alapállapot (vákuum) sajátságai a legújabb időben az érdeklődés előterébe kerültek. A *vákuum elfajulásának lehetőségét* mutatta meg egy a Csoport munkatársai által felállított szemléletes modell, egyben feltárta a Hilbert-tér szeparált alterekre történő széteséséből adódó nehézségeket.

A Csoport munkatársai eredményesen dolgoztak a *plazmafizika* témakörében is. A plazma fűtésében fontos szerepe lehet a magnetohidrodinamikai lökéshullámoknak. Ezek alapegyenleteit sikerült olyan alakba írni, hogy tanulmányozásuk a gyenge szakadási felületek vizsgálatának módszerével volt lehetséges.

Filozófusokkal közös szemináriumon dolgozták fel a Csoport munkatársai a *modern fizika* több *filozófiai szempontból* érdekes kérdését.

Filozófiai szempontból is fontos, hogy a Csoport továbbfoglalkozzék a klasszikus fizika és a kvantumfizika egyes olyan kérdéseinek elemzésével, amelyek hozzásegítenek a tudomány alapjainak, axiomatikájának és filozófiai problémáinak tisztázásához.

A Kristálynövekedési Kutató Csoport munkatársai az egykristály növesztése feltételeinek változtatásával vizsgálják a *tökéletesebb egykristályok előállításá*nak módját. Az ólomklorid egykristályok előállításával, tisztításával most foglalkoznak és már sikerült átlátszó, párhuzamos lapokkal határolt egykristálydarabokat előállítani olvadékból tégely-süllyesztéses módszerrel. Egyidejűleg vizsgálják az ólomkloridnak oldatból való kristálynövekedését. Sikerült oldatból előállítani vékony, 1μ körüli tűkristályokat.

Eredményesen foglalkozik a Csoport a növekedésben levő kristály környezetében levő *átmeneti határréteg* vizsgálatával. A vizsgálatok további eredményeket szolgáltathatnak a reális kristályok növekedésének mechanizmusához.

Értékes részeredményeket értek el a Csoport munkatársai a *mesterségesen létrehozott hibahelyek természeté*nek vizsgálata során, így pl. megállapították, hogy a deformáció erősen befolyásolja a belső fényelektromos hatást.

A *tű, lemez és más alakú kristályok növekedési mechanizmusának* tanulmányozása — amellyel a Csoport ugyancsak foglalkozik — igen nagy elvi jelentőségű. Az egész világon sok fizikus foglalkozik e témával. A csoportban e területen elért eredmények külföldön is jól ismertek.

A csoportban eredményesen foglalkoznak a magyarországi és az általános *fizikatörténet* marxista szemléletű feldolgozásával, a klasszikus *fizika módszertanának* modern, marxista értékelésével. A magyarországi fizika történetét 1711-ig már feldolgozták és kívánatos, hogy ezek a kutatások tovább folyjanak.

Tudományos és gyakorlati szempontból igen fontos, hogy a Csoport továbbfolytassa a kristály-növekedés mechanizmusának vizsgálatát, a reális kristály tulajdonságainak feltárását és az egykristályok előállítását alkalihalogén és más anyagokból különböző vizsgálati célokra változó növesztési feltételek mellett.

Ugyancsak gyakorlati szempontból igen fontos, hogy a Csoport tovább folytassa a bizonyos műanyagok viszkozitási adataira vonatkozó vizsgálatokat.

A LUMINESZCENCIA ÉS FÉLVEZETŐ KUTATÓ CSOPORT munkatársainak sikerült a *fluoreszcencia-spektrumok* felvételére és az *abszolút kvantumhatásfok* meghatározására egy olyan gyakorlati eljárást kidolgozni, amely a szokásos típusú rács-spektrofotométereknek az említett fizikai mennyiségek mérésére való felhasználását is jelentősen megkönnyíti. Az eljárás alkalmazásával több oldat valódi fluoreszcencia-spektrumának és abszolút kvantumhatásfokának meghatározására került sor. Vizsgálatok folytak a fluoreszcein és a tripaflavin oldatainak hatásfokfüggvényeire vonatkozóan; a vizsgálatok során sikerült kimutatni, hogy az eddig csaknem általánosan érvényesnek tekintett ún. *Vavilov-féle törvény* csupán közelítő érvényű tapasztalati törvényszerűség.

Eredményesen foglalkozott a Csoport a *fluoreszkáló oldatokban lejátszódó energiaátadási folyamatok* vizsgálatával. A kísérleti eredmények értelmezése során az adódott, hogy a keverékoldatok emissziós spektrumai az egyes oldott anyagokhoz rendelhető valódi emissziós spektrumok lineáris kombinációi. A mintegy öt éven keresztül folytatott szekundér floureszcencia-vizsgálatoknak az a szakasza, amelyben a sugárzásos energiaátadás hatásainak tanulmányozása képezte a kutatás célját, az 1961. évben sikeresen lezárult.

Részeredményeket ért el a Csoport a CdS, CdSe, PbS, PbSe (párologtatott, szinterelt) *rétegek fotoelektromos, galvanomágneses felületi tulajdonságainak* vizsgálata során. E vizsgálatok célja: nagy tisztaságú félvezető-rétegek fotoelektromos viselkedése mechanizmusának felderítése. Az eredmények elvi jelentőségükön túlmenően alapot szolgáltatnak majd a Csoportban előállított cellák gyakorlati alkalmazására is.

Várható, hogy a Csoport az év végéig módszert dolgoz ki viszonylag kis tehetetlenségű és nagy érzékenységű CdSe *cellák előállítására* is. A várható eredmények a CdSe-ből készült fotoellenállások és fotoelemek hazai ipari előállítása során hasznosíthatók.

A KRISTÁLYFIZIKAI KUTATÓ LABORATÓRIUMban sikeresen folytatták a *szcintillációs kristályok* előállítására, fizikai tulajdonságaira és minőségük javítására vonatkozó vizsgálatokat. Kutatásuk eredményeit az ipar már részben átvette, de kívánatos lenne, ha az alkalmazásra érett további eredmények is átvételre kerülhetnének.

Foglalkozik a Laboratórium a *hibahelyek elektronelfogási hatáskeresztmetszetének* tanulmányozásával F-centrum tartalmú kristályokon és eredményesen vizsgálták a nem szándékosan bevitt szennyezések hatását a fotovezetésre.

Folytatta a Laboratórium a *felületi jelenségek vizsgálatát* alkalihalogenid kristályokon. Megállapítást nyert, hogy a felületi figurák a belső szerkezettől függetlenül, a felület megfelelő kezelése után a hőkezelés hatására is kialakulhatnak. A hőkezelés terén nyert tapasztalatok a technikai egykristályok minőségének javításakor hasznosíthatók.

A *kristálymag keletkezési feltételei*nek vizsgálata során sikerült a már korábban is előállított antracén egykristály-lemezek méreteit és tisztaságát növelni. Az előállított lemezeket több hazai és külföldi magfizikai kutató intézet használja részecskeszámlálásra.

A kristályok növekedésére és hibahelyeire vonatkozó vizsgálatokban az év végére további részeredmények várhatók. Szükséges, hogy a Laboratórium továbbfolytassa az ionsugárzásoknak az egészségügy területén történő alkalmazásával kapcsolatos vizsgálatait, valamint a biofizikai tárgyú kutatásait is.

A *céltámogatott egyetemi intézetek*ben általában eredményes kutatómunka folyt az elmúlt évben.

Az ELTE Kísérleti Fizikai Intézetében részeredményeket értek el *vakanciák fémekben való szerepé*nek vizsgálata során, így pl. sikerült kimutatni, hogy míg a vakanciák keletkezésének aktiválási energiája könnyen és jól mérhető, mindig reprodukálható, addig a mozgási aktiválási energia, helyesebben a vakanciák eltűnésének kinetikája az anyag előéletétől erősen függ.

A Kossuth Lajos Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetében eredményesen folytatódott a *molekulák szerkezetének kvantitatív elméleti vizsgálata* az egyesített atommodell segítségével. Részeredmények születtek a periódusos rendszer VI_b oszlopában levő elemek molekuláinak és kristályainak vizsgálata terén.

A Szegedi Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetének munkatársai továbbfolytatták a *térelméleti és kvantumkémiai vizsgálatok*at. Mindkét témával kapcsolatban részeredmények születtek az Intézetben. Az *elméleti asztrofizikai kutatások* keretében a Wilson-hegyi Csillagvizsgálótól kapott magnetogramok vizsgálata során kiderült, hogy a talált 27 napos periódus nem adja meg egyértelműen a mágneses tengely-hatást. A periódus nem származhat kizárólag csak ettől.

A Műszaki Egyetem Atomfizikai Tanszéke eredményesen folytatta a hosszú évek óta folyó spektroszkópiai kutatómunkát, mely a molekulák belső szerkezetének további feltárására irányult.

Hiányosságok a fizika területén. Fizikus körökben még ma is gyakran beszélnek elméleti fizikai és kísérleti fizikai kutatásokról, ami nemcsak munkamódszerbeli elhatárolás, hanem gyakran témák szerinti kategorizálást is fed. Az ilyenszerű szétválasztás nem helyes. A feladat mindenkor valamilyen fizikai probléma megoldása. A megoldás pedig éppúgy igényel experimentális munkát, mint elméleti meggondolásokat. A kettő általában nem választható szét egymástól, a kísérleti és elméleti munkának egymást kell kiegészítenie, nem pedig külön utakon járnia. Hazánkban vannak kísérletileg művelt, fontos területek, melyek alig, vagy egyáltalán nem építhetnek a szükséges elméleti fizikai segítségre, együttműködésre, ugyanakkor elméleti fizikusaink egy része a hazai kísérleti bázistól elszakadva keresgéli témáját a szakirodalomban. Így tehát az elméleti és kísérleti munkák koordinálása terén még sok tennivaló van, ez mai fizikai életünk egyik problémája.

Az egész fizikát kutatóink nem fedhetik le, ezért több szempontot figyelembe véve az erőket két területre kellett összpontosítani, az egyik az atomfizika (héj- és magfizika), a másik a szilárd testek fizikája. Mindkét terület az alkalmazások (ipar) szempontjából is fontos, bőven ad lehetőséget alapkutatásokra elméleti és kísérleti téren egyaránt és emellett a két terület egymással szorosan összefügg. Mindkét területen a különböző főhatóságokhoz tartozó kutató intézményekben igen intenzív munka folyik, azonban különösen a szilárd testek fizikájában a koordináltság tekintetében komoly problémák vannak. Ilyen irányú kutatás sok helyen folyik és jelenleg még egymástól meglehetősen elszigetelten. Az atomfizika területén bizonyos mértékű, egészségesnek mondható koordinálás már megtörtént. Ezen a területen inkább csak a kísérleti és elméleti tevékenység szorosabb összehangolásával kapcsolatban vannak hiányok.

A fizika területén a felszabadulás után az erőket és az anyagi lehetőségeket főként a nagy kutatóintézetekre összpontosítottuk, aminek következménye az lett, hogy az egyetemi tanszékek a fejlődésben elmaradtak. A kutatóintézetek gyors tempójú fejlesztésével együttjáró tudományos káderszükséglet kielégítését az egyetemi tanszékek tapasztalt munkaerőivel oldották meg. Egyes tanszékeken csupa fiatal, kevés tapasztalattal rendelkező tudományos munkatárs maradt. Ezek fejlődéséről és egyáltalán a káderutánpótlásról nem történt kielégítő gondoskodás. A nagyarányú oktatási elfoglaltság egyes helyeken teljesen háttérbe szorította a kutatást. Több helyen a rendelkezésre álló helyiségek még az oktatás ellátásához sem elegendők. Felszerelés és műszerellátottság tekintetében kivétel nélkül minden tanszéken igen nagy nehézségek vannak. Ugyanakkor az igények az egyetemi tanszékekkel szemben nagyok és veszélyes is lenne az igények csökkentése, éppen ezért fel kell számolni egyes egyetemeinken a kísérleti fizikai tanszékek lemaradottságát. Személyi vonalon gondoskodni kell a tanszékeknek tapasztaltabb kutatókkal való megerősítéséről. Ehhez segítséget nyújthatnak a kutatóintézetek. Lehetőséget kell adni az egyetemi oktatásban dolgozók számára akadémiai intézetek munkájába való bekapcsolódásra és az akadémiai intézetek munkatársainak arra, hogy egy részük oktatói, nevelői munkát vállaljon valamelyik egyetemi tanszéken.

A következőkben a **csillagászat** terén elért eredményeket, feladatokat és hiányosságokat ismertetjük.

A *piszkéstetői* (Mátra) *obszervatórium* építkezése befejeződött és leszállították az NDK-ból az ott felállításra kerülő Schmidt teleszkópot. Ez az obszervatórium európai viszonylatban is jelentős csillagászati objektum lesz, amely lehetővé teszi a CSILLAGVIZSGÁLÓ INTÉZET jelenlegi tudományos programjának jelentős kiszélesítését.

A CSILLAGVIZSGÁLÓ INTÉZETben a múlt évben is eredményesen folyt a *változócsillagok tulajdonságainak a vizsgálata* és az eredmények kozmogóniai alkalmazása. Ez a vizsgálat rendkívül fontos a csillagok belső szerkezetének, stabilitásának és fejlődésének szempontjából. Az intézet főleg az RR Lyrae-típusú csillagokkal foglalkozik. A típusnak különösen az ad nagy fontosságot, hogy a csillagfejlődési elmélet szerint minden csillag átmegy fejlődésének vége felé az RR Lyrae állapoton.

A vizsgálathoz szükséges több *fotoelektromos mérőberendezés kifejlesztésé*vel is foglalkoztak az Intézetben.

Az Intézetben működő *szputnyikmegfigyelő állomás* 1961-ben lényegesen aktívabban működött, mint az előző években. 1961-ben 29 átvonulást észleltek és az átvonulásokról összesen 247 megfigyelést küldtek el a moszkvai centrumba.

Az Intézet munkatársai az *űrrakéták pályájának gyors kiszámításá*ra új módszert dolgoztak ki. Az új módszert a *leningrádi* ELMÉLETI CSILLAGÁSZATI INTÉZET hasznosítja a pályaszámításoknál.

Az *elméleti csillagászati vizsgálatok* során is értek el értékes részeredményeket az intézetben, így pl. új geometriai interpretációval ellátva feldolgozták Zelmanov alapvető kozmológiai cikksorozatát.

Az Intézet a *kínai csillagászokkal* a *kooperatív megfigyeléseket* tovább folytatta. Különösen eredményes volt az AC And kooperatív megfigyelése. Sikerült több alkalommal közös megfigyelést végezni és remélhetőleg ez elég lesz ahhoz, hogy ennek a rendkívül komplikált változócsillagnak a természetét a magyar és a kínai csillagászok közösen megállapíthassák.

A változócsillagok fizikai természetének és fejlődésének megállapítására vonatkozó vizsgálatok, továbbá a fotoelektromos megfigyelési módszerek kifejlesztése mellett szükséges, hogy az intézet ebben az évben új kutatási témák beindításával készüljön fel az új mátrai obszervatóriumban végzendő munkára.

A NAPFIZIKAI OBSZERVATÓRIUM munkatársai Bulgáriában megfigyelték az *1961. február 15-i teljes napfogyatkozást.* Az észlelési adatok feldolgozása folyamatban van. Tovább folytatódtak a napfoltok statisztikai vizsgálatai. Megállapítást nyert, hogy a napfolt párok átlagos relatív sebessége más a kifejlődés, mint a visszafejlődés idején és ugyanakkor a sebességértékek relatív gyakoriságának eloszlása is különbséget mutat.

Tovább kell folytatni a *napprotuberanciákra* és a *napfoltokra* vonatkozó vizsgálatokat oly módon, hogy az OBSZERVATÓRIUM ne csak gyűjtse, hanem dolgozza is fel az észlelési adatokat, és az eredményeket publikálja is.

Eredmények és hiányosságok a csillagászat terén: A CSILLAGVIZSGÁLÓ INTÉZET jelenlegi műszerparkja által adott lehetőségeknek megfelelően történt a tudományos program kiválasztása. A változócsillagok megfigyelésében és az észlelt adatok feldolgozásában elért intézeti eredmények nemzetközi elismerésben részesülnek. A jelenlegi műszerparkkal további kísérleti csillagászati program aligha volna megvalósítható. E program keretében dolgoznak az Intézet kutatói csaknem valamennyien.

Hiányosság, hogy az Intézetben alig vannak tudományos szemináriumok, amely szemináriumokon az egyes kutatók saját munkájukról beszámolnának, vagy pedig folyóiratokról, könyvekről referálnának. Ilyen módon nincs biztosítva az Intézeten belül a fiatal kutatók megfelelő szakmai fejlődése. Sok kritika érheti az intézet vezetését más vonatkozásban is.

A NAPFIZIKAI OBSZERVATÓRIUM munkatársai eredményeiket eddig még nem publikálták, holott erre a tárgyi és anyagi lehetőségek (felszerelés, intézeti kiadvány stb.) ha szerényen is, de megvannak.

Az OBSZERVATÓRIUM munkatársai eddig csaknem kizárólag észlelési adatgyűjtéssel foglalkoztak, de nem végezték el az adatok kiértékelését, ill. feldolgozását.

Az eredmények ismertetéséből látható, hogy az akadémiai és egyetemi intézetekben széleskörű és általában eredményes kutatások folynak. Mindamellett nem mondhatjuk, hogy tudományos kutatásaink minden fontos területre kiterjednének, s azt, hogy a színvonal és a fejlődés kiegyenlített lenne.

III.

Nemzetközi kapcsolataink ápolásának nemcsak az egyes tudományterületek eredményesebb művelésében van jelentősége, hanem kihat tudománypolitikánk szinte valamennyi területére. Különösen felelősséggel kell fejlesztenünk e kapcsolatainkat azért is, mert ez az útja annak, hogy a szocializmus és a kapitalizmus küzdelmében — a tudományok versenyében — gyarapítsuk a szocializmus erőit. A nemzetközi kapcsolatok terén elsősorban arra kell törekednünk, hogy a szocialista tábor országaival kiépített tudományos kapcsolat minél tartalmasabbá váljék.

Matematikusaink, fizikusaink és csillagászaink nemzetközi kapcsolatai általában kielégítőnek mondhatók. Az elmúlt évben is tovább növekedett azok száma, akik külföldi tanulmányutakon és kongresszusokon vettek részt. Sok meghívás érkezett ilyen tudományos tanácskozásokra, s ezenkívül számos magyar matematikust, fizikust és csillagászt hívtak meg külföldre egyénileg is, sokszor költségtérítéssel. Ugyanakkor nagy számban jöttek hazánkba itt rendezett tudományos tanácskozásokra saját költségen tőkés országokból is.

Mindezek a tények azt mutatják, hogy ezen a téren már eddig is igen nagy haladás történt, de nemzetközi kapcsolatainkat még tervszerűbbé kell tenni.

Külföldi tanulmányútjaink jellegében az 1960. évi gyakorlattal szemben az 1961. évben nem mutatkozott fejlődés a hosszabb tanulmányutak javára. Változatlanul nehezíti a hosszabb tanulmányutak szervezését az, hogy az OSZTÁLYon sok jogos kiutazási igény merül fel, ezeket igyekszünk kielégíteni, s ez rendszerint a keret felaprózására vezet. A hosszabb tanulmányutak terén igen súlyos a helyzet. Egyik nehéz feladatunk, hogy gyorsan és jelentős mértékben kell növelnünk a fiatalok hosszabb külföldi tanulmányi lehetőségeit, mert ennek hiánya a hozzánk tartozó tudományterületek néhány ágában már most is érezhető. Ebben, a hozzánk tartozó magfizikai kutatások területén az ORSZÁGOS ATOMENERGIA BIZOTTSÁG nagyobb támogatására számítunk.

A viszonylag szűk lehetőségeken belül a kiküldendők kiválasztása sem könnyű. Egyrészről ugyanis a káderfejlesztési szempontokat kell figyelembe venni, ezenkívül hazai feladataink igényelnek olyan tanulmányutakat, ahol a kiküldetés elsősorban a mi érdekünk, másrészről pedig kötnek bennünket a közös kutatási témák, amelyek száma jelenleg kb. 20. Ez a szám erőinkhez képest nagy, szükséges tehát, hogy ezekből a legfontosabbakat kiemeljük és eszközeinket a kiemelt feladatokra koncentráljuk. Ma gyakorlatilag az a helyzet, hogy kiküldetéseink általában nem a közös kutatási munkákat szolgálják, holott nem vitatható, hogy személyes kapcsolatok nélkül a közös munkák alig haladhatnak és még a legégetőbb kölcsönös érdekeltség alapján helyesen kiválasztott feladat is formálissá válik. Az OSZTÁLYVEZETŐSÉG a jövőben mindent el fog követni annak érdekében, hogy egyezményes kiküldetéseink a közös munkákhoz kapcsolódjanak. Ez azért szükséges, mert a szocialista országok között a nemzetközi tudományos kooperációnak legfőbb formájává egyre inkább a közös kutatások művelése, a tervszerű tudományos munkamegosztás válik.

A szocialista országokkal való kapcsolataink elmélyítése mellett körültekintőbben kell eljárnunk a tőkés országokkal való tudományos kapcsolataink terén. Meg kell határoznunk azokat a legfontosabb tudományterületeket, ahol az előttünk álló feladatok megoldása érdekében leginkább szükséges a nyugati kapcsolatok fejlesztése. Ennek a célnak kell alárendelni külön-meghívási kereteinket és devizás kiküldetéseink egy részét.

Nemzetközi tudományos szervezetekkel való kapcsolataink erősítését változatlanul feladatunknak kell tekintenünk. E téren azonban különböző nehézségek vannak és különösen aggasztó a helyzet a fizika területén. A FIZIKAI BIZOTTSÁG tagja ugyan a 34 nemzetet számláló IUPAP-nak (International Union of Pure Applied Physics), mint annak Nemzeti Bizottsága, de hazánk szerepe ebben az egyesületben igen csekély. A szocialista tábor részéről a Szovjetunió, Lengyelország, Csehszlovákia, NDK, Magyarország, Románai és Bulgária tagja az IUPAP-nak és a legutóbbi konferencián Kínát is beválasztották. Hazánk az IUPAP-közgyűlésen mind-össze egyetlen alkalommal képviseltette magát és általában nem él a két szavazatot számító szavazati jogával. Szükséges, hogy kapcsolatunkat szorosabbá fűzzük az IUPAP-al, a közgyűlésekre mi is küldjünk delegátusokat, mert előfordulhatnak olyan esetek, ahol Magyarország két szavazata politikailag is jelentős támogatást nyújthatna a szocialista tábornak.

Kiküldetéseinknek minden esetben politikai jelentősége is van. A szocialista országok viszonylatában a kiutazások egyben az országok közötti barátság ápolásában is jelentős szerepet játszanak. A tőkés országok viszonylatában pedig a tudományos kapcsolatok ápolása összekapcsolódik azzal a feladattal, hogy tudományos fejlődésünk eredményeinek ismertetése útján egyben egész fejlődésünk eredményeit is érzékeltessük, s eloszlassuk azokat az előítéleteket, amelyek társadalmi viszonyainkat illetően Nyugaton elterjedtek.

Kiutazásainkat ebből a szempontból értékelve, meg kell jegyezni, hogy fejlődés ugyan van e téren, de ez nem minden esetben problémamentes. Minden kiutazás minden esetben szorosan vett tudományos tartalmán túlmenően tudománypolitikai és általában politikai jelentőségű is. Az a szemlélet, hogy valaki „csak" tudós, nyilvánvalóan megdőlt; általában nem ez jellemzi a tőkés országok tudósainak magatartását sem, s különösen nem a tőkés országok tudományos szerveinek álláspontját. Magukban a nemzetközi tudományos szervezetekben is tudománypolitikai és gyakran egészen nyíltan politikai viták zajlanak (például valamely szocialista ország tagságát illetően, általában a szocialista tudósok szerepével kapcsolatban a nemzetközi szervezetek vezetésében). Ez nyilván a mi részünkről is határozottabb és következetesebb állásfoglalást kíván, s nekünk igazán világosan kell és lehet látnunk, hogy még a legelvontabb tudományos kérdések tárgyalásában is alapvető szerepet játszanak a politikai tényezők.

Természetesen a békés egymás mellett élés elvéből az az igényünk folyik, hogy kapcsolataink a nyugati tudományos körökkel elmélyüljenek, szorosabbá váljanak és az a tény, hogy itt különböző társadalmi rendszerű országok tudományos körei közötti kapcsolatokról van szó, minden esetben és minden körülmények között meghatározza e kapcsolatok módját és formáit is.

Mindezek megkívánják tehát, hogy kellő jelentőséget tulajdonítsunk a kiküldetéseknek és általános politikai törekvéseink szem előtt tartásával bíráljuk el a kiküldetési javaslatokat.

A magyar matematika és fizika iránt külföldön általában nagy az érdeklődés, aminek egyik jele pl., hogy az UNESCO 1962-ben Budapesten a *matematika oktatását* tárgyaló nemzetközi konferenciát, 1963-ban pedig magyar előadókkal *matematika tanfolyamot* kíván rendezni a volt gyarmati országok matematikusai számára. 1963-ban ugyancsak Budapesten kívánják megrendezni a VII. *Európai Nemzetközi Spektroszkópiai Konferenciát.* E konferencián 500 főnyi saját költséges külföldi résztvevőre lehet számítani.

1961-ben az OSZTÁLY és a BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT, valamint az EÖTVÖS LORÁND FIZIKAI TÁRSULAT közös rendezésében 4 tudományos tanácskozás volt (*Differenciál-, integrál- és függvényegyenletek*; *geometria*; *lumineszcencia*; *elméleti fizika* tárgyú kollokviumok). Valamennyi tanácskozáson szép számmal külföldiek is részt vettek.

A kollokviumokon több mint 100 előadás hangzott el, ezeknek csaknem a felét külföldi tudósok tartották. A magyarok előadásai közül több felkeltette, ill. fokozta a külföldiek elismerő érdeklődését a hazai kutatások és eredmények iránt. E kollokviumok általában eredményesek voltak abból a szempontból is, hogy azokon a külföldiekkel közös munkákat sikerült megvitatni, ill. az együttműködést erősíteni, konkrétabbá tenni.

Elmondható, hogy általában javult a rendezvények előkészítő, szervező, programösszeállító munkája. A fejlődést mutatja, hogy a kollokviumok meghívói többségükben már kifejezetten személyre szóltak, tehát az általunk kívánt szakemberek meghívását tudtuk megtervezni.

Változatlanul feladatunk a gondosabb, körültekintőbb állásfoglalás a tudományos tanácskozások szükségességének elbírálásakor, mert ezen a téren nem nagy haladást értünk el eddig. A rendezvények tervezésekor főként a tervszerű tudományfejlesztést és nemzetközi kötelezettségeinket kell szem előtt tartanunk, s háttérbe kell szorítanunk mind a szakmai sovinizmust, mind a hagyományok túlzott tiszteletét.

Ebben az esztendőben készítettük el első ízben a 3 éves rendezvény-tervet, s ez is lehetőséget ad arra, hogy tanácskozásaink mind magasabb színvonalúak legyenek és a programok összeállításában jobban érvényesüljenek a távlati tudományos tervben szereplő főfeladatok.

IV.

Azáltal, hogy a MINISZTERTANÁCS elfogadta a **távlati tudományos kutatási terveket**, megteremtődtek a feltételei annak, hogy anyagi és szellemi erőinket a legfontosabb tudományos feladatok megoldására koncentrálhassuk. A távlati kutatási terv alapján ez év július 30-ig el kell készítenünk a hozzánk tartozó területek ötéves kutatási tervét. Ilyen feltételek között lehetővé válik az anyagi és szellemi erők koncentrálása, s ezt következetesen meg is kell valósítanunk, de előre kell látnunk, hogy ez nem lesz könnyű, s az OSZTÁLYVEZETŐSÉGnek nagyon nehéz döntésekre kell felkészülni.

A távlati tudományos kutatási terv elfogadásával az a feladat hárul az OSZTÁLYra, hogy a rábízott kutatási fő feladatok körében országosan koordinálja az összes kutatásokat a koordináló bizottságok útján. A III. OSZTÁLYhoz a következő három fő feladat tartozik:

a) Elvi matematikai kutatások és alkalmazásaik, különös tekintettel a hagyományos magyar matematikai iskolák fejlesztésére.

b) Elvi jelentőségű fizikai alapkutatások.

c) A kibernetika fejlesztése és alkalmazása c. fő feladat, amely az ELNÖKSÉGI KIBERNETIKAI BIZOTTSÁGhoz tartozik és osztályunk munkaterületét is érinti, célszerűnek látszik, hogy a kutatásokat is é bizottság koordinálja.

A szilárd testek kutatása, valamint a molekula és anyagszerkezeti kutatások c. fő feladatok a MŰSZAKI, ill. a KÉMIAI OSZTÁLYokhoz tartoznak, de koordináló bizottságaiban OSZTÁLYunk munkatársai is részt vesznek.

V.

Az OSZTÁLYhoz tartozó területeken a tudományos kutatómunkát, az intézeteket az OSZTÁLYVEZETŐSÉG irányítja a MATEMATIKAI BIZOTTSÁG, a FIZIKAI BIZOTTSÁG és a CSILLAGÁSZ BIZOTTSÁG munkájára támaszkodva.

Az **Osztályvezetőség** és a **Bizottságok** foglalkoztak az elmúlt évben az éves tudományos beszámoló jelentések, a tudományos tervek megtárgyalásával, egyes intézetek problémáival, a nemzetközi kapcsolatokkal, könyv- és folyóiratkiadási ügyekkel stb. A MATEMATIKAI BIZOTTSÁG egy külön ülés keretében foglalkozott a hazai számológépkutatással kapcsolatos problémákkal. A vita alapján egy memorandum készítése folyik, melyet az ELNÖKSÉG elé kívánunk terjeszteni.

Az OSZTÁLYVEZETŐSÉG és a BIZOTTSÁGOK sokat fáradoztak tudományos kutatói tevékenységünk fejlesztésén. Mégis e testületek működése bizonyos kívánni valókat hagy hátra. Sok „apróbb" üggyel kellett foglalkozni az elmúlt évben is és emiatt gyakran nem maradt idő az egyes tudományterületek fontos problémáinak a megvitatására.

Az előttünk álló nagy feladatok megoldása szükségessé teszi, hogy a BIZOTTSÁGOK a kutatómunka megjavítása érdekében a jövőben többet és alaposabban foglalkozzanak az egyes területek problémáival, az alapkutatások eredményeinek alkalmazásaival, esetleg vita-ankétok formájában, bizottságokon kívül álló szakemberek bevonásával.

Matematikai életünkben számos probléma van, ezért pl. igen hasznos volna, ha a MATEMATIKAI BIZOTTSÁG szélesebb körben megvitatná az alapkutatások egyes részei közötti arányt, a matematika szerepét az automatizálásban és a matematikusoknak ezzel kapcsolatos feladatait, a matematika gyakorlati kihatású fejlesztési lehetőségeit, az alkalmazások és alapkutatások helyes arányát, azt, hogy hogyan tervezhetők a matematikai kutatások, a matematikus utánpótlás képzésének kérdéseit (fiatal és legfiatalabb korosztályok problémái).

Célszerű volna, ha a FIZIKAI BIZOTTSÁG felmérné a félvezető kutatás helyzetét és jövőjét, foglalkozna a hazai elméleti és kísérleti fizikai kutatások kapcsolatának problémáival, a kristályfizikai kutatások helyzetével, a fizika gyakorlati kihatású fejlesztésének lehetőségeivel. Foglalkozni kell a hazai magfizikai kutatások eddigi eredményeinek felmérésével, a kutatások jelenlegi helyzetével és jövőbeni lehetőségeivel.

A CSILLAGÁSZ BIZOTTSÁGnak foglalkoznia kellene az elektronika alkalmazási lehetőségeivel a megfigyelő csillagászatban. A vita során eldönthető lenne, hogy milyen mértékben lehetne automatizálni más intézetek segítségével a csillagvizsgáló intézetekben folyó megfigyelő és kiértékelő munkát. Helyes volna megtárgyalni a hazai elméleti csillagászat helyzetét és lehetőségeit, a rádiócsillagászat megindításának feltételeit.

A felsorolt problémakörök megtárgyalása, megfelelő álláspontok kialakítása, még eredményesebbé tehetné a BIZOTTSÁGOK irányító munkáját. Ez a munka azonban csak akkor lesz eredményes, ha a BIZOTTSÁGOK az egyes tudományágakon belül a múltat kritikailag értékelik és a jelen konkrét feladatait a jövő programjának jegyében határozzák meg.

A tudományos tervek tárgyalásakor a BIZOTTSÁGOKnak jobban kell törekedniök arra, hogy az intézetek tervei az igényeknek megfelelően alakuljanak. Nehéz leküzdeni a véletlenszerűségnek és a szubjektivizmusnak azokat a mélyen begyökerezett elemeit, amelyek a tervek meghatározásánál érvényre jutnak, de ezt a küzdelmet következetesen folytatni kell.

VI.

Az OSZTÁLYnak jelenleg 12 *rendes* és 7 *levelező tagja*, 25 *doktor*a (ebből matematikus 14, fizikus 11), 103 *kandidátus*a (ebből matematikus 52, fizikus 51) van. Az *aspiránsok* száma 52 (ebből belföldi rendes 4, levelező 8, önálló 30; szovjet rendes és levelező 10). Közel 200 *tudományos munkatárs* tartozik az OSZTÁLYhoz. Az elmúlt évben 2 doktor (ebből matematika 1, fizika 1) és 9 kandidátus (ebből matematika 7, fizika 2) védte meg disszertációját.

A tudományok művelésének legfőbb tényezői maguk a kutatók, ezért rájuk különleges figyelmet kell fordítanunk. A **tudományos utánpótlás** és a **tudományos minősítés** körében az elmúlt évben az volt a legfőbb törekvésünk, hogy tervszerűbb legyen a tevékenységünk és a kádermunka szorosan kapcsolódjék tudományos törekvéseinkhez.

Általában javult a vezetők személyzeti tevékenysége az elmúlt évben. Tapasztalatunk az, hogy van fejlődés a tekintetben, hogy kevés kivétellel az intézetek vezetői a tudományos munkát igyekeznek összekapcsolni a kádermunkával: többet törődnek beosztottjaik ügyeivel, segítik őket a kutatómunkában, a tervszerű fejlesztéshez szükséges tanulmányutak biztosításában.

Problémák vannak azonban a kutatói pályára alkalmasnak látszó tehetséges fiatalok kiválasztásában; egyes területekre túljelentkezés van, más fontos területeken viszont nincs biztosítva az utánpótlás.

A legfontosabb feladat a távlati tudományos tervek szükségleteit fedező tudományos káderképzés kialakítása. Az intézetek igazgatói folyamatosan törekedjenek a kutatók kiválasztása terén eddig tapasztalható tervszerűtlenség, következetlenség, egyoldalúság, kiküszöbölésére és a helyes módszerek általánossá tételére.

Nem kétséges, hogy minden akadémiai tagnak felelősséget kell éreznie a fiatal kutatók fejlődéséért, azonban nyomatékosan kell hangsúlyozni az intézeti igazgatók felelősségét. Az igazgatók személyes felelősséggel vezetik a gondjaikra bízott intézetet, tehát jogaik és kötelességeik egyaránt kiterjednek a szakmai, ideológiai, személyzeti és gazdasági vezetésre.

Az OSZTÁLYhoz tartozó akadémiai tagok egy része túl van terhelve tudományszervezési kötelezettségekkel. Emiatt tudományos munkájukat, a fiatalok képzését nem tudják olyan mértékben ellátni, mint ahogyan azt kellene. Ugyanakkor viszonylag alacsony a vezető szerepet betöltő fiatalabbak száma. Itt is feltétlenül kiegyenlítődésre van szükség, a fiatalokat még bátrabban be kell vonni a tudományszervezői munkába.

Az új személyi minősítési rendszer bevezetését intézeteinkben kedvezően fogadták. Különösen tetszett, hogy a kutatókat fejlődésükben kell szemlélni és konkrétan meg kell határozni azokat a feltételeket, amelyek további fejlődésükhöz szükségesek.

VII.

A SZKP XXII. KONGRESSZUSA behatóan foglalkozott a tudomány szerepével és feladataival a kommunista társadalom megalapozásában. Mind a kongresszusi vitából, mind a kommunizmusba való átmenet megvalósítását kitűző új pártprogramból fontos tanulságokat vonhatunk le a mi **tudományos életünk fejlesztésére** vonatkozóan is, ideértve a hozzánk tartozó tudományterületeket.

A magyar tudományos szakembereknek jelentős szerepet kell vállalniuk abban, hogy valóra váltsuk azt az elméletileg megalapozott lehetőséget, amely szerint a Szovjetunióval és a többi szocialista országokkal együtt hazánk is történelmileg egyidejűleg juthat el a szocializmus felépítése útján a kommunista társadalom küszöbéhez. Lényegében ezt a gondolatot fejezi ki a MSZMP KÖZPONTI BIZOTTSÁGÁnak is a XXII KONGRESSZUSsal kapcsolatban hozott határozata, amely szerint „növekvő feladatok hárulnak a tudomány művelőire az anyagi javak nagyobb bőségéért, a szebb és jobb életért folyó harcban. Gyorsabb fejlődésünk igen fontos követelménye, hogy a magyar tudomány művelői, a szovjet tudomány fejlődésének tapasztalatait is jobban hasznosítva, erősítsék kapcsolatuk a gyakorlattal, és jobban összpontosítsák erőiket azoknak a tudományos feladatoknak a megoldására, amelyek népgazdaságunk és egész társadalmunk fejlődését segítik". Nem állíthatjuk azonban, hogy ez az elv, ill. ennek felismerése már mindenütt áthatotta volna gyakorlati munkánkat is. E tekintetben nem ritkán találkozunk meg nem értéssel és nehézségekkel. Ezért rá kell mutatni arra is, hogy nemcsak a tudományok művelőitől függ — sőt olykor elsősorban éppenséggel nem tőlük függ — hogy „erősítsék kapcsolataikat a gyakorlattal és jobban összpontosítsák erőiket azoknak a tudományos feladatoknak a megoldására, amelyek népgazdaságunk és egész társadalmunk gyorsabb fejlődését segítik elő". Függ ez nem kevésbé az érdekelt gazdasági vezetőktől is, attól, hogy mennyiben kívánják és teremtik meg az ilyen kapcsolat eredményes kialakításának a feltételeit, milyen figyelemmel fogadják szakembereink kezdeményező javaslatait, építő szándékú tanácsait és bírálatait. Több példával illusztrálhatnánk az e téren fennálló hiányosságokat, így pl. a matematikai eredmények iparban való alkalmazása, a kristályfizikai kutatások eredményeinek hasznosítása.

A KONGRESSZUS szellemében még egy igen fontos problémára szeretnénk ráirányítani a figyelmet. Bizonyos alapvető elméleti kutatásokat, amelyeknek ma még közvetlen gyakorlati hasznuk nincs, szokás olykor úgy kezelni, mint olyan fényűzést, amelyre a társadalomnak nincs szüksége, sőt esetleg mint burzsoá maradványt kell hibáztatni. Ez természetesen a legnagyobb tévedés, mert a mai alapvető elvi felismerés holnap vagy holnapután a legkülönbözőbb alkalmazási lehetőségekre fog rávezetni, és a legváltozatosabb praktikus célokat fogja szolgálni. Vegyük pl. az atomenergia felhasználását, a nukleáris energia felszabadítását. Első lépésben az anyag természetére vonatkozó felismerések annyira elvontnak tűntek, hogy ezekből nehezen volt sejthető az atomipar kifejlődése. Részben ez az oka annak, hogy az alapkutatásoknál a várható eredmény nem tervezhető, mint az alkalmazott kutatásoknál.

A XXII. KONGRESSZUSnak azok a tanulságai, amelyek különösen egyes tudományterületek jelenlegi helyzetét, további fejlődését érintik, úgy hasznosíthatók legjobban, ha azok megvitatása az OSZTÁLY, ill. egyes osztályok közös szervezésében, *nyilvános osztályüléseken* történik meg. Az OSZTÁLYVEZETŐSÉG elhatározta, hogy ilyen vitákat rendezni fog.

Szükséges, hogy az akadémiai intézetekben a tudományszakoknak megfelelően a KONGRESSZUS anyagának feldolgozása, megvitatása, hasznosítása az intézetek állandó jellegű feladata legyen.

VIII.

A beszámolási időszakban a *matematika* területéről megjelent ALEXITS GYÖRGY ortogonális sorokkal foglalkozó könyvének angol nyelvű kiadása, valamint MEDGYESSY PÁL: „*Valószínűség eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőire*" című könyve angol nyelven. A *fizika* területéről megjelenőben van LÁNG LÁSZLÓ szerkesztésében *színképatlasz* II. kötete, valamint orosz nyelvből magyarra fordítva AHIJEZER—BERESZTECKIJ: „*Kvantum elektrodinamika*" című könyve.

Amint a felsorolásból látható, az OSZTÁLYhoz tartozó tudományterületekről szám szerint kis számú szerzőtől jelentek meg könyvek, azonban ha az OSZTÁLY **könyvkiadási tervét** nézzük, a következő években nagyobb számban számíthatunk magyar szerzők műveinek megjelenésére. Ez elsősorban a matematikus szerzőkre vonatkozik, akik egyre nagyobb számban vállalkoznak magyar vagy idegen nyelven, esetleg mindkettőn, könyvek megírására. Fizikusainkkal ilyen vonatkozásban kevésbé lehetünk megelégedve. Kevesen vállalkoznak közülük arra, hogy az OSZTÁLY megbízásából monográfiát írjanak. Elég szép számmal vannak viszont olyanok, akik a Műszaki Könyvkiadónál vállalkoztak könyv írására. Úgy véljük hasznos lenne ebben a vonatkozásban megfelelő arány kialakítása.

Az *Osztályközlemények* terjedelmét csökkenteni kell azáltal, hogy valóban csupán az OSZTÁLY egészét érintő cikkeket, beszámolókat, elvi jelentőségű tanulmányokat kell közölni e folyóiratban, ezek mellett más összefoglaló tudományos dolgozatokat is, de olyan cikkeket nem, amely azonos vagy közel azonos tartalommal más nyelven is megjelent vagy megjelenik. Bár az egyes külföldi szakcikkek magyar nyelven való közlésével az *Osztályközlemények* hasznos munkát végzett, e feladatra mégsem ez a folyóirat illetékes, így ezek közlésétől e folyóiratban a jövőben el kell tekinteni.

*Actá*ink a beszámoló időszakában változatlan terjedelemben és színvonallal jelentek meg.

A két társulati folyóiratot — a *Matematikai Lapok*at és a *Fizikai Szemlét* — továbbra is az Akadémiai Kiadó gondozásában kell hagyni, tekintettel e folyóiratok fontos szerepére tudományos életünkben. Kívánatos lenne, hogy az OSZTÁLY keretében működő szakbizottságok a jövőben lehetőleg évenként számoltassák be e társulati folyóiratok szerkesztőbizottságait.

IX.

Növekvő feladataink megoldásához szükséges, hogy a kutatómunka **anyagi bázisá**nak megerősítésére az elkövetkező években további intézkedések történjenek. Bár az utóbbi években is jelentősen nőtt intézeteink, kutató csoportjaink száma és korszerű felszereléssel sikerült azokat ellátni, még mindig vannak olyan kutatási munkahelyeink, ahol a munka feltételei nem egészen megfelelőek.

Az 1961. évi költségvetés szerény keretek között ugyan, de lehetővé tette intézeteink fejlesztését, az 1962. évi anyagi ellátottság terén pedig jelentős előrehaladás történt.

Anyagi lehetőségeink jelentősebb növelését eredményezte a *Tudományos Kutatások Fejlesztési Alapjá*nak a létrehozása. Az *Alap* célja: az országos távlati tudományos kutatási terv végrehajtásához szükséges, s a népgazdaság fejlesztéséhez nélkülözhetetlen alapkutatások fokozottabb támogatása, az egyes tudományterületek erőteljesebb fejlesztésének az elősegítése, a fejlesztés hosszabb távra való tervezésének biztosítása.

X.

Végezetül megállapíthatjuk, hogy az OSZTÁLY és intézetei tevékenysége 1961-ben eredményes volt, a fejlődés üteme — a korábbi évek munkájának eredményeként is — meggyorsult. Azt is meg kell azonban állapítanunk, hogy számos problémánkat nem sikerült eredményesen vagy teljes mértékben megoldanunk. Különösen számot kell vetnünk azzal, hogy a szocialista építés előrehaladásával növekednek a feladataink, s Akadémiánknak — ezen belül OSZTÁLYunknak — még inkább tényezőjévé kell válnia tudományos életünknek — s ezen keresztül egész szocialista építésünknek — mint eddig.

Az OSZTÁLY erői is növekedtek az elmúlt évben. Ehhez az OSZTÁLY vezetőszervei, az egyes akadémiai tagok, különösen pedig intézeteink vezetőinek és munkatársainak a tevékenysége is hozzájárult. Amikor minderről köszönettel emlékezünk meg, félreérthetetlenül ki kell fejeznünk azt a törekvésünket és szándékunkat is, hogy a következő években képessé váljunk több feladat jobb megoldására. Biztosra vesszük, hogy ebben az OSZTÁLY tagjai, bizottságaink és intézeteink kutatói őszinte igyekezettel közreműködnek.

HILBERT DÁVID

(1862. JAN. 23–1943. FEBRUÁR 14.)

Írta: SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

Most 100 éve hogy született, és 19 éve hogy meghalt a modern matematika egyik legnagyobb alakja, HILBERT DÁVID. Munkássága mélyen rányomta bélyegét a matematika újabb fejlődésére s hatása örökké érezhető lesz a matematikai és általában az egzakt tudományok minden területén.

A magyar matematika sokat köszönhet neki külön, általános hatásán kívül is. A Göttingában köréje sereglő fiatal matematikusok között ott találunk számos magyar matematikust is, akik mesterüknek vallották később is őt. RIESZ FRIGYES, az integrálegyenletek és az ún. *Hilbert-tér* elméletének problémáit hozta magával HILBERTtől s vált e területeken végzett mélyreható munkássága révén maga is a modern matematika egyik nagy mesterévé. HAAR ALFRÉD HILBERTnek tanársegéde volt, mielőtt a kolozsvári egyetem tanára lett volna; 1909-ben HILBERTnél doktorált, s témaválasztásaiban élete végéig érezhető maradt közvetlen tanítómesterének hatása, akár az ortogonális függvényrendszerek, akár a variációszámítás, akár a csoportmérték problémáin dolgozott is. NEUMANN JÁNOS szintén HILBERT közvetlen tanítványai és munkatársai közé tartozott s nemcsak azt mondhatjuk el, hogy a matematika alapjai, a *Hilbert-tér* operátorai s más konkrét nagy elméletek továbbfejlesztésében volt HILBERT méltó tanítványa, hanem NEUMANN JÁNOS egész — méltán grandiózusnak nevezhető — tudományos munkásságában ott érezhető a nagy mester szellemének hatása. Folytathatnánk a névsort, hiszen még voltak hosszabb-rövidebb ideig hazai matematikusaink göttingai tanulmányúton, így az én édesapám is, s hozták onnan haza magukkal a nagy HILBERT előadásainak, szemináriumainak nagy és maradandó tudományos élményét.

Külön megemlítendő az a magyar szempontból jelentős tény, hogy HILBERTnek a geometria alapjairól szóló, nagyhatású művei az euklideszi és a nem-euklideszi geometriák alapjaira összpontosították a tudományos világ figyelmét a századforduló körül s ezen a réven a mi BOLYAI JÁNOSunk korszakalkotó tudományos felismerései újra — vagy talán igazában csak ekkor először — az érdeklődés előterébe kerültek.

A Magyar Tudományos Akadémia méltó módon fejezte ki elismerését HILBERT DÁVIDnak a *Bolyai*-díj odaítélésével. Ezt a díjat BOLYAI JÁNOS születésének 100. évfordulója alkalmával (1902) alapította akadémiánk. Először 1905-ben ítélték oda s azt követőleg 5 évenként szándékoztak odaítélni a közbeeső 5 év alatt megjelent legjobb matematikai mű szerzőjének, figyelembe véve az illető szerző egész megelőző munkásságát is. A díjat első ízben a nagy francia matematikus, POINCARÉ kapta meg 1905-ben, de a díjat odaítélő bizottság ugyanakkor a POINCARÉ munkásságával egyenlő részletességgel méltatta HILBERT munkásságát is, legnagyobb tiszteletét és elismerését fejezve ki ezzel HILBERT iránt is. Másodízben, 1910-ben HILBERTnek ítélték a díjat: a díj-bizottságnak magyar részről KÖNIG GYULA és RADOS GUSZTÁV volt a tagja, s mellettük még két kiváló külföldi tudós: a svéd MITTAG-LEFFLER és a francia POINCARÉ. A bizottság megállapítása szerint a megelőző 5 év során közölt matematikai művek közül HILBERT művei kitűnnek gondolataik mélységével, módszereik eredetiségével, bizonyításaik logikai szigorúságával. A díj-bizottság előadója az első ízben kitüntetett POINCARÉ volt, s az ő általa írt, HILBERT addigi munkásságát méltató nagyszabású jelentés a MITTAG-LEFFLER szerkesztette stockholmi *Acta Mathematica* folyóirat 35. kötetében jelent meg, 1912-ben. Sajnos, a világháború megszakította a *Bolyai*-díjak odaítélésének sorozatát, s ezt, a legkiválóbb matematikusok számára mintegy a *Nobel*-díjnak megfelelő nemzetközi díjat azóta sem adták ki többé.

HILBERT Königsbergben született. Atyja jogász volt, meglehetősen egyoldalú ember, aki fia pályaválasztását sokáig bizalmatlansággal nézte. Anyja egy königsbergi kereskedőcsalád lánya, aki szokatlanul élénken érdeklődött szellemi kérdések iránt: szívesen olvasott filozófiai és csillagászati írásokat és kedvét lelte abban, hogy primszámokat számított ki. Eltérően a német diákok szokásától, hogy egyetemről egyetemre vándorolnak, HILBERT nemcsak középiskoláit, hanem egyetemi tanulmányait is (egyetlen heidelbergi félévét leszámítva) szülővárosában végezte. A königsbergi egyetemen lett HILBERT doktor, majd egyetemi magántanár és 1892-ben nyilvános rendkívüli, majd rendes tanár.

Csak 1895-ben szakadt el szülővárosától, amikor FELIX KLEIN kezdeményezésére a göttingai egyetemre hívták meg. Élete végéig Göttingában is maradt. A törvényes korhatár elérésekor, 1930-ban vonult nyugalomba. Ott is halt meg 1943-ban s a göttingai temetőben van a sírja, a nagy fizikusok, PLANCK és LAUE sírjai közelében.

Életének utolsó 10 évét a náci uralom árnyékolta be. HILBERT különlegesen mentes volt minden nemzeti és faji előítélettől; minden közösségi kérdésben — legyen az politikai, szociális vagy szellemi vonatkozású — a szabadság oldalán állott, még ha gyakran elszigetelten maradt is e véleményével környezetében. Önálló ítéletét mindig megtartotta, nem úszott sohasem az árral. Nem volt véletlen az, hogy amikor a nácik 1933-ban elkezdték „tisztogatásukat" a német egyetemeken, legjobban a *Hilbert*-iskolára nehezedett a kezük s HILBERT legközvetlenebb munkatársai (COURANT, NEUMANN JÁNOS és mások) voltak kénytelenek önkéntesen vagy a náci üldözések elől elhagyni Németországot. HILBERT maga akkor már túlságosan idős volt erre és otthon maradt, de az 1933-at követő évek számára a mind elmélyülőbb tragikus magányosság évei lettek.

HILBERT tanárai a königsbergi egyetemen kiváló matematikusok voltak, HEINRICH WEBER, R. DEDEKIND és F. LINDEMANN, utóbbi éppen abban az időben érte el híres eredményét, a π szám trancendens voltának bizonyítását. LINDEMANN tanácsára kezdett el HILBERT doktori témájával, az invariánselmélettel foglalkozni. Igen erősen hatottak rá a berlini KRONECKER művei. HILBERTnek az algebra területén végzett munkássága a legszorosabban függ a KRONECKERétől. Alapfelfogása a matematikáról azonban gyökeresen különbözik amazétól. KRONECKER nagy tekintélye teljes súlyával azt az irányt képviselte, hogy a matematikai egzisztencia-tételeket mindig explicit megszerkesztés által, az egész számok segítségével kell bebizonyítani. (KRONECKER szerint: „Az egész számokat a Jóisten teremtette, minden más az ember műve".) HILBERT fellázadt az ellen, hogy KRONECKER — szerinte — a matematikát ilyen módon egy önkényes filozófiai elv Prokrusztesz-ágyába kívánja szorítani s elnyom minden olyan fejlődést, amely nem felel meg ennek az elvnek. Maga HILBERT korai bajnoka volt CANTOR általános, halmazelméleti eszméinek. KRONECKER tudományos „tilalmi diktatúrája" ellen érzett szenvedélyes ellenkezése visszhangzik HILBERTnek jóval későbbi írásaiban is, amikor pl. a BROUWER-féle intuicionizmus ellen folytat polémiát. BROUWER és H. WEYL ellen folytat harcot pl. az 1922-ben megjelent cikkében a „matematika újraalapozásáról", de csapásait KRONECKER szellemének szánja, amelyet sírjából feltámadni lát. De — különös és elkerülhetetlen kettősség — miközben hadakozik e szellem ellen, kénytelen követni őt: kénytelen szigorúan intuicionista módon érvelni avégből, hogy megvédje a nem-intuicionista matematikát.

De térjünk vissza az ifjú HILBERTre: minden másnál nagyobb hatással volt rá két matematikus barátja: ADOLF HURWITZ és HERMANN MINKOWSKI. MINKOWSKI két évvel fiatalabb volt HILBERTnél, de félévvel előbb iratkozott be az egyetemre. Berlinben hallgatta KUMMERt, KRONECKERt, WEIERSTRASSt és HELMHOLTZot s a saját úttörő számelméleti eredményeivel igen hamar nagy elismerést váltott ki: 19 éves korában a *Párisi Akadémia Nagydíját* nyerte el. A szünidőket töltötte Königsbergben s HILBERTet vele hamarosan szoros barátság fűzte össze. HURWITZ 3 évvel idősebb volt HILBERTnél s 1884-ben hívták meg rendkívüli tanárnak a königsbergi egyetemre. Róla mondta HILBERT: „MINKOWSKIt és engem egészen lenyűgözött a tudása és nem is reméltük, hogy valaha is annyira visszük". Számtalan séta közben, napról napra nyolc éven keresztül, HURWITZ, HILBERT — és nyaranként MINKOWSKI — megvitatták a matematika minden ágát. HILBERT szavaival: „. . . HURWITZ volt mindig a vezetőnk a maga éppen annyira kiterjedt és sokoldalú mint szilárdan megalapozott és jól elrendezett ismereteivel . . . ". Ez a königsbergi kör 1892-ben bomlott fel: HURWITZot Zürichbe hívták meg és rövidesen követte őt MINKOWSKI is. HILBERT először HURWITZ utóda lett Königsbergben, majd a göttingai egyetemre távozott maga is. 1902-ben azonban újra összekerült MINKOWSKIval, amikor HILBERT kezdeményezésére egy új matematikai tanszéket állítottak fel Göttingában MINKOWSKI számára. A két barát göttingai együttműködése a tudomány ragyogó korszakát nyitotta meg ebben a kis német egyetemi városban. MINKOWSKIt korai halála 1909-ben elragadta az élők sorából. A Göttingai Tudományos Társaság előtt HILBERT ilyen szavakkal emlékezett meg róla: „a tudomány, amelyet mindennél jobban szerettünk, hozott össze bennünket. Virágos kertnek tűnt ez nekünk. Ebben a kertben vannak kitaposott ösvények, amelyekről kellemesen körül lehet tekinteni és erőfeszítés nélkül gyönyörködni, különösen ha rokonszellemű társ áll az oldalunkon. De mi szívesen kutattunk fel rejtett utakat is és nem egy új kilátóhelyet fedeztünk fel s amikor ezeket egymásnak megmutattuk: örömünk teljes volt."

E szavak nemcsak egy kivételesen mély és termékeny, a közös tudományos érdeklődésen alapuló barátságról tanúskodnak, hanem mutatják azt is, milyen szuggesztív lelkesedéssel tudta magát HILBERT kifejezni, ha a tudományról szólt. Egy tudós hatása kortársaira nem csupán kutatási eredményeinek súlyától függ. HILBERT matematikai műve ugyan kivételesen mély és univerzális jelentőségű, azonban óriási hatását mégsem csak ennek köszönheti. GAUSS és RIEMANN, hogy két régebbi nagy göttingai matematikust említsünk, bizonyosan nem kisebb lángeszek a matematikában, de kevéssé mozgatták meg kortársaikat és nem alakult egyikük körül sem a lelkes követőkből „iskola". Nem kétséges, hogy ebben részben szerepük volt a megváltozott külső feltételeknek is, de az emberek különböző jelleme valószínűleg döntőbb tényező. A magány, sőt néha a homály kedvelése nem mindig összeegyeztethetetlen a nagy alkotó tehetséggel: erre GAUSS és NEWTON igen jó példák. HILBERT természete egész más volt: tele volt életkedvvel, kereste a másokkal való érintkezést, különösen a fiatal tudósokkal, és örömét lelte, ha kicserélhette velük gondolatait. Ahogy ő tanult HURWITZtól, úgy tanította ő is a saját tanítványait, hosszas sétákon a Göttingát körülvevő erdőkben vagy esős napokon kertjének fedett sétányán. Tudományos optimizmusa, szellemi szenvedélyessége, megrendíthetetlen bizalma a tudományban mint legmagasabb értékben, szilárd meggyőződése, hogy az ész erejével egyszerű és világos választ lehet adni minden egyszerű és világos kérdésre, ellenállhatatlanul átragadt tanítványaira is. Lelkesedése jól összefért a kritikus elmeéllel, de a szkepticizmussal nem. A közönbösség tettetése, vagy akár a tréfás cinizmus is, ismeretlen dolog volt az ő körében. Roppant szorgalmas volt a munkájában s szerette mondani: „A lángész: szorgalom". De mégis fény és jókedv volt körülötte. Nagy szuggesztív ereje volt, amivel néha egy-egy közepes tehetségű tanítványát is meglepően magas színvonalú teljesítményre késztette. Matematikai meglátó képessége és nagy tapasztalata alapján tanítványai mesterük minden megjegyzését, utasítását úgy fogadták, hogy biztosak voltak azok találó és termékeny voltában. HILBERT nem rejtette véka alá örömét, ha egy-egy szép vagy váratlan eredményre jutott, örömének és megelégedettségének olykor dolgozataiban is kifejezést adott. Ez azonban nem annyira a személyes teljesítmény felett érzett jogos büszkeség hangja, mint inkább az emberi ész alkotóerejének újabb megnyilvánulása, a tudás útján való újabb előrehaladás felett érzett általános emberi öröme.

Mielőtt részletesebben szólnék HILBERT munkájáról, jellemezni szeretném néhány szóban HILBERT matematikai gondolkodásmódját. Ez tükröződik irodalmi értékű stílusában, amely kitűnik *világosságával.* Témáját először mindig könnyedén megvilágítja, rámutat a nehézségekre, a probléma részletei közötti kapcsolatokra s csak miután így tökéletes előkészítést és tájékoztatást nyújtott, indul neki — képletesen szólva — a hegy megmászásának, de akkor aztán egyenesen tör felfelé, megállás és kitérők nélkül. Stílusa nem olyan szűkszavú, mint sok jelenkori matematikusé, akik nincsenek tekintettel az olvasóra.

HILBERT matematikájában az *egyszerűség* és a *szigorúság* kéz a kézben járnak. Az őt megelőző nemzedék matematikusai, sőt még az ő nemzedékének legtöbb analistája is nehéz igának érezték azokat a szigorúsági követelményeket, amelyekre az analízis a XIX. századbeli, WEIERSTRASSnál kulmináló kritikája kényszerítette őket; ez a járom fékezte és félszeggé tette lépéseiket. HILBERTnek nagy a szerepe abban, hogy ez a magatartás megváltozott s ma már az analízis szigorúsága éppen olyan magától értetődő mint pl. az algebráé. Az 1900. évi, Párizsban tartott nemzetközi matematikai kongresszuson elmondott híres előadásában HILBERT hangsúlyozza a konkrét, nagy és gyümölcsöző *problémák* jelentőségét. Így szól: „Mindaddig, amíg egy tudományág bővelkedik problémákban, addig tele van élettel; a problémák hiánya halált, vagy a független fejlődés megszűnését jelenti. Amint minden emberi vállalkozás végcélokat követ, a matematikai kutatásnak is problémákra van szüksége. Ezek megoldása megacélozza a kutató erejét, így fedez fel új módszereket, és szempontokat és tágítja látóhatárát". — „Ha valaki határozott probléma nélkül a szeme előtt keres módszereket, valószínűleg hiába keresi ezeket." A matematika *módszertani egysége* hit és tapasztalat dolga volt HILBERT számára. Saját szavait idézem: „. . . vajon a matematikának is szembe kell-e néznie azzal, ami más tudományoknak már régóta a sorsa, ti. hogy szétesik részekre, amelyek képviselői alig képesek egymást megérteni és amelyek kapcsolatai ennek folytán mind lazábbakká válnak? Én nem kívánom és nem is hiszem ezt. A matematikai tudomány, ahogyan én látom, oszthatatlan egész, olyan organizmus, amelynek életkérdése, hogy a részei közötti kölcsönhatások fennmaradjanak". HILBERT módszerére jellemző, hogy a problémákat *direkt* módon, algoritmusok bilincseitől megszabadítva támadja meg; mindig eredeti egyszerűségükben nyúl a kérdésekhez. Kitűnő példa erre az, ahogyan megmentette az ún. *Dirichlet*-féle elvet, amelyről pedig úgy látszott, hogy végleg áldozatává válik a WEIERSTRASS-féle kritikának; de hasonló példákat bőven találhatunk egész munkásságában. Ereje, mely egyaránt megveti a herkulesi erőfeszítéseket és a meglepő fortélyokat, meg nem alkuvó *tisztasággal* párosul.

A párizsi kongresszuson, 1900-ban tartott, előbb már említett előadása a matematika problémáiról átfogja tudományunk egész területét. Megkísérli fellebbenteni a fátylat a matematika jövőjéről s evégből 23 problémát sorol fel és diszkutál, amelyeket jórészt maga mondott ki először, s amelyek véleménye szerint a jövő kutatásokban jellemző szerepet fognak játszani. Ha visszatekintünk az azóta elmúlt időre, igazat kell adnunk HILBERTnek, mert e problémák valóban fontos szerepet játszottak a matematika azóta végbement fejlődésében. Ez mutatja, hogy HILBERT milyen világosan meglátta a legfőbb problémákat, bár azt sem lehet tagadni, hogy e problémák felsorolásából HILBERT a maga roppant nagy tudományos tekintélyével és szuggesztivitásával ezeknek külön is hangsúlyt adott. E problémák közül azóta többet megoldottak, néhányuk még azóta is nyitott vagy csak részlegesen van megoldva. Mindenesetre, ha egy-egy problémát valakinek sikerült megoldani, az illető beírta ezzel a nevét a matematika történetének aranykönyvébe. Rendszerint azonban nem egy-egy matematikus kizárólagos teljesítménye volt valamelyik nagy *Hilbert*-probléma megoldása, hanem a kutatók egymáséba kapcsolódó munkájának végeredményeként született meg a megoldás. Közben a probléma maga is fejlődött, általánosabb vagy jobban körülírttá vált.

Egyik nevezetes problémája az *ötödik*, amelyre HILBERT a geometria megalapozására irányuló munkájával kapcsolatban jutott. A mechanika szempontjából a geometria alapvető feladata az, hogy egy merev test mozgását leírja. Ez volt HELMHOLTZ álláspontja is, s sikerült is neki az euklideszi sík mozgáscsoportját néhány egyszerű axiomával jellemezni. A kérdést egy másik nagy matematikus, SOPHUS LIE a folytonos transzformációcsoportok általa kifejlesztett elméletének a keretében újra megvilágította. LIE elmélete feltételez a folytonosság mellett bizonyos differenciálhatósági tulajdonságokat is. Ezeknek a tulajdonságoknak az előre való feltételezése azonban idegen a geometria megalapozására vonatkozó eredeti probléma természetétől. HILBERTnek sikerült is ebben a speciális esetben megszabadítania a *Lie*-féle elméletet a differenciálhatósági feltételektől. A nagy probléma pedig, amit kitűzött, az, hogy lehetséges-e a *Lie*-féle folytonos transzformációcsoportok elméletét teljesen megszabadítani a differenciálhatósági feltételektől? E problémával sok kiváló matematikus foglalkozott azután, köztük PÓLYA GYÖRGY és KERÉKJÁRTÓ BÉLA, akiknek az ún. egy- és kéttagú folytonos transzformációcsoportok esetében sikerült is a problémát megoldaniok. Az általános megoldás azonban sokáig váratott magára, még sok „matematikai fegyvert" kellett megkovácsolni ahhoz, hogy e probléma várát teljes ostrom alá vehessék. E fegyverek között döntő jelentőségűnek bizonyult a mi HAAR ALFRÉDünknek, HILBERT volt tanítványának és asszisztensének, akkor a szegedi egyetem tanárának 1932-ben tett felfedezése, amely szerint a folytonos csoportokban a csoport-eltolásokkal szemben invariáns mértékfogalom vezethető be, az ún. *Haar-féle csoportmérték*. HAAR maga nem tudta már e felfedezését kihasználni, röviddel ezután elhunyt. De másik hazánkfia, NEUMANN JÁNOS, a *Haar*-mérték birtokában egyhamar megoldja a problémát — igenlően — az ún. kompakt csoportok esetében, PONTRJAGIN szovjet matematikus pedig, ugyancsak a *Haar*-mérték felhasználásával, a csak lokálisan kompakt, de kommutatív csoportok esetére. Csak néhány éve, 1952-ben sikerült három amerikai matematikusnak, GLEASONnak, MONTGOMERYnek és ZIPPINnek a *Hilbert*-féle 5. problémát tetszőleges, lokálisan kompakt csoportok esetére is megoldania, felhasználva a halmazelméleti topológia finom meggondolásait is. Ha csak erre az egy *Hilbert*-problémára tekintünk is vissza, amelynek, mint láttuk, erős magyar vonatkozásai is vannak, látnunk kell, hogy a megoldására irányuló hosszú és nemzetközi tudományos erőfeszítések révén mennyit fejlődött a matematika: a mértékelmélet, a halmazelméleti topológia stb. a matematikának egészen új fejezetei alakultak ki ennek kapcsán, pl. a topologikus algebrának az elmélete, és az ún. általános harmonikus analízis. Ez az egy példa is mutatja, milyen meghatározó szerepe volt tudományunk egész fejlődésére HILBERT iránymutatásának. Ennek az iránymutatásnak akkor sem kisebb az érdeme és jelentősége, ha valamelyik problémáról az idők során kiderült, hogy megoldása nem az, amit HILBERT sejtett. Ez volt a sorsa például a *Hilbert*-féle 13. problémának, amely a többváltozós függvényeknek a nomográfia módszereivel való ábrázolásából kiindulva azt kérdi, melyek azok a három vagy többváltozós föggvények, amelyek véges sok kétváltozós függvényből építhetők fel úgy, hogy veszünk egy kétváltozós függvényt, majd mindkét változója helyére egy-egy kétváltozós függvényt helyettesíthetünk és így tovább, véges sokszor. HILBERT sejtése szerint nem minden háromváltozós folytonos függvény állítható elő ilyen módon kétváltozósakból. Legújabban, az 50-es évek végén egy egészen fiatal szovjet matematikus, V. I. ARNOLD, KOLMOGOROV szovjet akadémikus tanítványa, mestere kutatási eredményeit továbbfejlesztve végre megoldotta HILBERTnek ezt a problémáját is, bár a megoldás nem az, amit HILBERT sejtett. Kiderült ugyanis, hogy igenis minden háromváltozós folytonos függvény kifejezhető kétváltozósak ilyen módon való egybeskatulyázásával.

HILBERT tudományos életművének időbeli lefolyása sajátságos képet ad. Élete meglehetősen élesen szakaszokra bontható, amelyekben majdnem kizárólag egy-egy problémacsoporttal foglalkozott. Pl. életének abban a szakaszában, amikor az integrálegyenletek érdekelték, csak ezekkel foglalkozott, minden mögött ezt a kérdést vélte felfedezni; ha pedig úgy érezte, hogy egy problémakörrel végzett, ezt a problémakört véglegesen otthagyta, s más problémakör felé fordult. Ezen a jellemző módon jutott tudása és alkotása az univerzalitásnak napjainkban már szinte elérhetetlen magas fokára.

Munkásságának a következő fő szakaszait lehet megkülönböztetni: 1) Invariánselmélet (1885—1893), 2) Algebrai számtestek elmélete (1893—1898). 3) A geometria alapjai (1898—1902). 4) Integrálegyenletek (1902—1912). 5) Fizika (1910—1922). 6) A matematika általános alapjai, bizonyításelmélet (1922 után). Ez a felosztás azonban durvább a kelleténél. Pl. variációszámítási dolgozatait egy kalap alá veszi az integrálegyenletekről szólókkal. És természetesen vannak átfedések is, továbbá néhány szórványos, a fenti időrendbe bele nem illő alkotása, utóbbiak közül talán a legmeglepőbb a *Waring*-féle probléma általa adott megoldása 1909-ből.

WARING még a XVIII. században azt a sejtését mondta ki, hogy minden pozitív egész szám előállítható legfeljebb K darab pozitív egész szám n-edik hatványának összegeként, ahol K csak az n-től függ, mint ahogy például minden pozitív egész szám kifejezhető 4 darab négyzetszám összegeként. A *Waring*-féle probléma a maga általánosságában hosszú ideig teljesen hozzáférhetetlennek tűnt s csak a XIX. század utolsó évtizedében kezdtek egyes matematikusok azon fáradozni, hogy legalább az n kitevő egyes értékeire bebizonyítsák WARING sejtését. HILBERT figyelmét különösen HURWITZnak egy 1908-ban közölt érdekes ez irányú részeredménye keltette fel, amely szerint, ha valamely n-re érvényes egy

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^n = Y_1^{2n}+Y_2^{2n}+\ldots+Y_k^{2n}$$

alakú azonosság, ahol az Y-ok az x_1, x_2, x_3, x_4 változók racionális együtthatós, lineáris kifejezései, és ha erre az n-re igaz WARING sejtése, akkor $2n$-re is igaz. HILBERTnek sikerült minden n esetében egy a HURWITZ-típusú azonosságot, négy helyett öt változó esetére is felállítania, mégpedig meglepő módon, egy bizonyos 25-szörös integrálra vonatkozó formulából kiindulva, és ennek segítségével, további meggondolások egy csodálatra méltó láncolatán át, sikerült WARING sejtését teljes általánosságban bebizonyítania. Ez a bizonyítás egyik legnagyszerűbb tanúsítója HILBERT matematikai erejének s egyben meglepő példa az analízis módszereinek a számelméletben való alkalmazhatóságára. De meglepő az is, hogy HURWITZ dolgozatának megismerése után HILBERTnek igen rövid idő elég volt ahhoz, hogy a teljes megoldáshoz eljusson, alig pár hónap. Dolgozatát, amely a matematikai irodalomnak örökre egyik fényes gyöngyszeme marad, 1909-ben már közölte, közben elhúnyt barátjának és kollégájának, MINKOWSKInak az emlékére ajánlva.

Egy ilyen előadás keretében természetesen nincsen mód arra, hogy végighaladjunk HILBERT teljes tudományos hagyatékán. HILBERT első két tudományos periódusának — az invariánselméletinek és az algebrainak — átugrásával térjünk ki egy kicsit részletesebben HILBERTnek a geometria megalapozására vonatkozó munkásságára, amely az addig csak a szűkebb szakkörökben méltányolt tudóst világhírűvé tette. Nagy meglepetést keltett hallgatói előtt, amikor az addig az invariánsokkal és algebrai számtestekkel foglalkozó tanáruk 1898/99 telén az „Euklidesi geometria elemei" címmel hirdetett egyetemi előadásokat s még 1899-ben megjelentette azóta klasszikussá vált könyvét, a „Grundlagen der Geometrie"-t.

Már a régi görögök geometriája deduktív tudomány, amely tisztán logikai eljárásokkal épül fel, ha egyszer néhány axiómát, alapmegállapítást elfogadunk. EUKLIDESZ és HILBERT egyaránt ezt a programot hajtja végre. Csakhogy míg EUKLIDESZ axioma-listája még távolról sem volt teljes, a HILBERTÉ az, és HILBERT levezetéseiben nem marad semmi hézag. EUKLIDESZnél és HILBERTnél is a pont, az egyenes és a sík az alapelemei a geometriai térnek, de míg EUKLIDESZ ezeket a tér-elemeket és a köztük fennálló, az axiómákban foglalt kapcsolatokat a szemléletre is hivatkozva próbálja értelmezni, addig HILBERT a szemléletre való minden nyílt vagy burkolt hivatkozástól távol tartja magát. HILBERT felfogása szerint mindannak, amit ezekről az alapelemekről tudnunk kell, benne kell foglaltatnia az axiómákban: maguk az axiómák szolgálnak tehát ezeknek az alapelemeknek (szükségszerűen nem teljes) definícióiul. EUKLIDESZ az axiómákat evidenseknek tartotta a valóságos fizikai térben alkotott szemléletünk alapján. De a geometria szigorúan deduktív rendszerében a szemléleti evidenciának nem lehet szerepe, sőt még annak a kérdésnek sincs értelme, hogy az axiómák „igazak"-e? Az axiómák csupán hipotézisekül szolgálnak s egyetlen feladatunk, hogy ezeknek a hipotéziseknek a logikai következményeit kifejtsük. Valóban, különböző realizációi lehetségesek a geometria alapelemeinek, amelyekre az axiómák — mind vagy részben — teljesülnek. Az n-dimenziós euklideszi vektortér axiómái teljesülnek például akkor is, ha egy bizonyos elektromos vezetőrendszert veszünk, amelynek n ága bizonyos elágazási pontokban érintkezik, s az ebben lefolyó elektromos áramot tekintjük vektornak, hosszúságát azzal a *Joule*-hővel mérve, amelyet ez az áram egységnyi idő alatt kelt. HILBERT a maga sajátságosan éles megfogalmazásában ezt egy beszélgetés alkalmával így fejezte ki: „kell, hogy *pont, egyenes, sík* helyett mindig mondhassunk *asztal*t, *szék*et, *söröskancsó*t."

A geometriának axiómákból való felépítésében, amennyire csak lehet, takarékoskodni kell az axiómákkal. Hiszen minél kevesebb az axióma, az alapfeltevés, annál könnyebb azok teljesültét egy-egy adott realizációban (mint az előbb említett, áramkörökre vonatkozó példában) megállapítani s így annál könnyebb a geometriánkat alkalmazni. De az axiómákkal való takarékosság fontossága abban is áll, hogy így az egyes axiómacsoportok közötti kapcsolatokat jobban meg tudjuk világítani. HILBERT a geometria axiómáit 5 csoportba szedve mondja ki; ezek a következők: az illeszkedés, a rendezés, az egybevágóság, a párhuzamosság és a folytonosság axiómái. A sorrend lényeges; úgy van megadva, hogy már az első egy-két axiómacsoport axiómái alapján, a többiek felhasználása nélkül is, számos következtetést vonhassunk le. Hiszen minden újabb axiómának az előzőkhöz való hozzávétele újabb megszorítást jelent s a cél az, hogy mielőtt újabb megszorítást tennénk, minden lehetőséget kiaknázzunk, amit az eddig tett megszorítások még megengednek. Ha, például, a geometriai egybevágóságok elmélete felépíthető a párhuzamossági axióma nélkül is, tehát függetlenül attól, hogy ezt az axiómát feltesszük-e vagy sem, vagy milyen formában tesszük fel, akkor a párhuzamossági axiómát az egybevágóság axiómái utánra kell helyezni. Ilyen módon tisztán látszik a geometria felépítése során, mi az, ami a *Bolyai*-féle abszolút — azaz párhuzamossági axiómát nem feltételező — geometriában is érvényes és mi az, ami csak az euklideszi párhuzamossági axióma alapján következik.

HILBERTnek természetesen voltak a nem-euklideszi geometria felfedezői, BOLYAI JÁNOS és LOBACSEVSZKIJ óta más előfutárai is, főként M. PASCH, aki a *rendezés* eddig rejtve maradt axiómáit fedte fel és módszeres világossággal vitte végbe a projektív geometria deduktív felépítésének a programját (1882). Olasz geométerek (PEANO, VERONESE) folytatták ezt a diszkussziót. HILBERT azonban nemcsak hogy betetőzte ezt a folyamatot a szemléletre való rejtett utólagos hivatkozásokat szükségtelenné tevő geometriai axiómarendszerének a felállításával, hanem ezt az axiómarendszert addig szokatlanul éles logikai analízisnek vetette alá. HILBERT, bár voltak előfutárai ebben is, az első, aki teljesen szabadon mozog ezen a „metageometriai" szinten: rendszeresen megvizsgálja az egyes axiómái, ill. axiómacsoportjai egymástól való függetlenségének és ellentmondástalanságának a kérdését azáltal, hogy megfelelő geometriai modelleket szerkeszt, amelyek — például amikor valamelyik axiómának a többiektől való függetlenségéről van szó — az illető axiómának nem tesznek eleget, de az összes többinek igen. A *Bolyai—Lobacsevszkij*-féle nem-euklideszi geometriára már ismeretes volt ilyen modell, a *Cayley—Klein*-féle körmodell, HILBERT elkészíti a „nem-archimédeszi", „nem-desarguesi", „nem-pappusi" geometriák modelljeit is, amelyekben a mérés ún. archimédeszi axiómája ill. a projektív geometria *Desargues*-féle, ill. *Pappus*-féle tételei nem érvényesek. Mindezekben a logikai ellenpéldákban az alapvető eszmék ma már természetesnek tűnnek nekünk, olyannyira mély hatással volt ez a *Hilbert*-féle „axiomatikus gondolkodás" a matematikáról való felfogásunkra. Nagy szerepe volt ebben annak a világos és félreérthetetlen nyelvnek, amellyel HILBERT magát ki tudta fejezni dolgozataiban s könyvében, a „*Grundlagen der Geometrie*"-ben, amely 1899 óta eddig 7 kiadásban fogyott el, fordításairól nem is beszélve. E könyv művészi kvalitásai kétségtelenül hozzájárultak sikeréhez és tették a tudomány egyik mesterművévé.

A „Grundlagen" megjelenése utáni időszak HILBERT életének legragyogóbb korszaka. 1902-ben régi barátját, MINKOWSKIt a göttingai egyetemre nevezik ki, két év múlva C. RUNGE kap ugyanoda kinevezést, mint az alkalmazott matematika művelője. A göttingai matematikai élet magasba lendül, s körülötte nagy virágzásnak indulnak alkalmazási területei is, a csillagászat, a mechanika és a fizika. Ez a *Hilbert*-iskola fénykora, 1901-től az I. világháború kitöréséig több mint 40 doktori disszertáció készül el HILBERT vezetése alatt, ezek közül számos maradandó értékű és néhány egészen híressé vált munka; a fiatal doktorok közül rekrutálódnak HILBERT asszisztensei, akik később maguk is majdnem mindannyian nagy tekintélyű professzorokká váltak. Fiatal és tapasztaltabb matematikusok egyaránt jönnek HILBERThez bel- és külföldről, hogy tanuljanak a mestertől s sok értékes indítékot is hoznak magukkal, amivel hozzájárulnak a göttingai matematikai élet még színesebbé válásához.

Maga HILBERT a „Grundlagen" után egy-két évig még folytatja geometriai kutatásait s megírja a „Matematikai problémákról" szóló előadását a párizsi kongresszus számára, amelyről már szóltunk, de ezután mindinkább a függvénytani analízis lép érdeklődésének előterébe. Munkái az analízist új, hatásos módszerekkel gazdagították, amelyek munkatársai kutatásaival kiegészítve, „*A matematikai fizika módszerei*" című híres, kétkötetes, *Courant—Hilbert*-féle tankönyvben nyertek összefoglalást.

HILBERTnek az analízis területén való kutatásai közben is bizonyos mértékig egy axiomatikus program lebeghetett a szeme előtt. Erre utal az 1908-as római nemzetközi matematikus-kongresszusra készített előadásának a következő részlete: „Kimagaslóan érdekesnek tartanám megvizsgálni azokat a konvergenciameggondolásokat, amelyek az analízis egy-egy meghatározott diszciplínájának a felépítésére szolgálnak, olyan módon, hogy összeállítjuk az illető diszciplína lehetőleg egyszerű alaptényeinek egy rendszerét, amelyek bizonyításához egy bizonyos konvergenciameggondolás szükséges, és amely egyszerű alaptényekből kiindulva azután, újabb konvergenciameggondolások nélkül bizonyíthatjuk be az illető analízis-diszciplína összes tételeit."

Ilyen „egyszerű alaptényeket" HILBERT először a variációszámítás területén keresett, az ún. reguláris variációproblémák között. Vizsgálatainak mindjárt a kezdetén kiemelkedő sikert ért el az ún. *Dirichlet*-féle elvvel kapcsolatban. A matematikai fizika, közelebbről az elektrosztatika egyik alapfeladata az ún. *Dirichlet*-féle probléma, amely a kétdimenziós esetben így szól: Meg van adva az u elektromos potenciál értéke a síkbeli G tartomány peremén, keresendő u értéke a G tartomány belső pontjaiban, feltéve, hogy ott nincsenek elektromos töltések. Matematikailag kifejezve, u-nak a G tartomány belsejében a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

ún. *Laplace*-féle differenciálegyenletet kell kielégítenie, ahol x, y derékszögű koordináták, G peremen pedig u-nak megadott értékeket kell felvennie. DIRICHLET ezt a feladatot egy minimumfeladatra vezette vissza. Kimutatta ugyanis, hogy a G tartományon értelmezett összes olyan, folytonosan differenciálható u függvények közül, amelyek G peremén az adott értékeket veszik fel (röviden mondva: az összes „megengedett" u függvények közül) az szolgáltatja a szóban forgó *Dirichlet*-probléma megoldását, amelyre a

$$D(u) = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy,$$

ún. *Dirichlet*-integrál értéke a minimális. Régebbi kutatók, abból kiindulva, hogy ennek az integrálnak az értéke alulról korlátos, ti. nemnegatív, hallgatólagosan elfogadták azt, hogy *van* olyan függvény a megengedettek közül, amelyre a $D(u)$ integrál minimális értéket vesz fel. Ez az ún. *Dirichlet*-elv. WEIERSTRASS rámutatott arra, hogy ilyen minimalizáló megengedett függvény létezése egyáltalában nem nyilvánvaló. WEIERSTRASSnak ez a jogos kritikája egy időre elriasztotta a matematikusokat attól, hogy a *Dirichlet*-probléma megoldását ebben a — különben olyan természetesnek látszó — irányban keressék s más, kerülőbb utakon közelítették meg a problémát. HILBERT, teljes mértékben elismerve WEIERSTRASS kritikájának jogosságát, nem riadt vissza a kritikától, hanem merészen nekifogott annak, hogy az integrált minimalizáló függvény létezését bebizonyítsa. A nehézséget az okozza, hogy ha $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ megengedett függvényeknek egy olyan sorozata, amelyre a

$$D(u_1),\quad D(u_2), \dots,\quad D(u_n), \dots$$

integrálértékek sorozata a $D(u)$ integrál összes lehetséges értékei halmazának alsó határához tart, egyáltalában nem következik ebből, hogy az $u_1, u_2, \dots\ u_n, \dots$ függvénysorozat maga is konvergál. Pedig ha ez a sorozat konvergálna, nyilván a határértékfüggvény lenne a minimalizáló függvény. HILBERT a konvergenciát azzal kényszeríti ki, hogy az $u_n(x, y)$ minimalizáló függvénysorozatot előbb egy alkalmas „kisimító-eljárásnak" veti alá (FELIX KLEIN kifejezésével „HILBERT lenyírja a felületek szőreit") s azután az így kisimított, de még mindig megengedett és minimalizáló függvénysorozatból ki tud választani egy konvergens részsorozatot. A „kisimítás" úgy történik, hogy a függvények értékét bármely P pontban HILBERT helyettesíti a függvénynek a P pont körüli r sugarú körön vett integrálközepével.

HILBERTnek ez a módszere a *Dirichlet*-probléma megoldására, amelyet „direkt" módszernek nevezhetünk, még jobban alkalmazható olyan problémák megoldásában, amelyekben a tartomány pereme nem játszik olyan lényeges szerepet, mint a *Dirichlet*-féle peremértékproblémában. Csekély módosítással a módszer akkor is alkalmazható, ha pontszingularitásokat is megengedünk, és HILBERT így oldotta meg a *Riemann*-felületeken való áramlások problémáját, megadva ezzel a szükséges alátámasztást az *Abel*-féle integrálok *Riemann*-féle elméletének. Később, amikor a függvénytan egy új nagy feladata, az általános uniformizáció-probléma került az érdeklődés előterébe (főleg POINCARÉ és KOEBE munkássága révén), HILBERT megint csak az ő direkt módszeréhez nyúlt s ennek némi módosításával bebizonyította tetszés szerinti síktartomány konform leképezhetőségét a valós tengellyel párhuzamos metszetekkel felvágott síkra. Így a HILBERT által megmentett és kifinomított „*Dirichlet*-elv" a függvénytan számára valóban egy olyan „egyszerű alapténynek" bizonyult, amilyent HILBERT keresett. Ennek az elvnek a minimálfelületek elméletére való alkalmazhatóságát R. COURANT fedte fel, aki hosszú időn át HILBERT legszorosabb munkatársa volt a göttingai matematikai élet vezetésében s aki később a nácizmus elől Amerikába kényszerült s a New York-i egyetemen ma is virágzó „*Hilbert*-iskolát" alakított ki.

HILBERT eszméi mélyen befolyásolták a variációszámítás modern fejlődését. A direkt módszer a klasszikus *Euler—Legendre—Jacobi—Weierstrass*-féle „lokális" módszerekkel párosulva a variációszámításban új fellendülést hozott.

A variációszámítással szorosan kapcsolódnak az integrálegyenletek HILBERT analízis-tárgyú vizsgálataiban. 1900—01 telén egy fiatal svéd matematikus, HOLMGREN számolt be HILBERT szemináriumán az ugyancsak svéd IVAR FREDHOLM frissen megjelent, integrálegyenletekre vonatkozó első közleményeiről és HILBERT — úgy látszik — azonnal tüzet fogott. Kezdetét vette HILBERT alkotó munkásságának egy újabb és különösen jelentős szakasza.

FREDHOLM az ún. másodfajú integrálegyenleteket vizsgálta, amelyekre többek között a *Dirichlet*-problémának egy C. NEUMANN által javasolt átfogalmazása vezet. Ezek a következő alakúak:

$$x(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt=f(s) \qquad (a\leqq s\leqq b),$$

ahol $K(s, t)$ és $f(s)$ adott függvények, $x(t)$ a keresett függvény, λ pedig egy valós vagy komplex paraméter; a *Dirichlet*-problémára való alkalmazás speciális esetében λ értéke $+1$ vagy -1. POINCARÉ a múlt század végén az ilyen integrálegyenletek megoldásával kapcsolatban komplexfüggvénytani módszereket javasolt; FREDHOLM a *Poincaré*-féle utalásokat felhasználva és messzemenően továbbfejlesztve először adta meg a fenti integrálegyenlet általános megoldási módszerét. FREDHOLM ennek segítségével meg tudta oldani a potenciálelmélet peremérték-problémáját, a már említett *Dirichlet*-problémát. De nem ölelte fel FREDHOLM módszere a rezgő rendszerek (hur, membrán stb.) rezgései sajátrezgések szuperpozíciójaként való előállításának a problémáját, holott POINCARÉ éppen ezekből a problémákból kiindulva jutott el az integrálegyenletekre vonatkozó meggondolásaihoz. HILBERTnek sikerült az elméletet ez irányban kifejlesztenie. Míg FREDHOLM az integrálegyenlet tárgyalásánál párhuzamosan halad a lineáris algebrai egyenletrendszerek szokásos megoldási módjával, de nem hivatkozik az algebrai tételekre, HILBERT egy természetesen kínálkozó — és a rezgő húr problémájában már BERNOULLI által 1730-ban alkalmazott — módszerrel az integrálegyenlet megoldását a lineáris algebrai probléma megoldásából határátmenettel kapja. Az eljárás nem egyszerű és talán kevésbé elegáns a FREDHOLMénál, de lehetővé teszi HILBERTnek, hogy a lineáris és a kvadratikus algebra más, jól ismert tételeit is felhasználhassa, s ezzel a *Fredholm*-féle eredményeket lényegesen kiegészíthesse. A sajátrezgések problémái ugyanis olyan integrálegyenletekre vezetnek, amelyekben a $K(s, t)$ „magfüggvény" szimmetrikus a változóiban, azaz

$$K(s,t)=K(t,s),$$

és ennek következtében az integrálegyenletet megközelítő algebrai lineáris egyenletrendszerben az együtthatók szimmetrikus matrixot alkotnak. A véges szimmetrikus matrixokra és az ezekhez tartozó kvadratikus alakokra pedig jól ismeretes az algebrában a sajátértékprobléma megoldása és az ún. főtengelyekre való transzformáció tétele. HILBERT ezekből az algebrai tételekből kiindulva jut el határátmenettel a szimmetrikus magú integrálegyenletek sajátértékproblémájának és kifejtési problémájának a megoldásához. Fő eredménye, hogy szimmetrikus (és folytonos) $K(s, t)$ magfüggvény esetében található sajátfüggvényeknek egy $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_n(s), \ldots$ ortonormált rendszere, a hozzájuk tartozó $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ valós sajátértékekkel, úgy, hogy bármely $x(s)$ valós folytonos függvényre érvényes a következő összefüggés:

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t) x(s) x(t)\, ds\, dt = \sum_n \lambda_n \xi_n^2,$$

ahol ξ_n az $x(s)$ függvény n-edik *Fourier*-együtthatója a sajátfüggvények ortonormált rendszerében, azaz

$$\xi_n = \int_a^b x(s) \varphi_n(s)\, ds.$$

A $\varphi_n(s)$ sajátfüggvény a λ_n sajátértékkel a következő összefüggésben van:

$$\int_a^b K(s, t) \varphi_n(t)\, dt = \lambda_n \varphi_n(s).$$

Egyébként $\lambda_n \to 0$. A fenti kettős integrál az algebrai kvadratikus alakok analogonja és ennek a ξ_n *Fourier*-együtthatók négyzeteivel való kifejezése megfelel az algebrai kvadratikus alakok főtengelyekre való transzformálásának. Ebből a tételből következik a „sorfejtési tétel" is, eszerint minden ún. „forrásszerűen" előállítható függvény a $\varphi_n(s)$ sajátfüggvények szerint egyenletesen konvergens sorba fejthető.

Továbbmenően HILBERT észreveszi azt is, hogy az algebrai lineáris egyenletrendszerekből és a véges kvadratikus alakokból kiindulva nemcsak az integrálegyenletekhez és a hozzájuk tartozó kvadratikus kifejezésekhez (kettős integrálokhoz) lehet eljutni, hanem — még természetesebben — a végtelen sok ismeretlenes lineáris egyenletrendszerekhez ill. az ezekhez tartozó végtelen sok változós

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} K_{mn}(x_m, x_n)$$

kvadratikus alakokhoz, feltéve, hogy csak olyan

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

végtelen sorozatokat engedünk meg, amelyekre az

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \ldots$$

négyzetösszeg véges értékű. Az ilyen számsorozatokat egy végtelen sok dimenziós „tér" egy x vektora komponenseinek foghatjuk fel; az x vektor hosszúságát az előbbi négyzetösszeg négyzetgyökével értelmezve.

Így jutott el HILBERT az azóta róla elnevezett végtelen sok dimenziójú térnek a fogalmához. Ennek a *Hilbert*-féle térnek megvan egy fontos tulajdonsága, ami a folytonos $x(s)$ függvények által alkotott „függvénytérnek" nincs meg, ti. a *Hilbert*-féle tér *teljes* abban az értelemben, hogy a *Hilbert*-térbeli vektorsorozatok konvergenciájára érvényes a *Cauchy*-féle belső konvergencia-kritérium. Ennek a tulajdonságnak a felhasználásával HILBERT bebizonyítja, hogy ha a fenti, végtelen sok változójú

$$\sum_n \sum_m K_{mn}(x_m, x_n)$$

kvadratikus alak egy bizonyos folytonossági feltételnek, az ún. „teljes folytonosságnak" is eleget tesz, akkor a véges kvadratikus alakokhoz hasonlóan a $\sum\limits_n \lambda_n \xi_n^2$ négyzetösszeg alakra transzformálható.

Nemsokára ezután, HILBERT vizsgálatai által ösztönözve, RIESZ FRIGYES és a német ERNST FISCHER kimutatták, hogy az $x(s)$ függvények „tere" is teljesíti a teljesség feltételét, ha nemcsak a folytonos függvényeket engedjük meg, hanem az összes olyan függvényeket, amelyek a *Lebesgue*-féle értelemben négyzetesen integrálhatók, a távolságot ebben a térben négyzetösszeg helyett négyzetintegrál segítségével értelmezve.

A *Riesz—Fischer*-tétel szerint tehát a *Hilbert*-féle, végtelen sok dimenziójú vektortér bizonyos értelemben hasonló szerkezetű, mint a LEBESGUE szerint négyzetesen integrálható függvények tere. Mindketten felfoghatók mint egy ún. absztrakt *Hilbert*-térnek egy-egy realizációja.

HILBERT nem állt meg a teljesen folytonos kvadratikus alakok vizsgálatánál, hanem elméletét kiterjesztette az ezeknél jóval általánosabb, ún. *korlátos* kvadratikus alakokra is a *Hilbert*-térben. Ezekre bebizonyította az ún. spektrálfelbontás lehetőségét. Míg a teljesen folytonos kvadratikus alakok a tiszta négyzetes $\lambda_n \xi_n^2$ tagok *összegére* transzformálhatók, az általános esetben az ilyen tagok összege mellett egy analog szerkezetű *integrál* is felléphet, amit úgy fejezhetünk ki, hogy a „diszkrét spektrum" mellett „folytonos spektrum" is szerepelhet.

Nem részletezhetem tovább HILBERTnek az integrálegyenletekre és az azokkal kapcsolatos kérdésekre vonatkozó eredményeit. HILBERT gondolataiból kiindulva, tanítványai a modern matematika egyik legjelentősebb ágának, a funkcionálanalízisnek vetették meg az alapjait; ebben az új diszciplínában a *Hilbert*-féle végtelen dimenziós térnek és ún. operátorainak központi szerepük van. RIESZ FRIGYES mellett NEUMANN JÁNOS járt az élen a *Hilbert*-térre vonatkozó újabb vizsgálatokban és főként NEUMANN fejtette ki a *Hilbert*-tér elméletének a szerepét a kvantummechanika megalapozásában.

Maga HILBERT is egy sor fizikai problémára alkalmazta az integrálegyenletek elméletét, aminthogy általában jellemzi HILBERT matematikai munkásságát a fizikával való szoros kapcsolat fenntartása. Munkásságának egy egész szakaszát szentelte annak a célnak, hogy a fizika elméleteit is bizonyos mértékben axiomatizálja.

Szólnunk kellene még HILBERTnek azokról a vizsgálatairól, amelyeket életének későbbi szakaszában folytatott, s amelyek célja a matematika általános megalapozása, a halmazelméletben jelentkező ellentmondások kiküszöbölése, a matematikai logika. Sajnos, ezek ismertetése meghaladná ennek az előadásnak a kereteit.

Ehelyett befejezésül idézzünk néhány sort HILBERT egy írásából, amely a természet megismerésének és a logikának a kapcsolatait taglalja. E sorok mintegy HILBERT filozófiai hitvallását fejezik ki:

»A matematika számára nincs „ignorabimus", „megtudhatatlan", és véleményem szerint a természettudományok számára egyáltalában nincsen. A filozófus COMTE egyszer — hogy egy biztosan megoldhatatlan problémát nevezzen meg — azt mondta, hogy a tudománynak soha sem fog sikerülni az égitestek kémiai összetételének titkát megfejtenie. Néhány évre rá KIRCHHOFF és BUNSEN színképelemzéssel megoldották ezt a problémát, és ma elmondhatjuk, hogy a legtávolabbi csillagokat használjuk fel olyan fizikai és kémiai laboratóriumokul, amilyeneket a földön nem állíthatunk fel. Véleményem szerint annak, hogy COMTEnak nem sikerült megoldhatatlan problémára példát adnia, a valódi oka az, hogy megoldhatatlan probléma egyáltalán nincsen. A balga „ignorabimus” helyett, ellenkezőleg, jelszónk ez legyen:

„Tudnunk kell, tudni fogunk”.
„Wir müssen wissen, wir werden wissen”.«

IRODALOM

O. BLUMENTHAL, Lebensgeschichte, *Gesammelte Abhandlungen von D. Hilbert*, 3. kötet, 388—429 (Springer, Berlin, 1932—33).
H. POINCARÉ, Rapport sur le prix Bolyai, *Acta Math.*, **35** (1912), 1—28.
H. WEYL, David Hilbert and his mathematical work, *Bulletin Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 612—654.

OPERÁTOR FÉLCSOPORTOK KITERJESZTÉSÉRŐL

Írta: MÁTÉ LÁSZLÓ

1. §.

Fréchet térnek olyan lineáris topologikus és teljes teret nevezünk, amelyben a θ (nulla elem) környezeteinek van egy megszámlálhatóan végtelen sok konvex környezetből álló bázisa. A *Fréchet* tér topológiája megadható félnormák megszámlálható rendszerével: ha

$$\{U_k;\quad k=1,2,\ldots\}$$

a θ környezeteinek egy bázisa, akkor a k-adik félnorma:

$$\|x\|_k = \inf\cdot\left\{\alpha: \frac{1}{\alpha}\, x\in U_k\right\}$$

és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ akkor és csakis akkor, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_k = 0$ $(k=1,2,\ldots)$.

Erősen folytonos operátor félcsoportnak (röviden EF) fogjuk nevezni az $\mathfrak{F}$ Fréchet teret önmagába leképező folytonos lineáris operátoroknak olyan $\{T(t);\ t\geqq 0\}$ halmazát, amely teljesíti a következő feltételeket:

I. $T(t+s) = T(t)T(s)$ $s, t\geqq 0$
II. $T(0) = E$ (egység operátor)
III. $T(t)x$ folytonos függvénye t-nek minden $t\in[0,\infty)$ és minden $x\in\mathfrak{F}$ esetén.
Legyen

$$A_h = \frac{1}{h}\,[T(h)-E],$$

ekkor az

$$Ax = \lim_{h\to 0} A_h x$$

módon értelmezett operátort a $\{T(t);\ t\geqq 0\}$ EF *generátorának* nevezzük. A értelmezési tartománya, $\mathfrak{D}(A)$, azokból az x elemekből áll, melyekre $\lim\limits_{h\to 0} A_h x$ létezik. A mindenütt sűrűn értelmezett, zárt operátor.[1] Ha $x\in\mathfrak{D}(A)$, akkor $T(t)x\in\mathfrak{D}(A)$ és

$$\frac{d}{dt}\,T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x\,{}^{1}.$$

Ha A egy $\{T(t);\ t\geqq 0\}$ EF generátora, akkor

$$y(t) = T(t)y_0$$

[1] Éppen úgy bizonyítható, mint a *Banach* térben ([1] VIII. 1. fej.)

az

$$\frac{d}{dt}y(t)=Ay(t) \qquad y(0)=y_0$$

egyenletnek egyetlen megoldása $\mathfrak{D}(A)$*-ban* ([3] 23. 8.1. tétel).

A következő problémával fogunk foglalkozni:

Legyen adott egy $\mathfrak{B}$ *Banach* tér és abban egy $\{T(t);\ t\geqq 0\}$ EF. Vezessünk be $\mathfrak{B}$-be az eredetinél gyengébb topológiát, félnormáknak egy $\|\ldots\|_k$ $(k=1, 2, \ldots)$ sorozatával. Legyen az így kapott lineáris topologikus tér lezárása $\mathfrak{F}$. Mi annak a feltétele, hogy $\{T(t);\ t\geqq 0\}$ $\mathfrak{F}$-ben is EF legyen?

Banach térben a *Hille—Yosida—Phillips* tétel ([1] VIII. 1. fej.) megadja *az A és annak*

$$R_\lambda=(\lambda E-A)^{-1} \qquad \lambda>0$$

rezolvens operátorára vonatkozóan annak szükséges és elégséges feltételét, hogy $\{T(t);\ t\geqq 0\}$ EF legyen. *Fréchet* térben ilyen feltételt nem ismerünk. Így a *Hille—Yosida—Phillips* tétel *részleges* általánosításának tekinthető a problémákra adandó következő válasz:

Tétel. *Legyen* $\{T(t);\ t\geqq 0\}$ EF $\mathfrak{B}$*-ben. Ekkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy* $\{T(t);\ t\geqq 0\}$ EF *legyen* $\mathfrak{F}$*-ben az, hogy minden K korlátos halmazhoz és* $\|\ldots\|_k$ *félnormálhoz megadható legyen olyan monoton növedekő és pozitív* $v_k(t)$ *függvény, hogy minden* $\varepsilon>0$ *mellett*

$$(*) \qquad \|\lambda^n R_\lambda^n x\|_k<v_k(N)+\varepsilon$$

hacsak $\lambda N>n$, $\lambda>\lambda_0(x, \varepsilon)$ *és* $x\in\mathfrak{B}\cap K$.

Tételünkből és a $\{T(t);\ t\geqq 0\}$ EF felsorolt tulajdonságaiból következik, hogy *ha az*

$$\frac{d}{dt}y(t)=Ay(t) \qquad y(0)=y_0$$

egyenletnek EF megoldása van $\mathfrak{B}$*-ben és* $\bar{A}$ *az A operátor* $\mathfrak{F}$*-lezárása, akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az*

$$(0) \qquad \frac{d}{dt}y(t)=\bar{A}y(t) \qquad y(0)=y_0[\in\mathfrak{D}(\bar{A})]$$

egyenletnek EF megoldása legyen $\mathfrak{F}$*-ben az, hogy az A által generált EF kiterjeszthető legyen* $\mathfrak{F}$*-re.*

Ekkor $T(t)y_0$ *az egyetlen megoldás.*

2. §.

A tétel bizonyítása. 1. Legyen $\{T(t);\ t\geqq 0\}$ *EF* $\mathfrak{F}$-ben is. Ekkor

$$v_k(t)=\sup_{\substack{\tau<t\\ x\in K}}\|T(\tau)x\|_k \qquad k=1, 2, \ldots$$

monoton növekedő és pozitív függvény. Ha $x \in \mathfrak{B} \cap K$, akkor ([1] VIII. 1. fej.)

$$\lambda^n R_\lambda^n x = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda s} s^{n-1} T(s) x \, ds.$$

Mivel az $\mathfrak{F}$ topológia $\mathfrak{B}$-ben gyengébb, mint a $\mathfrak{B}$-tér eredeti topológiája, ezért ([4] 207 old. (4)) a $\|\ldots\|_k$ félnorma sorozat megadható úgy, hogy

(1) $$\|x\|_k \leqq |x| \qquad x \in \mathfrak{B},$$

ahol $|\ldots|$ a $\mathfrak{B}$ norma.

Így minden $x \in \mathfrak{B} \cap K$ mellett

$$\|\lambda^n R_\lambda^n x\|_k \leqq \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^N e^{-\lambda s} s^{n-1} \|T(s)x\|_k \, ds + \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_N^\infty e^{-\lambda s} s^{n-1} \|T(s)x\|_k \leqq$$

$$\leqq v_k(N) + |x| \mathfrak{J}_n,$$

ahol

$$\mathfrak{J}_n = e^{-\lambda N} \frac{\lambda^{n-1} N^{n-1}}{(n-1)!} + \mathfrak{J}_{n-1}$$

és így

$$\mathfrak{J}_n = e^{-\lambda N} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i N^i}{i!}.$$

Ebből következik, hogy

(2) $$\lim_{\lambda \to \infty} |x| \, \mathfrak{J}_n = 0$$

minden x, n, N mellett. A (2) egyenletes konvergenciája (n-ben) $n \leqq \lambda N$ mellékfeltétel mellett, a következőképpen látható be:

Közvetlen számolással igazolható, hogy

(3) $$\sum_{i=0}^{\infty} (i - \lambda N)^2 \frac{\lambda^i N^i}{i!} = \lambda N e^{\lambda N}.$$

Ennek alapján

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i N^i}{i!} \right) \inf_{i \leqq n} (i - \lambda N)^2 \leqq \sum_{i=0}^{n} (i - \lambda N)^2 \frac{\lambda^i N^i}{i!} \leqq \lambda N e^{\lambda N}.$$

Ebből, megfelelő rendezéssel

$$\mathfrak{J}_n = e^{-\lambda N} \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i N^i}{i!} \leqq \frac{\lambda N}{\inf\limits_{i \leqq n} (i - \lambda N)^2}$$

lesz. Ha $n < \lambda N$, akkor az egyenlőtlenség jobb oldala nullához tart $\lambda \to \infty$ esetén.

Ezzel a feltétel szükségességét bebizonyítottuk.

II. Teljesüljön (∗). Ha $x \in \mathfrak{B} \cap K$, akkor ([1] VIII. 1. fej.)

(4) $$T(t) x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m \lambda^m}{m!} \lambda^m R_\lambda^m x.$$

Ha bevezetjük a

$$T_\lambda(t)x=e^{-\lambda t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m\lambda^m}{m!}\lambda^m R_\lambda^m x$$

jelölést, akkor (1) és (*) alapján

$$\begin{aligned}\|T_\lambda(t)x\|_k &\leqq e^{-\lambda t}\sum_{m=0}^{[\lambda N]}\frac{t^m\lambda^m}{m!}\|\lambda^m R_\lambda^m x\|_k+e^{-\lambda t}|x|\sum_{m=[\lambda N]+1}^{\infty}\frac{t^m\lambda^m}{m!}\leqq \\ &\leqq v_k(N)+\varepsilon+|x|\,e^{-\lambda t}\sum_{m=[\lambda N]+1}^{\infty}\frac{t^m\lambda^m}{m!},\end{aligned}\tag{5}$$

ahol $[\lambda N]$ a λN egész részét jelenti.

Másrészt, (3) alapján

$$\left(\sum_{i=m}^{\infty}\frac{\lambda^i t^i}{i!}\right)\inf_{i\geqq m}(i-\lambda t)^2\leqq\sum_{i=m}^{\infty}(i-\lambda t)^2\frac{\lambda^i t^i}{i!}<\lambda t e^{\lambda t}$$

amiből megfelelő rendezéssel

$$e^{-\lambda t}\sum_{i=m}^{\infty}\frac{\lambda^i t^i}{i!}\leqq\frac{\lambda t}{\inf\limits_{i\geqq m}\cdot(i-\lambda t)^2}$$

lesz. Ha $t<N$, és $m=[\lambda N]+1$ akkor az egyenlőtlenség jobb oldala nullához tart $\lambda\to\infty$ esetén. Így (5), (4) és (1) alapján

$$\|T(t)x\|_k\leqq v_k(N),\qquad \textit{ha } t<N \textit{ és } x\in\mathfrak{B}\cap K.$$

Eredményünk azt mutatja, hogy $T(t)$ folytonos operátor $\mathfrak{F}$-ben annak egy mindenütt sűrű részhalmazán. Ezért $T(t)$ kiterjeszthető $\mathfrak{F}$-en folytonos operátorrá és

$$\|T(t)x\|_k\leqq v_k(N)\qquad \textit{ha } t<N \textit{ és } x\in K.\tag{6}$$

A (6) egyenlőtlenségből az 1 §. III. tulajdonság is következik. Ugyanis (6) alapján a θ minden V környezetéhez van olyan U környezet, hogy

$$T(t)(x-x_0)\in V\qquad \textit{hacsak } t<N \textit{ és } x-x_0\in U.$$

Így, ha $x\in\mathfrak{F}$, $x_0\in\mathfrak{B}$ és $x-x_0\in U\subseteqq V$ *és* t_0 *elég kicsi,* akkor

$$\begin{aligned}T(t)x-T(s)x &= (T(t)x-T(t)x_0)+(T(t)x_0-T(s)x_0)+\\ &+(T(s)x_0-T(s)x)\in V+V+V,\quad \textit{ha } t,s<N \textit{ és } |t-s|<t_0.\end{aligned}$$

Az 1 §. I. és II. feltétel teljesül $\mathfrak{F}$-ben is, mert $\mathfrak{B}$-ben teljesül és $T(t)$ folytonos operátor minden $t\geqq 0$ mellett.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a (*) feltétel elégséges.

3. §.

Példa. Legyen $\mathfrak{B}$ a $(-\infty,+\infty)$ intervallumon folytonos és korlátos függvények osztálya az egyenletes konvergenciával és $\mathfrak{F}$ a $(-\infty,+\infty)$ intervallumon folytonos függvények osztálya a — minden zárt részintervallumon egyenletes — konvergenciával. Ekkor a $\frac{d}{ds}$ differenciál operátor EF-t generál $\mathfrak{B}$-ben, mert rezolvens operátora

$$R_\lambda : R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} x(s+t)\, dt$$

teljesíti a *Hille — Yosida — Phillips* tételt és $\mathfrak{D}(A) = \left\{ x : \frac{d}{ds} x(s) \in \mathfrak{B} \right\}$. Tekintettel arra, hogy ekkor

$$\|\lambda^n R_\lambda^n x\|_k = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \sup_{|s|<k} \left| \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{n-1} x(s+t)\, dt \right| \leqq$$

$$\leqq \sup_{|s|<k} \cdot \left| \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^N e^{-\lambda t} t^{n-1} x(s+t)\, dt \right| +$$

$$+ \sup_{|s|<k} \left| \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_N^\infty e^{-\lambda t} t^{n-1} x(s+t)\, dt \right| \leqq \sup_{|s|<N+k} |x(s)| + \sup_s |x(s)| \mathfrak{I}_n$$

a 2 §. I. alapján (∗) teljesül, a

$$K = \{x : \sup_{|s|<m} |x(s)| < c_m\}$$

és

$$v_k(N) = c_{k+N}$$

mellett.

A kiterjesztett EF generátora ugyancsak $\frac{d}{ds}$, de

$$\mathfrak{D}(\bar{A}) = \left\{ x : \frac{d}{ds} x(s) \in \mathfrak{F} \right\}.$$

A $\frac{d}{ds}$ által generált és

$$T(t)x(s) = x(s+t)$$

módon értelmezett transzláció EF számos „patologikus" tulajdonsággal rendelkezik az $\mathfrak{F}$ térben.

A *Banach* térben minden EF-hez található olyan $a \geqq 0$, hogy az

$$\{e^{-at} T(t)x;\ t \geqq 0\}$$

halmaz korlátos minden x-re. Ezzel szemben esetünkben a

$$\{e^{-at} T(t) e^{s^2} = e^{(s+t)^2 - at};\ t \geqq 0\}$$

halmaz nem korlátos.

A *Banach* térben ha A generátor, akkor

$$R_\lambda = (\lambda E - A)^{-1} \qquad \lambda > 0$$

operátor, folytonos operátor. Esetünkben az

$$\lambda y(s)-\frac{d}{ds}y(s)=0$$

egyenletnek minden λ-ra létezik nemtriviális megoldása és ezért R_λ nem létezik.

A megfelelő (0) egyenletnek azonban ekkor is egyértelmű megoldása van éppúgy, mint a *Banach* tér esetén.

IRODALOM

[1] Dunford—Schwatz: *Linear Operators I.*, New York, 1958.

[2] W. Feller: On the generation of unbounded semi group of bounded operators, *Ann. Math.* **58** (1953).

[3] Hille—Phillips: *Functional Analysis and semi groups,* New York 1957.

[4] Köthe: *Topologische lineare Räume, I.*, Berlin, 1960.

[5] Л. Мате: О полугруппе операторов в пространстве фреше. Докл. АН. СССР. **142** (1962.)

[6] I. Miyadera: Semi groups of operators in Fréchet space and applications, *Tohoku Math. Journ.* **11** (1959).

(Beérkezett: 1961. VII. 17.)

KÖRELHELYEZÉSEK ÁLLANDÓ GÖRBÜLETŰ FELÜLETEKEN[1]

Írta: MOLNÁR JÓZSEF

Bevezetés

A diszkrét geometriában[2] a legutóbbi időben előtérbe kerültek tartományok kitöltésével, ill. lefedésével kapcsolatos problémák, melyeket gyakran a műszaki-, vagy természettudományok vetnek fel. Ilyen pl. a következő kitöltési probléma:[3] Egy kidolgozott borjúbőrből, hogyan lehet adott méretű cipőfelsőrészeket kivágni úgy, hogy a selejt minimális legyen?

Dolgozatunkban ennek az alapproblémának csupán azzal a speciális esetével foglalkozunk, amikor az elhelyezendő $\{K\}$ tartományok véges sok kör egyesített halmazából állanak.[4] Vizsgálatainkban a kitöltendő T „tartomány" vagy egy állandó görbületű felület, pontosabban a gömbfelület, az euklideszi sík, vagy a hiperbolikus sík, vagy ennek egy bizonyos résztartománya.

Mielőtt röviden vázolnánk dolgozatunk eredményeit, vessünk egy pillantást az eddigi körelhelyezési eredményekre![5]

Az euklideszi sík kongruens körökkel való legsűrűbb kitöltésének problémáját A. THUE,[6] a számelméletben elért alapvető eredményeiről ismert nagy norvég matematikus oldotta meg 1892-ben.

Eltekintve H. MINKOWSKI, LORD KELVIN és W. BARLOW vizsgálataitól, melyek csupán szabályos elhelyezésekre vonatkoztak, a körelhelyezési vizsgálatokban hosszabb szünet következett be. Az euklideszi sík kongruens körökkel való legritkább lefedésének problémáját R. KERSHNER [45] oldotta meg 1939-ben. További bizonyítások, ill. élesítések a sík kongruens körökkel való kitöltésére, ill. lefedésére találhatók pl. FEJES TÓTH L. [13], [14], H. HADWIGER [40], B. SEGRE—K. MAHLER [64] és S. VERBLUNSKY [67] dolgozataiban.

A körelhelyezési problémák rendszeres vizsgálatát FEJES TÓTH kezdte, aki kutatásait kiterjesztette a diszkrét geometria különböző területeire. Gondolunk pl.

1 A matematikai tudományok doktora fokozat elnyeréséhez készített disszertáció.

2 A „diszkrét geometria" elnevezést a szovjet matematikusok adták (l. FEJES TÓTH[29]) a geometria azon ágának, amelynek tárgyát diszkrét elemekből álló halmazok képezik. Ez felöleli pl. a nem-folytonos mozgáscsoportok elméletét, a szabályos térfelbontás- és pontrácsok elméletét és ennélfogva szoros kapcsolatban van a csoportelmélettel, a számelmélettel, a függvénytannal és a matematika más ágaival (l. FEJES TÓTH [31]). (A szögletes zárójelben levő számok, a dolgozatunk végén szereplő irodalomjegyzékre vonatkoznak).

3 Ezzel a problémával rokon a következő lefedési probléma: Hogyan lehet egy tartományt egy adott tartomány kongruens példányaival legritkábban lefedni?

4 Dolgozatunkban a tartomány zárt ponthalmaz. Egy tartományt és annak területét ugyanazzal a betűvel jelöljük.

5 Dolgozatunkban nem szerepelnek olyan körelhelyezési problémák mint pl. többszörös kitöltés, többszörös lefedés, körfelhők.

6 THUE [66].

a következőkre:[7] 1. $T \equiv$ euklideszi sík, $\{K\} \equiv$ inkongruens körrendszer, 2. $T \equiv$ konvex tartomány, $\{K\} \equiv$ kongruens körrendszer, 3. $T \equiv$ konvex tartomány, $\{K\}$ inkongruens körrendszer, 4. $T \equiv$ állandó görbületű felület, $\{K\} \equiv$ kongruens körrendszer.[8]

A körelhelyezési problémák gazdag irodalmából említsük még meg a következőket: M. AGENO [1], [2],[9] BALÁZS J.[10], W. J. BLUNDON [7], A. H. BOERDIJK [9], L. DANZER [11], ERDŐS P.[11], FEJES TÓTH L. [26], [27], [28], [32], L. FEW [33], S. FINSTERWALDER [34], A. FLORIAN [36], H. GROEMER [37], W. HABICHT [38], HEPPES A. [41], [42], [43], H. MESCHKOWSKI [48], [49], MOLNÁR J. [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], R. RADO [59], H. RUTISHAUSER [61], B. L. VAN DER WAERDEN [68], L. L. WHITE [69].[12]

Az eddigi vizsgálatok főként konvex tartományoknak konvex tartományokban való elhelyezésére vonatkoztak. A gyakorlat által felvetett problémák azonban többnyire nem konvex tartományok vizsgálatát igénylik. E területen elért eredmények száma igen csekély.

Dolgozatunk kiindulási pontját az elhelyezési problémák vizsgálatainak kiterjesztése képezte bizonyos nem konvex tartományokra. Ezek a vizsgálatok vezettek a körkonvexitás fogalmához,[13] amely általánosítása a MAYER-féle [47] r-hiperkonvexitásnak, a HADWIGER [39] α-rendű konvexitásnak, a PERKAL-féle [58] ε-konvexitásnak és igen szoros kapcsolatban áll az A. D. ALEXANDROV [4], [5], [6][14], ill. J. G. RESETNYÁK [60] által értelmezett PRV, ill O_δ halmaz fogalmával.

A nem konvex tartományok vizsgálataiban alkalmazott egyik segédtétel (HAJÓS-féle lemma) lehetőséget adott az egész síkra (vagy annak konvex tartományaira) vonatkozó ismert sűrűségbecslések messzemenő élesítéseire és általánosításaira.

A disszertáció két részből áll. Az I. részben klasszikus értelemben konvex „tartományokban" vizsgáljuk a körelhelyezéseket, míg a II. részben körkonvex tartományokban. A tárgyalás java része szintetikus. Az eredmények egyszerű elemi megfontolások révén adódnak.

I. KÖRELHELYEZÉSEK KONVEX „TARTOMÁNYOKBAN"

1. §. Körrendszerek sűrűsége

Dolgozatunkban állandó görbületi felület alatt a gömbfelületet, az euklideszi síkot, ill. a hiperbolikus síkot értjük.

Egy megszámlálható sok körből álló $\{K_i\}$ körrendszernek egy állandó görbületű felület T tartományára vonatkozó sűrűségén a $\frac{\Sigma K_i \cap T}{T}$ hányadost értjük. Hason-

[7] Rövidség kedvéért csupán az alapproblémákban szereplő T és $\{K\}$ tartományokat jeleztük.

[8] FEJES TÓTH 1953-ig elért eredményei megtalálhatók monográfiájában [25], amely 1958-ban orosz nyelven is megjelent [29] I. M. JAGLOM kiegészítéseivel.

[9] Ageno vizsgálataiban a poliéder alakú vírusok „krisztálográfiájával" foglalkozik.

[10] BALÁZS J. eredménye még nincs publikálva (l. pl. FEJES TÓTH [30]).

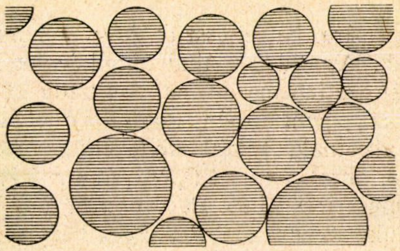
[11] l. FEJES TÓTH [25], 96. o.

[12] A [32] és [43] MOLNÁRral írt közös dolgozat, a [38] és [63] VAN DER WAERDENnel írt közös dolgozat.

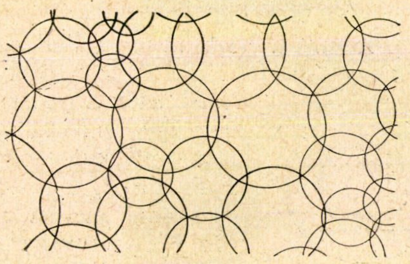
[13] A körkonvex tartományokra vonatkozó vizsgálatainkba bekapcsolódott HEPPES is, aki e területen szép eredményeket ért el.

[14] ZALGALLERrel írt közös könyv.

lóan értelmezzük egy körrendszernek a gömbfelületre vonatkozó sűrűségét is. Különösen érdekesek az olyan körrendszerek, amelyeknél a T „tartomány" minden pontja legfeljebb egy kör belső pontja (1. ábra), ill. legalább egy körhöz tartozik (2. ábra). Az első esetben kitöltési, a másodikban lefedési sűrűségről beszélünk.



1. ábra



2. ábra

Értelmezhető egy megszámlálható sok körből álló $\{K_i\}$ körrendszernek az egész euklideszi síkra vonatkozó δ kitöltési, ill. Δ lefedési sűrűsége, mégpedig a következőképpen:

$$\delta = \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\Sigma K_i \cap K(R)}{K(R)} \quad \text{és} \quad \Delta = \underline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\Sigma K_i \cap K(R)}{K(R)},$$

ahol $K(R)$ egy R sugarú kör, amelynek középpontja a sík egy rögzített O pontja. Hasonlóan értelmezhető általánosabb tartományok valamilyen rendszerének sűrűsége is.[15] Bizonyítható, hogy δ, ill. Δ független az O megválasztásától. Ez egyszerűen következik abból, hogy

$$\frac{K(R+c)-K(R)}{K(R)} = \frac{2Rc+c^2}{R^2},$$

hányados konstans c érték mellett nullához tart, ha $R\to\infty$.

Egy $\varkappa$ görbületű hiperbolikus síkon

$$\lim_{R\to\infty} \frac{K(R+c)-K(R)}{K(R)} = e^{\sqrt{\varkappa}c} - 1 \neq 0.$$

Ezért egy körrendszernek az egész hiperbolikus síkra vonatkozó sűrűségének definíciója nehezebbnek látszik. Ezt a nehézséget azáltal fogjuk megkerülni, hogy a hiperbolikus síkot bizonyos cellákra bontjuk és megmutatjuk, hogy minden cellában a kitöltési, ill. lefedési sűrűség $\leqq d < 1$, ill. $\geqq D > 1$.[16] Ez annyit jelent, hogy δ, ill. Δ bármely „értelmes" definíciója mellett $\delta \leqq d$, ill. $\Delta \geqq D$.

2. §. Segédtételek

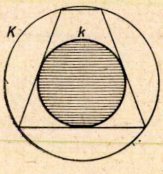
Dolgozatunkban jelentős szerepet tölt be a következő

HAJÓS-FÉLE LEMMA:[17] *Legyen k és K egy állandó görbületű felület két r, ill. R*

15 l. FEJES TÓTH [25], 55—57. o.
16 l. FEJES TÓTH [26], [27], [28], ill. dolgozatunkban az I—V. tételt (MOLNÁR [56]).
17 Ez a lemma HAJÓS egy észrevételéből született, amelyet egy 1960 tavaszán tartott előadásomhoz fűzött.

($r < R$) sugarú koncentrikus köre. Legyen továbbá a K körben véges sok olyan körszelet, melyek közül egyiknek sincs közös belső pontja sem más körszelettel sem a k körrel. Állítás: A körszeletek összterülete akkor maximális, ha a szeletek olyan K-ba írt sokszöget határolnak, melynek oldalai — legfeljebb egy kivételével — a K kört érintik (3. ábra).

Bizonyítás. Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy a körszeletek egy K-ba írt $P_1 \dots P_n$ sokszöget alkotnak. Az oldalak által K-ból lemetszett körszeletek Σ összterülete változatlan marad, ha a sokszög oldalait úgy rendezzük, hogy az egymás után csatlakozó oldalak nem növekvő sorozatot alkotnak. Ezért feltehetjük, hogy $P_1P_2 \geqq P_2P_3 \geqq \dots \geqq P_nP_1$ (4. ábra). Legyen P_kP_{k+1} ($k \leqq n-1$) az első oldal, mely a k kört nem érinti. Ha a P_{k+1} pontot a K körön P_{k+2} irányába mozgatjuk, akkor a $P_kP_{k+1}P_{k+2}$ háromszög területe csökken,[18] s így Σ növekszik. A P_{k+1} pontot addig mozgatjuk P_{k+2} irányába míg vagy P_kP_{k+1} érinti a k kört, vagy a P_{k+1} pont összeesik a P_{k+2} ponttal. Az utóbbi esetben a $P_{k+1} \equiv P_{k+2}$ pontot mozgatjuk a K körön P_{k+3} irányába míg a P_kP_{k+1} oldal a k kört nem érinti, vagy nem esik össze a P_{k+3} ponttal. Ilyen eljárással a P_kP_{k+1} oldal mindig olyan helyzetbe hozható, hogy a k kört érintse. Ha közben az oldalak nem növekvő sorozata megváltozott volna, akkor egy újabb rendezéssel nem növekvő sorozatot létesítünk és az előbbi eljárást tovább folytatjuk. Ezáltal véges sok lépésben eljutunk a segédtételben említett sokszöghöz.



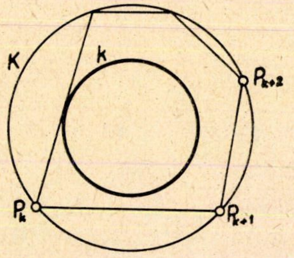
3. ábra

E bizonyításnál alkalmazott gondolatmenettel könnyen bizonyítható az

1. SEGÉDTÉTEL.: *Legyen k és K ($k < K$) egy állandó görbületű felület két koncentrikus köre és S a K körbe beírt olyan sokszög, melynek egyik oldala sem metsz bele a k körbe. Állítás: S kerülete akkor minimális, ha oldalai legfeljebb egy kivételével érintik a k kört.*

A HAJÓS-féle lemmában, valamint az 1. segédtételben szereplő extremális sokszöget HAJÓS-féle sokszögnek nevezzük és röviden $H(r, R)$-rel jelöljük, ahol r és R ($r < R$) a két koncentrikus kör sugara.

A HAJÓS-féle lemma bizonyításánál alkalmazott gondolatmenet felhasználható azonban általánosabb állítások bizonyítására is. Gondolunk pl. arra az egyszerű általánosításra, melynél a K körben szereplő körszeletek közül az egyiket rögzítettnek tekintjük. Pontosabban szólva nyilván igaz a



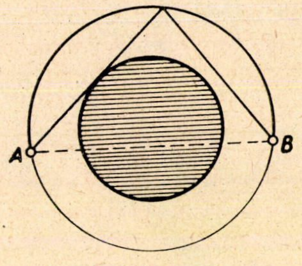
4. ábra

2. SEGÉDTÉTEL: *Legyen k és K egy állandó görbületű felület két r, ill. R ($r < R$) sugarú koncentrikus köre, AB pedig a K kör egy tetszőleges körszeletének határoló húrja. Legyen továbbá a K körben véges sok olyan körszelet, melyek közül egyiknek sincs közös belső pontja sem más körszelettel, sem a k körrel, sem pedig az AB húrral határolt körszelettel. Állítás: A K körből lemetszett körszeletek összterülete akkor maximális, ha a körszeletek olyan K körbe beírt sokszöget határolnak, melynek oldalai — az AB oldaltól eltekintve — legfeljebb egy kivételével a k kört érintik (5. ábra).*

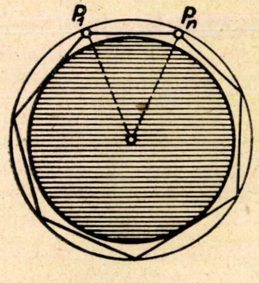
[18] Ui. azon pontok mértani helye, melyekre a $P_kP_{k+1}P_{k+2}$ háromszög területe állandó, rögzített P_k, P_{k+2} mellett a $P_{k+1}P_{k+2}$ körív „fölött" van.

Ehhez a segédtételhez hasonló segédtétel mondható kerületre vonatkozólag is, pontosabban igaz a

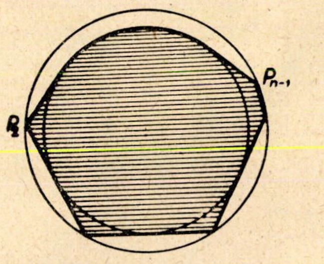
3. SEGÉDTÉTEL: *Legyen k és K $(k < K)$ az állandó görbületű felület két koncentrikus köre, továbbá S a K körbe beírt olyan sokszög, amelynek egyik AB oldala rög-*



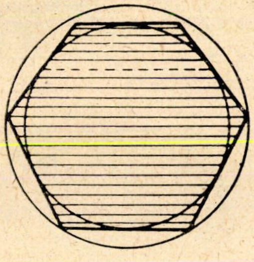
5. *ábra*



6. *ábra*



7. *ábra*

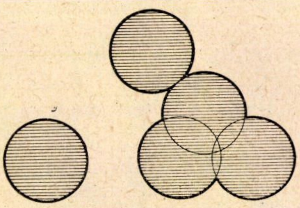


8. *ábra*

zített, a többi oldala nem metsz bele a k körbe. Állítás: S kerülete akkor minimális, ha oldalai — az AB oldaltól eltekintve — legfeljebb egy kivételével érintik a k kört (5. ábra).

4. SEGÉDTÉTEL:[19] *Legyen k és K egy $\varkappa$ görbületű felület két r és R $\left(\sin\sqrt{\varkappa}R = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{\varkappa r}\right)$ sugarú koncentrikus köre, továbbá legyen $\Pi \equiv P_1P_2\ldots P_n$ a körgyűrűben elhelyezkedő és a k kört tartalmazó olyan konvex sokszög, amelynek $P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}$ pontja a K körön van (6. ábra). Állítás: Ha $a \geqq 5\left(\operatorname{cosec}\frac{\pi}{a} = 2\cos\sqrt{\varkappa r}\right)$, akkor*

$$\Pi > k + \nabla,$$



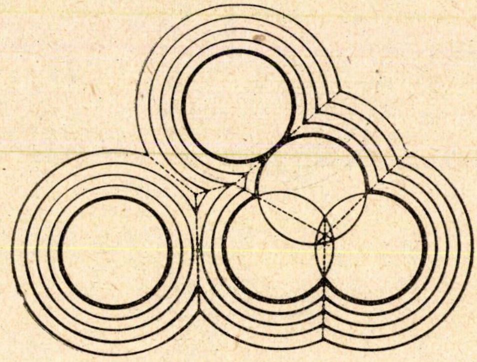
9. *ábra*

[19] HAJÓS a disszertációmhoz fűzött opponensi véleményében a következő erősebb segédtételt említi meg: Ha az állandó görbületű felületen egy sokszög egy körgyűrűben helyezkedik el és csúcsai két szomszédosnak esetleges kivételével a külső peremkörön vannak, akkor területének minimumát egy olyan sokszög adja, amelynek oldalai mindannyian érintik a belső kört, s a kivételes csúcsok a csatlakozó oldalak érintési pontjait összekötő egyenestől egyenlő távolságra vannak (8. ábra).

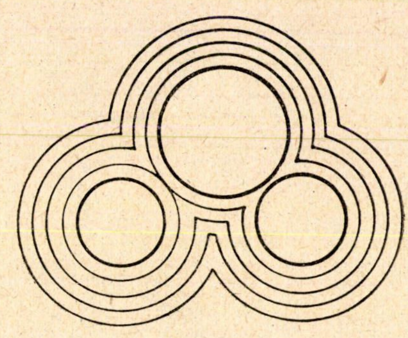
ahol ∇ *olyan körívháromszög területe, amit három egymást érintő* r *sugarú kör határol.*[20]

R- és r-re vonatkozó kikötés annyit jelent, hogy R, három egymást érintő kör hatványpontjának távolsága valamely r sugarú kör középpontjától.

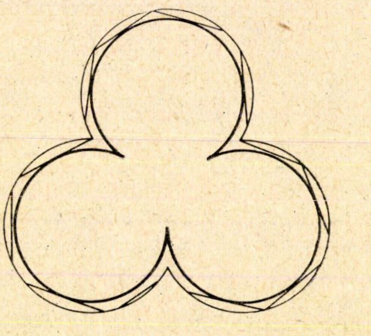
Bizonyítás. Ha P_2P_{n-1}-nek nincs közös belső pontja a k körrel, akkor a segédtétel — a HAJÓS-féle lemma értelmében — már magára a $P_2 \dots P_{n-1}$ sokszögre is teljesül. Ha P_2P_{n-1}-nek van közös belső pontja a k körrel, akkor a következőképpen



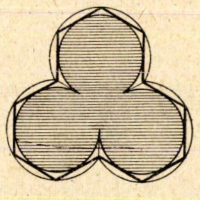
10. ábra



11. ábra



12. ábra



13. ábra

járunk el. A HAJÓS-féle lemma bizonyításában alkalmazott gondolatmenettel elérhetjük, hogy a $P_2P_3, P_3P_4, \dots, P_{n-2}P_{n-1}$ oldalak, legfeljebb egy kivételével, érintsék k-t és Π területe e változás közben ne növekedjék. Ugyancsak nem nő Π területe, ha a P_1P_2 és $P_{n-1}P_n$ oldalakat is a P_2 és P_{n-1} pontból a k körhöz húzott érintőkkel pótoljuk (7. ábra). Mivel az így kapott Π sokszög bármely oldala a k kör középpontjából legfeljebb $\frac{2\pi}{a}$ szög alatt látszik[21] és $a \geqq 5$, azért a Π sokszögnek van lega-

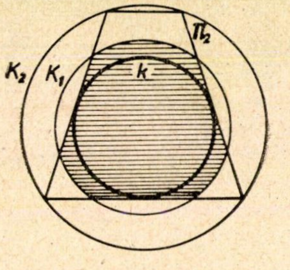
[20] Gömbön három egymást érintő egybevágó kör két körívháromszöget határol. Segédtételünkben a nem nagyobb körívháromszögre gondolunk. $a=6$ esetén, vagyis euklideszi síkon, $R=\frac{2\sqrt{3}}{3}r$ és $\nabla=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)r^2$.

[21] Egyenlőség akkor következik be, ha az oldal a k kört érinti.

lább négy pontja a K körön, amiből könnyen adódik a $\Pi > k + \nabla$ egyenlőtlenség. Ezzel 4. segédtételünk be van bizonyítva.

Dolgozatunkban körívsokszög alatt véges sok — nem szükségképpen összefüggő — kör egyesített halmazát értjük (9. ábra). A körívsokszög határát képező véges sok körívet a körívsokszög oldalainak nevezzük. Két körívsokszög „koncentrikus", ha a megfelelő oldalakat szolgáltató körök koncentrikusak, a megfelelő hatványvonalrendszerük pedig azonos (10., 11. ábra).

Megjegyzések. 1. A 2. és 3. segédtétel birtokában további általánosításokhoz jutunk, ha a k és K $(k < K)$ kör szerepét „koncentrikus" körívsokszögek veszik át. Ebben az esetben a K körívsokszögben szereplő körszeletekre a következő kikötéseket tesszük: 1. egyik szeletnek se legyen belső pontja sem más szelettel, sem pedig a k körívsokszöggel, 2. bármely körszeletet határoló húr végpontjai a K azonos oldalához illeszkedjék (12. ábra). A 13. ábra két „koncentrikus" körívsokszöghöz tartozó extremális területű, ill. kerületű sokszöget illusztrál.



14. ábra

2. $R_1 < R_2$ és $r < \min(R_1, R_2)$ esetén $H(r, R_2) > H(r, R_1)$. Ui. $H(r, R_2) > H(r, R_2) \cap K_1 > H(r, R_1)$, ahol K_1 jelenti az R_1 sugarú kört (14. ábra).

3. §. Mozaikok

Mozaikon a gömböt vagy a síkot teljesen kitöltő, egymásba nem nyúló sokszögeknek olyan halmazát értjük, amelyben minden sokszög oldalához egyetlen további sokszög oldala csatlakozik. Ha egy csúcspontba futó élek középpontjait az élek ciklikus sorrendjének megfelelően összekötjük, akkor egy sokszöget nyerünk, melyet a csúcsponthoz tartozó csúcsalakzatnak nevezünk.

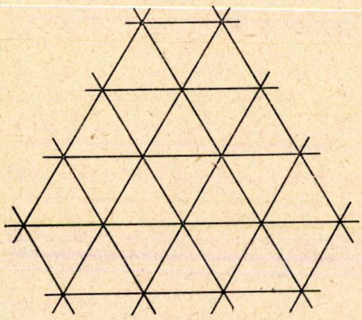
Dolgozatunkban szerepelni fognak a szabályos mozaikok, az ARCHIMÉDESZ-féle félig szabályos mozaikok és bizonyos szabálytalan mozaikok, amelyeket HAJÓS-féle mozaikoknak fogunk nevezni. Ezeket a mozaikokat a következőkben röviden ismertetjük.

Egy mozaik szabályos, ha mind lapjai, mind csúcsalakzatai szabályosak.[22] Ha a lapok p-szögek és a csúcsalakzata q-szögek, akkor a mozaikot a $\{p, q\}$ SCHLÄFLI-féle szimbólummal jelöljük. A 15., 16., ill. 17. ábra az euklideszi sík $\{3, 6\}$, $\{4,4\}$ ill. $\{6,3\}$ szimbólumú szabályos mozaikjait ábrázolja. A gömbfelület, ill. hiperbolikus sík szabályos mozaikjai közül csupán az $\{5, 3\}$-at és a $\{7,3\}$-at illusztráljuk (18., 19. ábra).

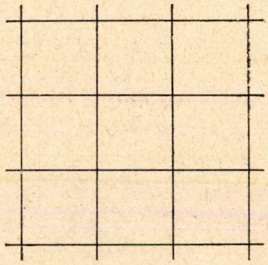
Egy mozaikot ARCHIMÉDESZ-féle félig szabályosnak mondunk, ha szabályos sokszögekből tevődik össze, csúcsalakzatai egybevágóak azonban nem szabályosak. Az archimédeszi mozaikok jelölésére az $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ szimbólumot használjuk, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jelenti az egy csúcspontban találkozó sokszögek oldalszámát a sokszögek ciklikus sorrendjében. Így pl. a 20., 21., 22., 23. és 24. ábra az euklideszi síkon a (3,6,3,6), (4,8,8), (3,12,12), (3,3,3,4,4) és a (3,3,4,3,4) mozaikot ábrázolja.[23]

[22] Nem nehéz kimutatni, hogy egy szabályos mozaik lapjai és csúcsalakzatai is egybevágók.

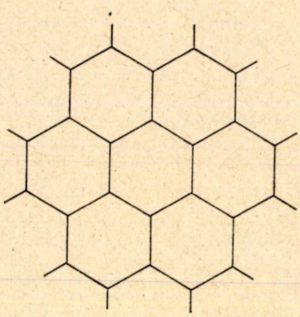
[23] Minden félig szabályos archimédeszi mozaikhoz hozzá lehet rendelni a duálját, amelynek csúcsalakzatai szabályosak és egybevágóak, de nem szabályos sokszögekből tevődik össze. Az archimédeszi félig szabályos mozaikok valamint duáljai képezik a félig szabályos mozaikokat.



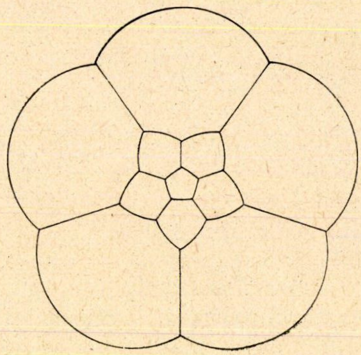
15. ábra



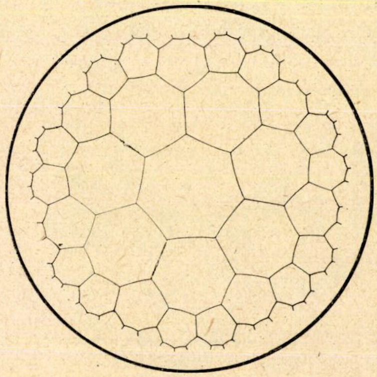
16. ábra



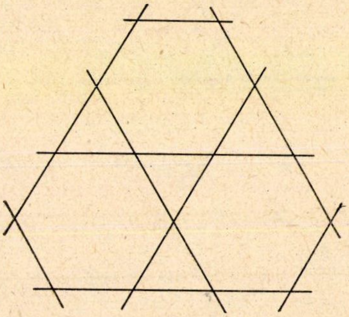
17. ábra



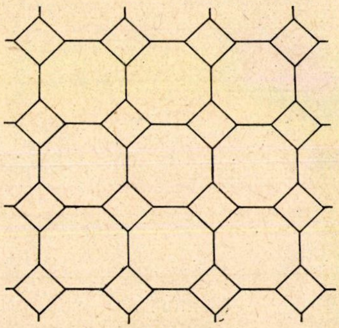
18. ábra



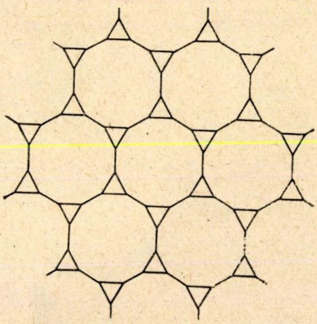
19. ábra



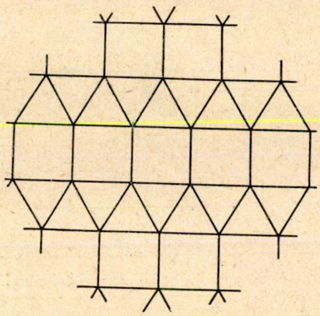
20. ábra



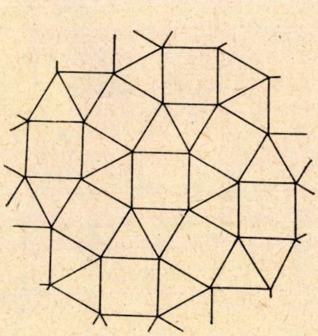
21. ábra



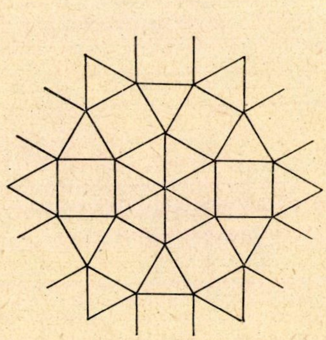
22. ábra



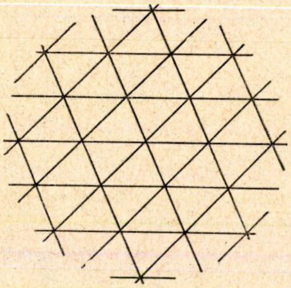
23. ábra



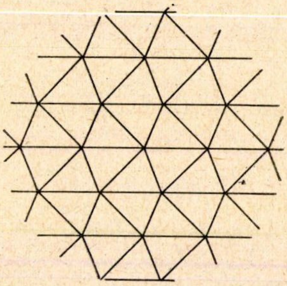
24. ábra



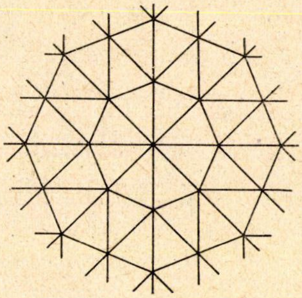
25. ábra



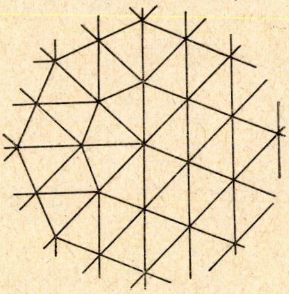
26. ábra



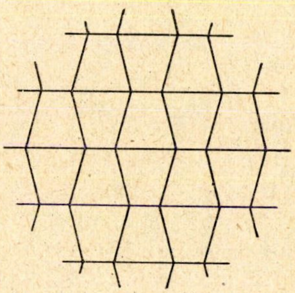
27. ábra



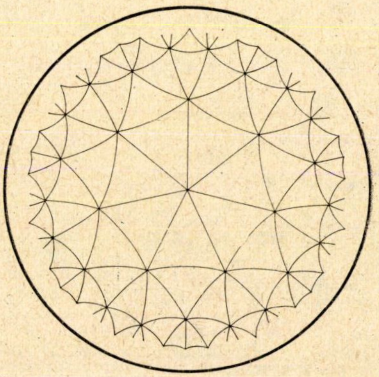
28. ábra



29. ábra

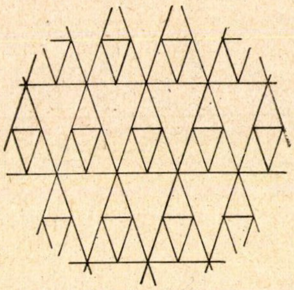


30. ábra

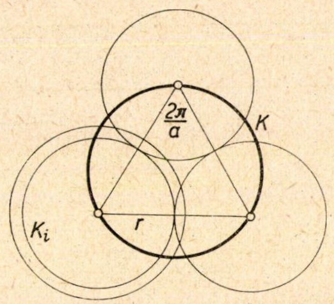


31. ábra

HAJÓS-féle mozaiknak nevezzünk olyan mozaikot, amely HAJÓS-féle sokszögekből tevődik össze.[24] Ilyen mozaikokat mutat a 25., 26., 27., 28., 29., 30. ábra az euklideszi síkon és a 31. ábra a hiperbolikus síkon.[25] A 25. ábra érdekessége, hogy a félig szabályos 24. ábránál szabályosabbnak tűnik. A 26—29. ábra ugyanazon egybevágó egyenlőszárú háromszögekből tevődik össze. A 30. ábra egybevágó négyszögekből áll.[26]



32. ábra



33. ábra

4. §. Tételek

A következőkben áttérünk a már szerepeltetett segédtételek alkalmazására, A diszkrét geometriában jól ismeretes THUE ([66], 1892), ill. KERSHNER ([45]. 1939) eredménye, mely szerint az euklideszi síkon — egymásba nem nyúló — egybevágó körök sűrűsége mindig $\leqq \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}9069\ldots$, ill. a síkot lefedő egybevágó körök sűrűsége $\geqq \frac{2\pi}{\sqrt{27}} = 1{,}209\ldots$. FEJES TÓTH [26], [27] 1953-ban — egybevágó körök kitöltési, ill. lefedési sűrűségére vonatkozó — analóg korlátokat adott gömbön és hiperbolikus síkon. FEJES TÓTH ezen eredményeit pontosan is megfogalmazzuk.

Az euklideszi-, ill. hiperbolikus síkot nulla, ill. negatív állandó görbületű felületnek nevezve, a körkitöltésre a következőképpen fogalmazható meg

FEJES TÓTH TÉTELE:[27] *Ha egy $\varkappa$ görbületű felületen legalább három egymásba*

24 Mivel minden szabályos sokszög egyben HAJÓS-féle sokszög is, ezért a HAJÓS-féle mozaikok magukba ölelik a szabályos-, az archimédeszi féle félig szabályos-, valamint a szabályos sokszögekből álló nem szabályos mozaikokat is (25. ábra).

25 Minden egyenlőszárú síkbeli háromszög nyilván HAJÓS-féle sokszög. A 32. ábra érdekessége, hogy csak látszólag HAJÓS-féle mozaik. Ui. az ábra nagy „háromszögei" lényegében hatszögek.

26 Egybevágó HAJÓS-féle ötszögekből az euklideszi síkon nem lehet mozaikot készíteni. Ui. a HAJÓS-féle ötszög valamennyi szöge tompaszög és egybevágó tompaszögű ötszögekből nem lehet mozaikot készíteni (ld. pl. BOLLOBÁS [8]).

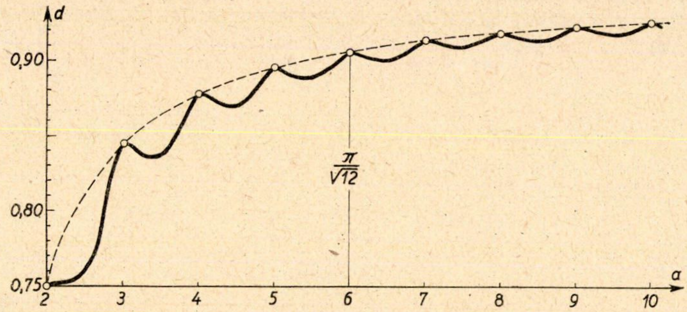
27 A lefedésre vonatkozó FEJES TÓTH-féle tétel a következő: Ha egy görbületű felületet legalább három r sugarú kör lefed, akkor ezen köröknek a felületre vonatkozó sűrűsége $\geqq D^*(A) = \left(\sqrt{12}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{A}-6\right)\Big/(A-6)$, $D^*(6)=\lim\limits_{A\to 6} D^*(A)=\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$, ahol $\mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{A}=\sqrt{3}\cos\sqrt{\varkappa}\,r$.

nem nyúló r sugarú kör van, akkor ezen köröknek a felületre vonatkozó δ sűrűsége

$$\delta \leqq d^*(a) = \frac{3\operatorname{cosec}\frac{\pi}{a} - 6}{a-6}, \quad d^*(6) = \lim_{A\to 6} d^*(a) = \frac{\pi}{\sqrt{12}},$$

ahol $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{a} = 2\cos\sqrt{\varkappa}r$.[28]

Ez a tétel pontos korlátot ad egybevágó körök kitöltési sűrűségére, ha a egész szám. A $d^*(a)$ korlát az a-nak monoton növekvő függvénye[29] (34. ábra).[30] Egybevágó körök kitöltési sűrűségére — a nem egész értékeire — élesebb felső korlátot ad az



34. ábra

I. TÉTEL: *Ha egy ϰ görbületű felületen legalább három egymásba nem nyúló r sugarú kör van, akkor ezen köröknek a felületre vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \leqq d(a) = \frac{3\operatorname{cosec}\frac{\pi}{a} - 6}{[a] - 3 - \frac{6}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left\{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{a}\operatorname{cotg}\left(1 - \frac{[a]}{a}\right)\pi\right\}}, \quad d(6) = \lim_{a\to 6} d(a) = \frac{\pi}{\sqrt{12}},$$

ahol cosec $\frac{\pi}{a} = 2\cos\sqrt{\varkappa}r$.

$d(a)$ szemléletes jelentése: Jelölje h_{r-p-q} három, r, p, q sugarú egymást kívülről érintő kör hatványpontjának távolságát az r sugarú $K(r)$ kör középpontjától. Ekkor

$$d(a) = \frac{K(r)}{H(r, h_{r-r-r})}.$$

[28] $d^*(a)$ szemléletes jelentése: Három egymást érintő r sugarú kör sűrűsége a három kör centrumai által meghatározott egyenlő oldalú háromszögben (33. ábra). $\frac{2\pi}{a}$ jelenti ezen egyenlőoldalú háromszög egyik szögét, s így a interpretálható mint azon egybevágó egymásba nem nyúló körök száma, melyek egy ezekkel egybevágó körhöz illeszthetők. Az euklideszi síkon $a=6$, gömbfelületen $a<6$, hiperbolikus síkon $a>6$.

Itt említjük meg, hogy tételünkben a körök számára tett kikötés lényeges. Ui. gömbön pl. két egymásba nem nyúló főkör sűrűsége $1(>d^*(a))$.

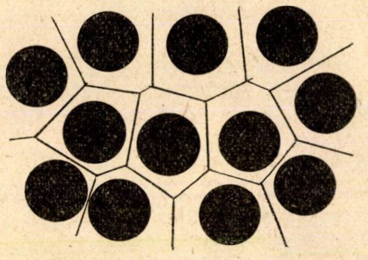
[29] KRAMMER [46].

[30] A $d(a)$ korlát grafikonunkban a vékonyan megrajzolt szaggatott görbe vonal.

Bizonyítás. Legyen $\{K_i\}$ a $\varkappa$ görbületű felületen r sugarú, egymásba nem nyúló köröknek egy telített rendszere.[31] Jelentse D_i a felület azon pontjainak halmazát, melyek a K_i kör középpontjától nincsenek távolabb mint a többi körközépponttól. Könnyen belátható, hogy a K_i körhöz ilyen módon hozzárendelt ún. DIRICHLET cella[32] („VORONOI-féle poligon"[33]) konvex sokszög.[34] Ezek összessége $\{D_i\}$, a felületet — a sokszögek határától eltekintve — egyrétűen és hézagmentesen lefedi (35. ábra).

Tételünk bizonyításához elegendő kimutatni, hogy a $\{K_i\}$ körrendszer sűrűsége bármely D_i DIRICHLET cellában $\leqq d(a)$, azaz $\frac{K_i}{D_i} \leqq d(a)$. Nyilván $D_i \subseteq D_i \cap K$, ahol K egy a K_i körrel koncentrikus kör, amelynek pontjaiból K_i 120° alatt látszik. A HAJÓS-féle lemma értelmében $D_i \cap K \geqq H(r, h_{r-r-r})$[35]. Ezzel az I. tétel be van bizonyítva.

Megjegyzések: 1. Azt állítottuk, hogy az I. tétel a FEJES TÓTH tételben szereplő $d^*(a)$ korlátot élesíti. Valóban bizonyítani fogjuk, hogy $d(a) \leqq d^*(a)$, ahol egyenlőség csupán egész számú a értékeire lép fel. A bizonyításhoz felhasználjuk $d^*(a)$, ill. $d(a)$ szemléletes jelentését. Ha a egész szám, akkor mint már említettük, nyilvánvaló az egyenlőség. Ha viszont a nem egész, akkor a HAJÓS-féle sokszögnek van olyan AB oldala, mely nem érinti az r sugarú kört (36. ábra). Ebben az esetben elég bizonyítani, hogy a K_i kör sűrűsége az ABO háromszögben kisebb mint ACO-ban, ahol O és AC a K_i kör középpontja, ill. egy érintője. Mivel az ACO háromszögben K_i sűrűsége éppen $d^*(a)$, nyilván elég bizonyítani, hogy a K_i kör sűrűsége AMO-ban kisebb, mint ANO-ban, ahol M és N jelöli AB, ill. AC felezőpontját. Legyen M^* az M pont tükörképe az AB egyenesre nézve, továbbá S az M^*O és AC egyenes metszéspontja. Világos, hogy az AM^*O háromszögben kisebb a K_i kör sűrűsége mint az ASO háromszögben. Másrészről könnyen belátható, hogy ASO-ban K_i sűrűsége kisebb, mint ANO-ban. Ezzel állításunkat igazoltuk.



35. ábra

2. Érdekes megjegyezni, hogy $d(a)$ — a $d^*(a)$ függvénnyel ellentétben — a-nak nem monoton függvénye (34. ábra, vastag vonal).

3. Az I. tétel bizonyításában nem használtuk ki, hogy a $K(h_{r-r-r})$ körben (röviden K) fellépő, D által meghatározott húrok felezőpontjai nem kerülhetnek

[31] Nyilván nem megy az általánosság rovására, ha bizonyításunkban telített körrendszerre szorítkozunk.

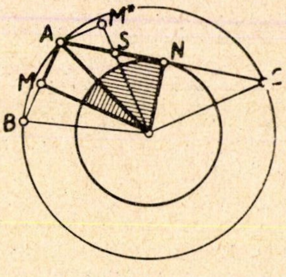
[32] DIRICHLET [12].

[33] l. pl. COXETER [10].

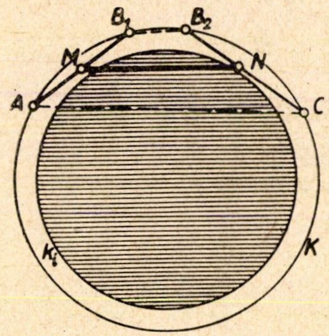
[34] Ahhoz, hogy D_i konvex sokszög elég belátni egyrészt végességét, másrészt, hogy véges sok oldala van. Valóban D_i minden pontja benne van a K_i körrel koncentrikus $2r$ sugarú K körben, különben $\{K_i\}$ nem lenne telített. Másrészt a K kört a D_i cellának csak véges sok oldala metszheti, mert ellentétes esetben megadható egy a K_i körrel koncentrikus véges sugarú kör, amelyben a sűrűség > 1, ami viszont lehetetlen.

[35] Könnyen belátható, hogy a D_i szögpontjai a K körön kívül vannak. A tétel bizonyításának alapgondolata, vagyis hogy D_i helyett elegendő a $D_i \cap K$ metszetet tekinteni FEJES TÓTH-tól ered (l. pl. [13], 1940, [15], 1943).

egymáshoz egy adott távolságnál közelebb.[36] Ennek a feltételnek a felhasználásával bizonyos esetekben elérhető, hogy a HAJÓS-féle $H(r, h_{r-r-r})$ sokszöget, röviden H egy nagyobb területű $H^* \prec D \cap K$ sokszöggel helyettesítjük, s így kisebb sűrűségkorláthoz jussunk. Tegyük fel először, hogy a $D \cap K$ metszet egyenesvonalú oldalainak száma kisebb, mint a HAJÓS-féle sokszög oldalainak n száma. Ekkor nyilván



36. ábra



37. ábra

fellép K-n olyan „szabad körív", mely legalább akkora mint H legkisebb oldalához tartozó körív. Ha viszont $D \cap K$ „oldalainak" száma legalább n, akkor van a K körön három A, B, C csúcspont, mely $\frac{4\pi}{n}$-nél nem nagyobb köríven fekszik. Ekkor viszont felhasználva, hogy AB és BC felezőpontjai egymástól egy bizonyos távolságnál nagyobb távolságra vannak, adódik, hogy — amennyiben a HAJÓS-féle H sokszög nem szabályos — a B pont szerepét a K körön fekvő két B_1 és B_2 pont veszi át. Fel kell tehát lépnie egy $\widehat{B_1B_2}$ szabad körívnek, amelynek hossza alulról megbecsülhető. A következő bekezdésben az euklideszi síkon ezt meg is tesszük. Miután szabad körívet biztosítottunk, alkalmazzuk 2. segédtételünket. Ezáltal olyan $H^*(r, h_{r-r-r}) \equiv H^*$ „sokszöghöz" jutunk, melynek egyik oldala a K körnek $\widehat{B_1B_2}$ íve, s így $H^* \succ H$.

Most pedig megvizsgáljuk az euklideszi síkon a $\widehat{B_1B_2}$ körív nagyságát. Legyen $B_1B_2 \doteq a$, $AC = b$, s jelölje M és N az AB, ill. CB húr felezőpontját (37. ábra). Az általánosság kedvéért tételezzük fel, hogy az AB_1, ill. CB_2 hatványvonalakat az r_i sugarú K_i kör, valamint az r_1 sugarú körök szolgáltatják. Ekkor könnyen belátható, hogy $MN \geqq \frac{2r_1 r_i}{r_1 + r_i}$, s így az ACB_2B_1 négyszögben $\frac{2r_1 r_i}{r_1 + r_i} \leqq \frac{a+b}{2}$. Mivel $\widehat{AC} \leqq \frac{4\pi}{n}$, azért $AC = b \leqq 2R \sin \frac{2\pi}{n}$, ahol $R \equiv h_{r-r-r}$; azért $a \geqq \frac{4r_1 r_i}{r_1 + r_i} - 2R \sin \frac{2\pi}{n}$, ahol egyenlőség csak szabályos HAJÓS-féle sokszög esetén lép fel.

Az I. tétel általánosítása a

II. TÉTEL: *Ha egy $\varkappa$ görbületű felületen legalább három egymásba nem nyúló kör van, melyek sugarai egy adott (a, b) intervallumba esnek, akkor a köröknek a*

[36] Ez a távolság euklideszi síkon kongruens r sugarú körök esetén éppen r.

felületre vonatkozó δ sűrűsége

$$\delta \leqq \sup_{a \leqq r \leqq b} d(a, r),$$

$$d(a, r) = \frac{2\pi(1 - \cos\sqrt{\varkappa}\, r)}{2\left[\frac{\pi}{\alpha}\right]\beta + \left(1 - \left[\frac{\pi}{\alpha}\right]\right)\pi + 2 \operatorname{arc\,tg}\left\{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\left(\pi - \left[\frac{\pi}{\alpha}\right]\alpha\right)\right\}},$$

ahol $\sin\alpha = \dfrac{\sin\sqrt{\varkappa}\, a}{\sin\sqrt{\varkappa}(a+r)}, \quad \cos\beta = \dfrac{\sin\sqrt{\varkappa}\, a \cos\sqrt{\varkappa}\, r}{\sin\sqrt{\varkappa}(a+r)}.$

$d(a,r)$ szemléletes jelentése:

$$d(a, r) = \frac{K(r)}{H(r, h_{r-a-a})}.$$

Bizonyítás. Az I. tétel bizonyításához hasonlóan járunk el. Legyen a $\varkappa$ görbületű felületen $\{K\}$ egy — legalább három egymásba nem nyúló körből álló — telített körrendszer, melynek sugarai egy adott (a, b) intervallumba esnek. Jelentse D a felület azon pontjainak halmazát, amelyekből a K körhöz nem húzható hosszabb érintő, mint a körrendszer többi köréhez.[37] Könnyen belátható, hogy a K körhöz ilyen módon hozzárendelt cella „Dirichlet cella" konvex sokszög.[38] Ezek összessége $\{D\}$, a felületet — a sokszögek határától eltekintve — egyrétűen és hézagmentesen lefedi. Tételünk egyszerű következménye annak, hogy a D cellában a K kör sűrűsége $\dfrac{K}{D} \leqq \dfrac{K}{K \cap K(h_{r-a-a})}$.

Megjegyzések. 1. A HAJÓS-féle lemmához fűzött 2. megjegyzésünk értelmében, az euklideszi síkon a II. tételben szereplő korlát a $d(a, b)$ értéket veszi fel. Ui. ennek belátására alkalmazzunk egy olyan hasonlósági transzformációt, mely egy $r \in (a, b)$ sugarú kört b sugarú körbe visz át és vegyük figyelembe, hogy a körhöz tartozó cellában a körsűrűség hasonlósági transzformációval szemben nem változik.

2. A II. tétel különösen gömbön, ill. hiperbolikus síkon érdemel figyelmet, ahol eddig — inkongruens körök sűrűségére vonatkozólag — semmilyen eredmény sem volt ismeretes. Az euklideszi síkon e tétel kevesebbet mond, mint a FEJES TÓTH—

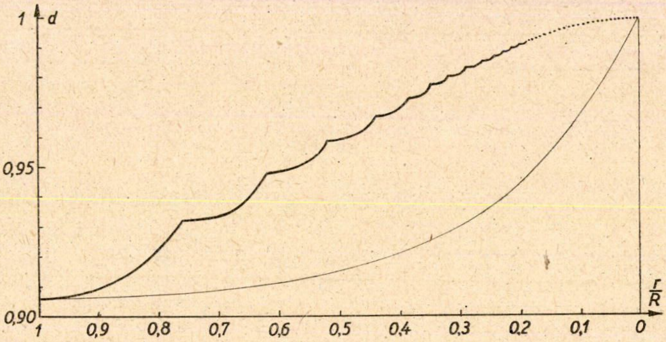
[37] Azon pontok, amelyekből két egymásba nem nyúló körhöz egyenlő érintők húzhatók „egyenesen" (gömbön főkör) vannak (l. pl. Н. М. Несторович, Геометрические построения в плоскости Лобаческого, Москва- Ленинград,) 1951, 108—109.

[38] Megemlítjük, hogy az $r \in (a, b)$ sugarú O középpontú K körhöz tartozó D „DIRICHLET cella" bármely H szögpontjára teljesül $h_{r-a-a} < OH$. Ui. legyenek a H szögpontot hatványpont szolgáltató K, K_1, K_2 körök sugarai r, r_1, r_2. Ha a K_1, K_2 kör közül valamelyik nem érinti a K kört, akkor e körnek a H pont körüli elforgatásával elérhető, hogy e kör érintse a K kört, a három kör pedig továbbra is egymásba nem nyúló körhármast alkosson. E közben a három kör hatványpontja H változatlanul marad. Feltehetjük tehát, hogy K_1 és K_2 érintik a K kört. Ugyancsak nem változik H, ha a K_1, K_2 köröket olyan a sugarú körökkel pótoljuk, melyek a K_1, K_2 körökben helyezkednek el és a K kört érintik. Jelöljük ezeket a köröket továbbra is K_1, K_2-vel. Elegendő tehát arra az esetre szorítkozni, midőn az r sugarú K kört két a sugarú K_1, K_2 kör érinti. Ha K_1, K_2 nem érintik egymást, akkor ezeket a köröket az O pont körül elforgatva elérhető, hogy OH csökkenjen. OH legkisebb értékét akkor kapjuk, ha K_1, K_2 érinti egymást és ekkor $OH = h_{r-a-a}$.

MOLNÁR—FLORIAN-féle tétel,[39] mely igen jó felső korlátot ad δ sűrűségre.[40] A 38. ábrán látjuk a II. tételünk által szolgáltatott korlátot az euklideszi síkra vonatkozólag vastag vonal, valamint a FEJES TÓTH—MOLNÁR—FLORIAN-féle korlátot (vékony vonal).

Az előbbi két tétel bizonyításának mintájára könnyen bizonyítható a következő két tétel is.

III. TÉTEL[41]: *Ha egy $\varkappa$ görbületű felületen legalább három egymásba nem nyúló kör van, melyek sugarai $r_1, r_2, \ldots, r_m$ és az ezekhez tartozó körök $n_1 : n_2 : \ldots : n_m$*



38. ábra

arányban vannak, akkor ezeknek a köröknek a felületre vonatkozó δ sűrűsége

$$\delta \leqq \frac{2\pi \sum_{i=1}^{m} n_i (1 - \cos\sqrt{\varkappa}\, r_i)}{\sum_{i=1}^{m} \left(n_i \left(2\left[\frac{\pi}{\alpha}\right]\beta + \left(1 - \left[\frac{\pi}{\alpha}\right]\right)\pi + 2 \operatorname{arc\,tg}\left\{ \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\left(\pi - \left[\frac{\pi}{\alpha}\right]\alpha\right)\right\}\right)\right)},$$

ahol $\sin\alpha = \dfrac{\sin\sqrt{\varkappa}\, r_1}{\sin\sqrt{\varkappa}(r_1 + r_i)}$, $\cos\beta = \dfrac{\sin\sqrt{\varkappa}\, r_1 \cos\sqrt{\varkappa}\, r_i}{\sin\sqrt{\varkappa}(r_1 + r_i)}$, és $r_1 \leqq r_i$ $(i = 2, 3, \ldots, m)$.

Bizonyos esetekben ez a III. tétel a körsűrűségre jobb felsőkorlátot ad, mint a már említett FEJES TÓTH—MOLNÁR—FLORIAN-féle tétel. Ilyen eset pl. a következő:

[39] l. FEJES TÓTH—MOLNÁR [32] és FLORIAN [36].

[40] MOLNÁR [55], ill. HEPPES—MOLNÁR [43].

[41] Ebben a tételben, valamint az V. tételben, a körsűrűségre a következő definíciót használjuk. Legyen O az euklideszi-, ill. hiperbolikus sík egy rögzített pontja és $K(R)$ egy R sugarú O középpontú köre. Ekkor

$$\delta = \overline{\lim} \frac{\sum_R K}{\sum_R D},$$

ahol D jelenti a $\{K\}$ körrendszer K köréhez tartozó „Dirichlet cellát", az összegezést pedig a $K(R)$ körben levő K körökre kell kiterjeszteni. A körök aránya alatt a $K(R)$ körben levő körök arányának limesze értendő.

Tekintsük az euklideszi síkon azon körrendszert, amelynek hatványvonalas hálózata a félig szabályos (4,8,8) szimbólumú archimédeszi mozaikot szolgáltatja (52. ábra). Ebben a körrendszerben a körök r, ill. $(\sqrt{2}-1)r$ sugarúak és kitöltési sűrűségük 0,92015....[42]. Erre a körrendszerre vonatkozó FEJES TÓTH—MOLNÁR—FLORIAN-féle korlát 0,9208.... Ha viszont tudjuk, hogy a fenti körök nem egyenlő arányban vannak, hanem a $(\sqrt{2}-1)r$ sugarú körökből legalább 18-szor több van, mint az r sugarúakból, akkor a III. tételünk szerint e körrendszer sűrűsége $\leqq 0{,}9200\ldots$, azaz még 0,92015...-nél is kisebb.

Érdekes problémákhoz és változatos extremális alakzatokhoz jutunk, ha úgy igyekszünk a síkon mennél több kört elhelyezni, hogy a körrendszer bizonyos értelemben elég tágas legyen. Válasszuk ki a körrendszer egy O középpontú K körét és tekintsük DIRICHLET cellájának az O-hoz legközelebb eső C csúcspontját. Az OC távolságot a K kör tágasságának nevezzük.[43]

IV. TÉTEL: *Ha egy $\varkappa$ görbületű felületen legalább három egymásba nem nyúló kör van, melyek sugarai az (a, b) intervallum értékei, és ha a körrendszer egy tetszés szerinti $r \in (a, b)$ sugarú körének tágassága legalább $\tau = \tau(r)$, akkor a körrendszernek a felületre vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \leqq \sup_{a \leqq r \leqq b} \frac{2\pi(1-\cos\sqrt{\varkappa}\, r)}{H(r, \tau)}.$$

Ebben a tételben szélső értéket képviselnek pl. az összes egybevágó körökből álló körrendszerek, melyeknek hatványvonalas hálózata szabályos (pl. 39., 40., 41., 42., 43. ábra) vagy HAJÓS-féle mozaikot szolgáltat (pl. 44., 45., 46., 47., 48., 49. ábra). A 46., 47., 48. és 49. ábra egyben illusztrálja, hogy a maximális sűrűséget több különböző körelhelyezés is elérheti.[44]

Képzeljük el, hogy rendelkezésünkre áll az euklideszi síkon egynél nem nagyobb sugarú köröknek egy kimeríthetetlen készlete. Ilyen körök segítségével ki kell tölteni a síkot legsűrűbben úgy, hogy a körök tágassága legalább $\sqrt{2}$ legyen. Az előbbi tételünk, valamint HAJÓS-féle lemmához fűzött 2. megjegyzésünk segítségével könnyen belátható, hogy a legjobb körrendszer csupán egység sugarú körökből áll, melyek középpontjai négyzetes rácsot alkotnak (40. ábra). Tehát hiába állt rendelkezésünkre a sugaraknak egy egész intervalluma, a legjobb elrendezésben csak egyetlen sugárérték jut szerephez.

Az utolsó 11 ábra (39—49. ábra) extremális körrendszereket képvisel a következő korolláriumban is.

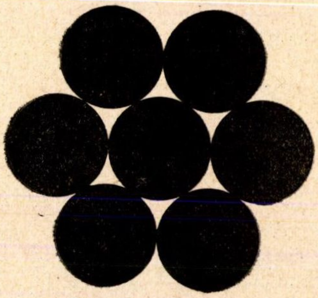
1. KOROLLÁRIUM: *Ha egy $\varkappa$ görbületű felületen legalább három egymásba nem nyúló r sugarú kör van, úgy hogy bármely három kör középpontján átmenő kör sugara legalább a, akkor a körrendszernek a felületre vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \leqq \frac{2\pi(1-\cos\sqrt{\varkappa}\, r)}{H(r, a)}.$$

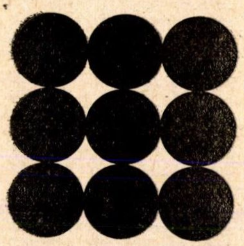
[42] Sejthető, hogy a kétfajta kör mellett ez a legnagyobb elérhető kitöltési sűrűség (l. FEJES TÓTH [25], 78. o.).

[43] A tágasság elnevezés FEJES TÓTH-tól ered.

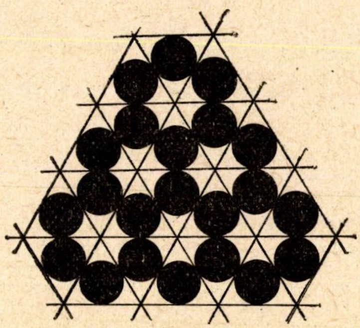
[44] Az itt szereplő négy ábra csak érzékelteti a többértelműséget de nem meríti ki. Ui. már az első két ábrából (45., 46. ábra) végtelen sok további extremális körrendszer rakható össze.



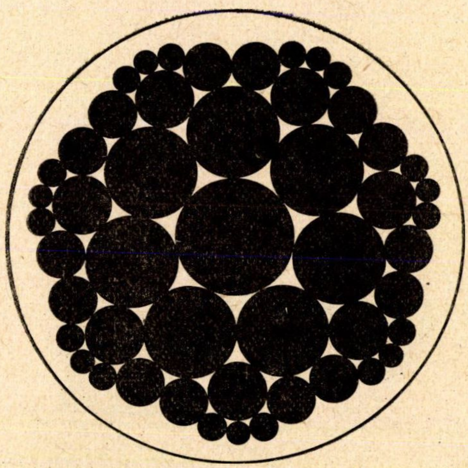
39. ábra



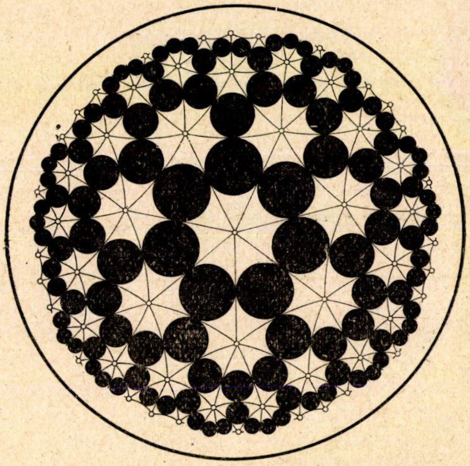
40. ábra



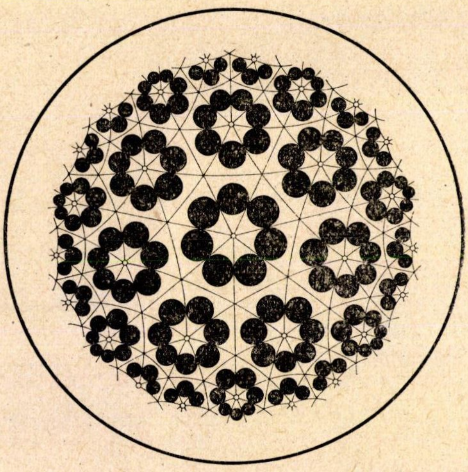
41. ábra



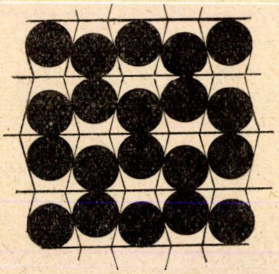
42. ábra



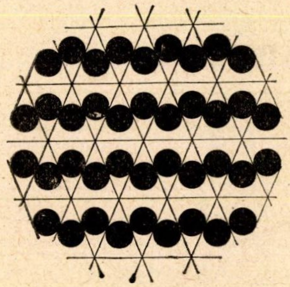
43. ábra



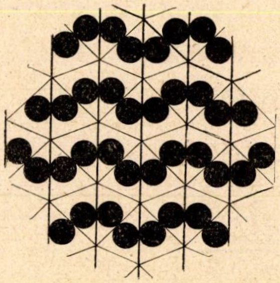
44. ábra



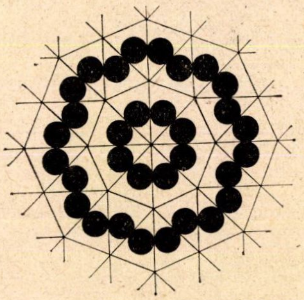
45. ábra



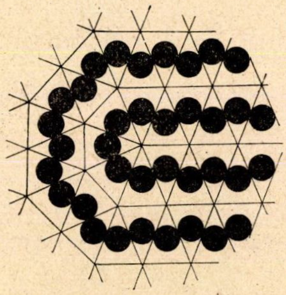
46. ábra



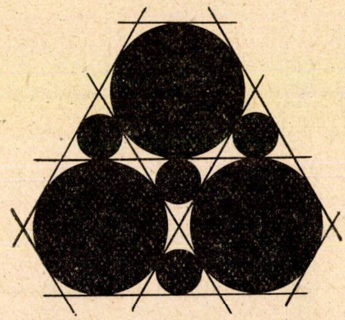
47. ábra



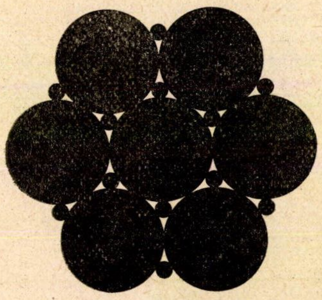
48. ábra



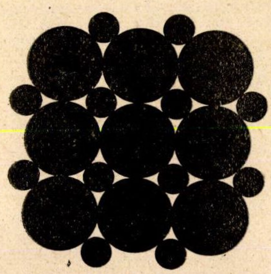
49. ábra



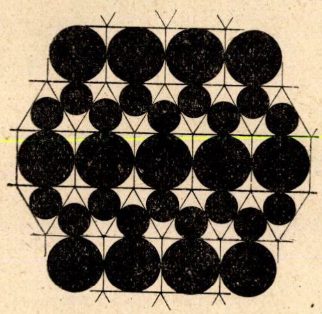
50. ábra



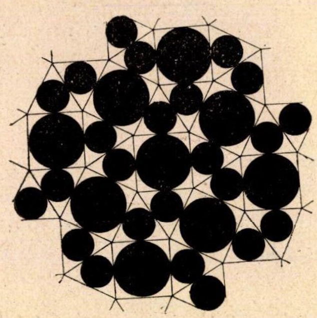
51. ábra



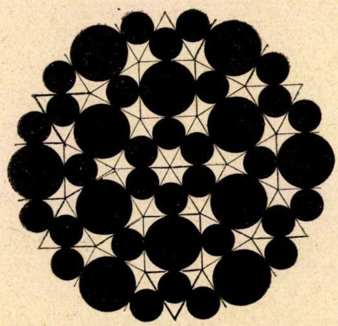
52. ábra



53. ábra



54. ábra

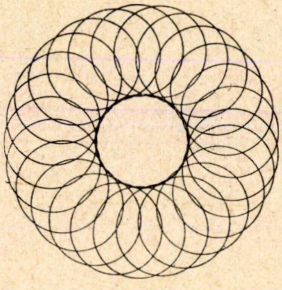


55. ábra

Ugyancsak könnyen belátható a következő

V. TÉTEL: *Ha egy $\varkappa$ görbületű felületen legalább három egymásba nem nyúló $r_1, r_2, \ldots, r_m$ sugarú kör van $n_1:n_2:\ldots:n_n$ arányban és ha a körrendszer r_i sugarú körének tágassága legalább τ_i, akkor a körrendszernek a felületre vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \leqq \frac{2\pi \sum_{i=1}^{m} n_i(1-\cos\sqrt{\varkappa}\,r_i)}{\sum_{i=1}^{m} n_i H(r_i,\tau_i)}.$$

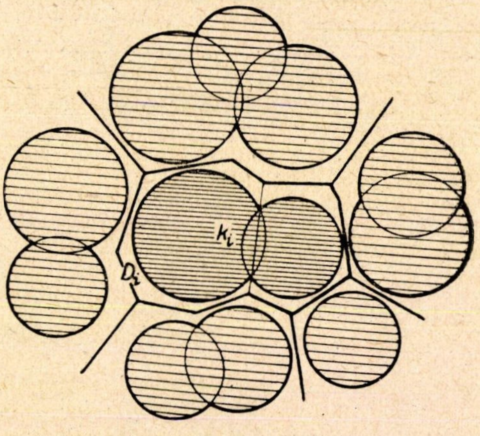


56. ábra

Nyilván ez a tétel pontos korlátot szolgáltat a sűrűségre abban az esetben, ha a körrendszerhez tartozó hatványvonalas hálózat szabályos- vagy féligszabályos mozaikot szolgáltat (az 50., 51., 52., 53. és 54. ábra félig szabályos hálózattal rendelkező körrendszereket ábrázol). Az 55. ábra olyan szélső értéket képviselő körrendszert ábrázol az euklideszi síkon, amelynek hatványvonalas hálózata HAJÓS-féle mozaikot alkot.[45]

Megjegyzések: 1. A körkitöltések esetén alkalmazott módszerek, körlefedéseknél nem vezetnek eredményhez, hiszen itt a hatványvonalas felbontás révén adódott DIRICHLET cellában a lefedési sűrűség 1-hez tetszőleges közeli értéket vehet fel (56. ábra).

2. Az I—V. tételhez hasonló további tételek mondhatók ki, ha a $\{K\}$ körrendszert körívsokszögrendszer váltja fel.[46] Egy $\{K\}$ körívsokszögrendszer kitöltési sűrűségére vonatkozó eredményekhez a következőképpen juthatunk el. Tekintsük a $\{K\}$ körívsokszögrendszer helyett azt a $\{K^*\}$ körrendszert, mely tartalmazza mindazokat a köröket, melyek ívet szolgáltatnak a $\{K\}$ rendszerben. Bontsuk fel az állandó görbületű felületet a $\{K^*\}$ körrendszer hatványvonalai segítségével $\{D^*\}$ „DIRICHLET cellákra". Egy K körívsokszöghöz tartozó D cellát a K körívsokszög határát képező K^* körökhöz tartozó D^* cellák egyesítése adja (57. ábra). Az így nyert D „Dirichlet cella" általában nem összefüggő, sőt a komponensek többszörösen összefüggő tartományok lehetnek. D területének megbecslésére a HAJÓS-féle lemmához fűzött 1. megjegyzésünket használjuk fel. Tekintsük pl. az euklideszi

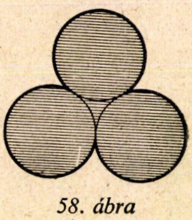


57. ábra

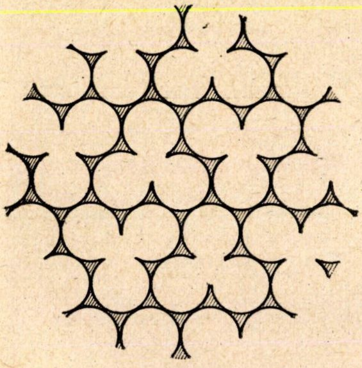
[45] Könnyen belátható, hogy az 53., 54. és 55. ábrán szereplő körrendszerek sűrűsége azonos.

[46] B. SEGRE egy — M. ROSATTI által felvetett problémához fűzött — észrevétele vezetett a körívsokszögekre vonatkozó eredményeimhez.

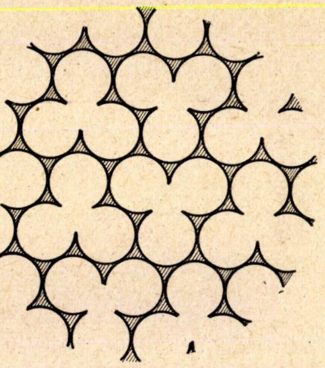
síkon egybevágó egymásba nem nyúló szabályos körívháromszögekből álló $\{K\}$ rendszert. Ha a K körívháromszög oldala $\frac{4\pi}{3}$ (58. ábra, „lóhere"), akkor — könnyen belátható, hogy — az ehhez tartozó D cella területe, egy r sugarú kör köré írt szabályos hatszög területének legalább háromszorosa (13. ábra). Így tehát a D cellában K sűrűsége $\leq \frac{5\pi\sqrt{3}+6}{36} = 0{,}924\ldots$. Az 59. és 60. ábránk ilyen sűrűséget szolgáltató extremális körívháromszögrendszereket illusztrál. Hasonló módon adható bármely $\{K\}$ körívsokszögrendszer esetén a δ kitöltési sűrűségre egy felső korlát, mely sok esetben pontos. Így pl. ha az I. tétel körívsokszögekre vonatkozó analogonját tekintjük, akkor ez pontos sűrűségbecslést ad pl. a következő esetekben: Tekintsük az állandó görbületű felületen valamilyen kongruens körökből álló legsűrűbb elhelyezést. Ebből ragadjunk ki olyan K körívsokszöget alkotó körhalmazt — pontosabban egy körhalmazt, melyhez hozzávesszük még bármely érintő körhármas által alkotott körívháromszöget — melyhez tartozó általánosított HAJÓS-féle sokszöggel a felület hézagmentesen kirakható (pl. 61., 62., 63. és 64. ábra).[47] Ilyen típusú — egybevágó K körívsokszögekből álló — rendszerek mind extremális körívsokszögrendszerekhez vezetnek. Egy más típusú extremális alakzathoz jutunk, ha pl. olyan körrendszerekből indulunk ki, mely középpontjai félig szabályos mozaiknak



58. ábra



59. ábra



60. ábra

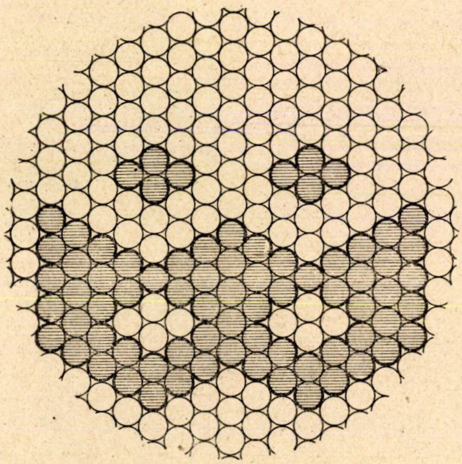
csúcspontjai és van a köröknek olyan részhalmaza, amelyhez tartozó általánosított HAJÓS-féle sokszöggel a felület hézagmentesen kirakható.[48] Gömbfelületen pl. ilyen körrendszerhez vezet a (3,3,3,3,4) (65. ábra), ill. a (3,3,3,3,5) (66. ábra) mozaik, mely esetben — megfelelő nagyságú egybevágó — szabályos körívnégyszöggel (67. ábra), ill. szabályos körívötszöggel (68. ábra) úgy tölthető ki a gömbfelület legsűrűbb-

[47] A 62. és 63. ábrához tartozó extremális alakzatok sűrűsége azonos. Az ezekhez tartozó HAJÓS-féle sokszögek vegyes kombinációiból újabb, azonos sűrűségű, extremális alakzatokhoz lehet jutni.

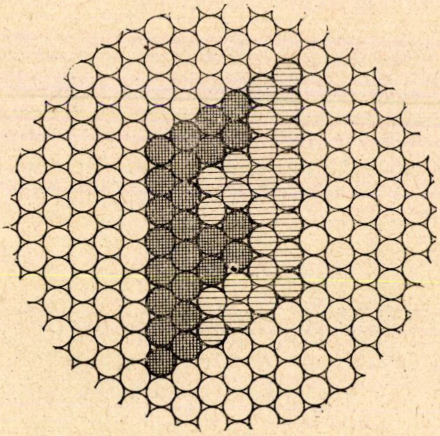
[48] Pontosabban a körökhöz hozzá kell még venni az érintő körök által határolt körívsokszöget (pl. 67., 68. ábra).

ben, hogy a körívsokszögek kerületét szolgáltató körök középpontjai a már említett szimbólumú félig szabályos mozaik csúcspontjai.

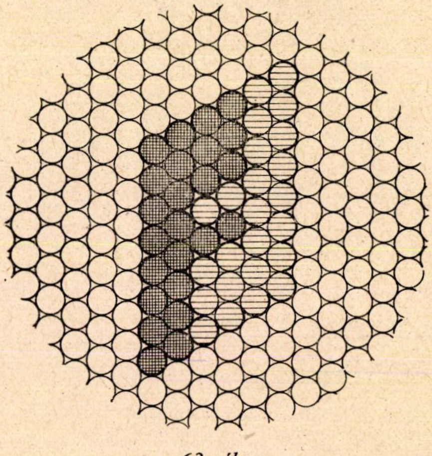
Érdemes megjegyezni, hogy a körívsokszögek szerepét — bizonyos feltételeknek eleget tevő — sokszögek vehetik át. A 69., ill. 70. ábrán egyenlőoldalú háromszögrendszer váltja fel az 59., ill. 60. ábrán szereplő „lóhere" rendszert. A 69. és 70.



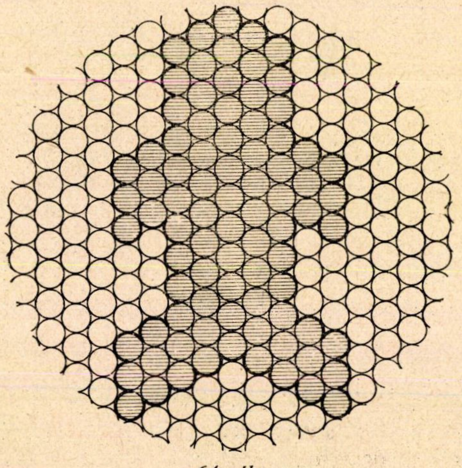
61. ábra



62. ábra



63. ábra



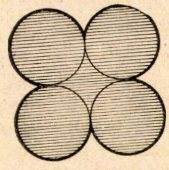
64. ábra

ábra ugyancsak extremális alakzatot képviselnek, ha az egymásba nem nyúló háromszögekre még azt a kikötést tesszük, hogy a csúcspontok egymástól oldalnyi távolságnál kisebb távolságra nem kerülhetnek.[49]

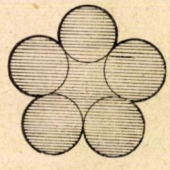
[49] A háromszögrendszer csúcspontjaira tett további kikötéssel elérhető, hogy az extremális alakzatban a háromszögek a (3,12,12) mozaik háromszögeit alkossák (71. ábra).

Most pedig áttérünk a SEGRE—MAHLER-féle tétel általánosításaira.[50]
B. SEGRE és K. MAHLER-től származik a következő tétel:

Ha egy euklideszi sokszögben, melynek szögei $\frac{2\pi}{3}$*-nál nem nagyobbak, egymásba nem nyúló egybevágó körök vannak elhelyezve, akkor a köröknek a sokszögre vonatkozó sűrűsége* $\leqq \frac{2}{\sqrt{12}} = 0{,}9069\ldots$



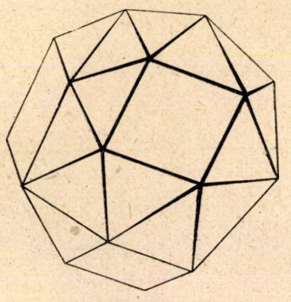
65. ábra



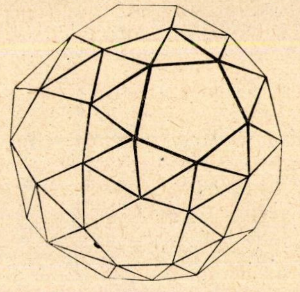
66. ábra

E tétel eddigi általánosításai közül csupán a következőt említjük: Helyezzünk el egy konvex euklideszi vagy gömbi tartományban legalább két egymásba nem nyúló kongruens kört. Akkor a körök sűrűsége a tartományra vonatkozóan mindig $< \frac{\pi}{\sqrt{12}}$.[51]

Az ebben a tételben felvetett kérdés a hiperbolikus síkon érdektelen. Valóban a hiperbolikus síkon két egymást érintő r sugarú kör konvex burkában a két kör sűrűsége 1-hez tart, ha $r \to \infty$ (72. ábra).



67. ábra



68. ábra

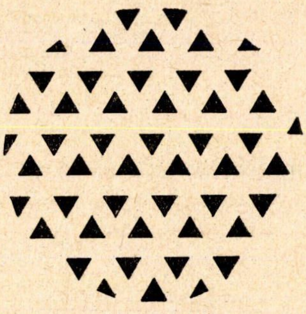
A következő négy tétel (VI., VII., VIII., IX.) a SEGRE—MAHLER-féle tétel olyan általánosításai, melyek hiperbolikus síkon is érvényesek.[52] A tartomány, amelyben a köröket elhelyezzük, az állandó görbületű felület olyan S sokszöge, amelynek minden szöge $\leqq \frac{2\pi}{3}$. A körrendszer sűrűségére felső korlátot adunk abban az esetben, ha 1. a körök egybevágóak, 2. a körök sugarai egyenként ismertek, 3. a sugarak egy adott intervallumba esnek, 4. n fajta adott sugarú kör van.

50 SEGRE—MAHLER [64].
51 l. FEJES TÓTH [25], ill. MOLNÁR [50].
52 Hiperbolikus síkon ezek az első tételek, melyek körelhelyezési sűrűségre vonatkoznak korlátos tartományok esetén (l. MOLNÁR [57]).

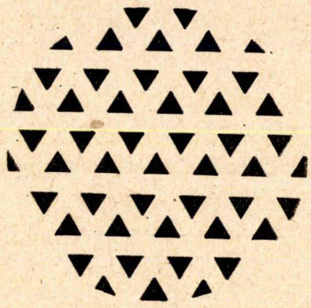
VI. TÉTEL: *Ha egy $\varkappa$ görbületű felület egy sokszögében, melynek minden szöge $\leqq \frac{2\pi}{3}$, egymásba nem nyúló r sugarú körök vannak elhelyezve, akkor a körrendszer δ sűrűsége*

$$\delta \leqq d(a) = \frac{3 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{a} - 6}{[a] - 3 - \frac{6}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \left\{ \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{a} \operatorname{cotg} \left(1 - \frac{[a]}{a} \right) \pi \right\}},$$

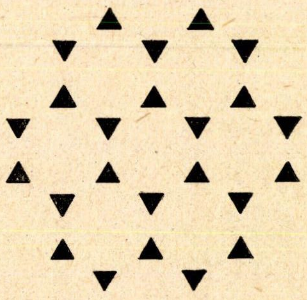
ahol $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{a} = 2 \cos \sqrt{\varkappa} r$.[53]



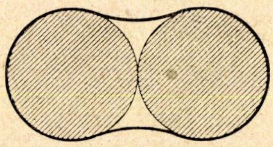
69. ábra



70. ábra



71. ábra

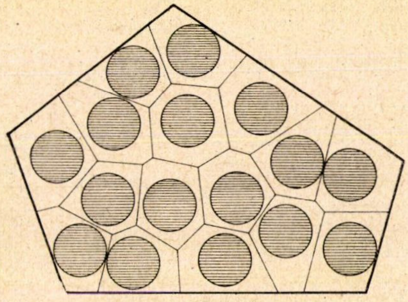


72. ábra

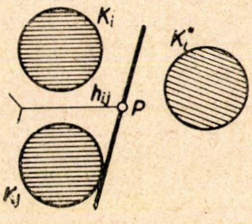
Bizonyítás. Legyen S a tételben szereplő sokszög, $\{K_i\}$ a benne elhelyezett körök rendszere és D_i a K_i körhöz tartozó DIRICHLET cellának S-sel való metszete. A $\{K_i\}$ körrendszerhez ilyen módon rendelt $\{D_i\}$ sokszögek az S sokszöget hézagmentesen és átfedés nélkül lefedik (73. ábra). Tételünk bizonyításához elegendő belátni, hogy tetszőleges D_i sokszög esetén $\frac{K_i}{D_i} \leqq d(a)$. Először belátjuk, hogy egy D_i sokszög tetszőleges P csúcspontja nincsen a K_i körrel koncentrikus h_{r-r-r} sugarú

[53] Ebben a tételben ugyanazon $d(a)$ korlát szerepel, mint az I. tételben.

K kör belsejében. Ha P az S sokszögnek egy csúcspontja, akkor — a sokszögre tett kikötésünk miatt — nyilván nem lehet a K kör belső pontja. Előfordulhat azonban, hogy P a K_i, K_j körök egy h_{ij} hatványvonalának metszése az S sokszög egy



73. ábra

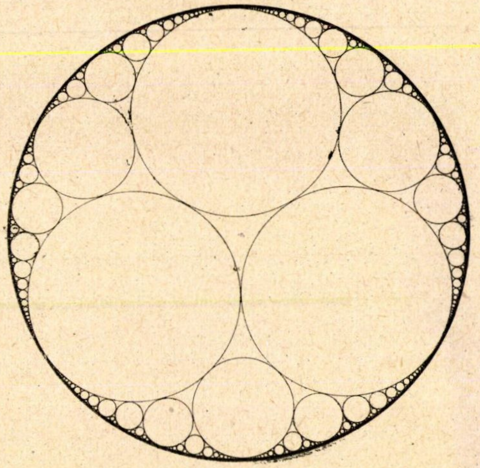


74. ábra

oldalával (74. ábra). Ebben az esetben tekintjük a K_i kör K_i^* tükörképét az S sokszögnek azon oldalára, mely tartalmazza a P pontot. Ekkor P nyilván a K_i, K_i^*, K_j körök hatványpontja, azaz P a K körnek nyilván nem belső pontja. Triviális az is, hogy $D_i \supseteq D_i \cap K$. Másrészt a HAJÓS-féle lemma értelmében $D_i \cap K \geqq H$, ahol H jelenti a K_i, K koncentrikus körökhöz tartozó HAJÓS-féle sokszöget. Így tehát $\frac{K_i}{D_i} \leqq \frac{K_i}{H} = d(a)$. Ezzel tételünket bizonyítottuk.

Minthogy $d(a) \leqq d^*(a) \leqq \frac{3}{\pi}$,[54] adódik a következő két korollárium.

2. KOROLLÁRIUM: *Ha egy $\varkappa$ görbületű felületnek egy sokszögében, melynek minden szöge $\leqq \frac{2\pi}{3}$, egymásba nem nyúló egybevágó körök vannak elhelyezve, akkor a körrendszernek a sokszögre vonatkozó sűrűsége $< \frac{3}{\pi}$.*



75. ábra

3. KOROLLÁRIUM: *Ha a hiperbolikus sík egy aszimptotikus sokszögében egymásba nem nyúló egybevágó körök vannak elhelyezve, akkor a körrendszernek a sokszögre vonatkozó sűrűsége $< \frac{3}{\pi}$.*

A VI. tételhez hasonlóan bizonyítható a következő két tétel is.

[54] $\frac{3}{\pi}$ a paraciklusoknak legnagyobb kitöltési sűrűsége (75. ábra, l. FEJES TÓTH [28]).

VII. TÉTEL:[55] *Ha egy $\varkappa$ görbületű felületnek egy sokszöge, melynek minden szöge* $\leqq \frac{2\pi}{3}$, *tartalmaz n egymásba nem nyúló* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *sugarú kört, akkor a körrendszernek a sokszögre vonatkozó* δ *sűrűsége*

$$\delta \leqq \frac{2\pi \sum\limits_{i=1}^{n} (1-\cos \sqrt{\varkappa} r_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(2\left[\frac{\pi}{\alpha}\right]\beta + \left(1-\left[\frac{\pi}{\alpha}\right]\right)\pi + 2 \operatorname{arc\,tg}\left\{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\left(\pi - \left[\frac{\pi}{\alpha}\right]\alpha\right)\right\}\right)},$$

ahol $\sin\alpha = \frac{\sin \sqrt{\varkappa} r}{\sin \sqrt{\varkappa}(r+r_i)}$, $\cos\beta = \frac{\sin\sqrt{\varkappa} r \cos \sqrt{\varkappa} r_i}{\sin \sqrt{\varkappa}(r+r_i)}$, és $r = \min(r_1, \ldots, r_n)$.

VIII. TÉTEL: *Ha egy $\varkappa$ görbületű felületnek egy sokszögében, melynek minden szöge* $\leqq \frac{2\pi}{3}$, *egymásba nem nyúló körök vannak elhelyezve, melyek sugarai az* (a, b) *intervallumba esnek, akkor a körrendszernek a sokszögre vonatkozó* δ *sűrűsége*

$$\delta \leqq \sup_{a \leqq r \leqq b} \frac{2\pi(1-\cos\sqrt{\varkappa} r)}{2\left[\frac{\pi}{\alpha}\right]\beta + \left(1-\left[\frac{\pi}{\alpha}\right]\right)\pi + 2 \operatorname{arc\,tg}\left\{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{cotg}\left(\pi - \left[\frac{\pi}{\alpha}\right]\alpha\right)\right\}},$$

ahol $\sin\alpha = \frac{\sin\sqrt{\varkappa} a}{\sin\sqrt{\varkappa}(a+r)}$, $\cos\beta = \frac{\sin\sqrt{\varkappa} a \cos\sqrt{\varkappa} r}{\sin\sqrt{\varkappa}(a+r)}$.

A VI. tétel birtokában — követve FEJES TÓTH egy tételének indukciós bizonyításában alkalmazott gondolatmenetét[56] — könnyen bizonyítható a

IX. TÉTEL: *Ha egy $\varkappa$ görbületű felület egy sokszögében, melynek minden szöge* $\leqq \frac{2\pi}{3}$, *n fajta* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *sugarú egymásba nem nyúló kör fekszik, akkor a köröknek a sokszögre vonatkozó* δ *sűrűsége*

$$\delta \leqq 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{3 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{a_i} - 6}{[a_i] - 3 - \frac{6}{\pi} \operatorname{arc\,tg}\left\{\sqrt{3} \operatorname{tg}\frac{\pi}{a_i} \operatorname{cotg}\left(1 - \frac{[a_i]}{a_i}\right)\pi\right\}} \right),$$

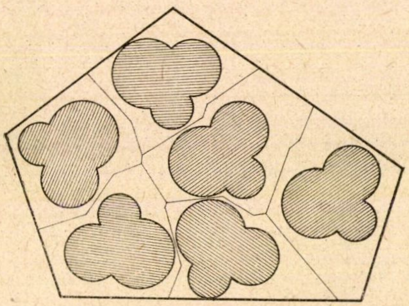
ahol $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{a_i} = 2\cos\sqrt{\varkappa} r_i$.

[55] E tétel bizonyításával kapcsolatban megjegyezzük, hogy az S sokszög cellákra való bontása ugyancsak hatványvonalak segítségével történik. Legyen $H \equiv H(r, h_{r-a-a})$. Ekkor a körrendszernek az S sokszögre vonatkozó sűrűsége $\leqq \frac{\Sigma K_i}{\Sigma H_i}$.

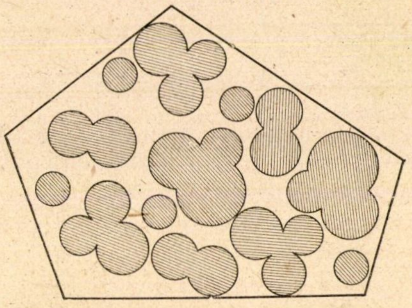
[56] l. FEJES TÓTH [25], 72–73. o.

Megjegyzés: A VI., VII., VIII. és IX. tételhez hasonló tételek mondhatók ki arra az esetre is, ha a körök helyett körívsokszögeket tekintünk (76., 77. ábra). Ezek bizonyítása ugyanúgy történhet, mint azt már — az V. tétel után tett 2. megjegyzésünkben — vázoltuk.

Eddigi eredményeink a „DIRICHLET cella" területének megbecslésén alapultak. Most még két tételt említünk a „DIRICHLET cella" kerületére vonatkozólag.



76. ábra



77. ábra

X. TÉTEL: *Ha egy $\varkappa$ görbületű felületen levő — legalább három pontból álló — pontrendszer pontjai egymástól legalább $2r$ távolságra vannak, akkor a pontrendszer bármely pontjához tartozó* DIRICHLET *cella kerülete* $\geqq k(a)$

$$k(a) = \frac{2[a]}{\sqrt{\varkappa}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa r}\right) + \frac{2}{\sqrt{\varkappa}} \arcsin\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{\varkappa r}\,\sin\left(1-\frac{[a]}{a}\right)\pi\right\},$$

ahol $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{a} = 2\cos\sqrt{\varkappa r}.$

$k(a)$ egy olyan HAJÓS-féle $H(r, h_{r-r-r})$ sokszög kerülete, mely az I. tételünkben a $d(a)$ értéket szolgáltatta.

Tételünkben egyenlőség áll, ha a pontok egy olyan szabályos mozaik csúcsai, amelynek lapjai $2r$ oldalú háromszögek.

Következő tételünk lényegében az I. korollárium analogonja.

XI. TÉTEL: *Ha egy állandó görbületű felületen levő — legalább három pontból álló — pontrendszer pontjai egymástól legalább t távolságra vannak, és bármely három ponton átmenő kör sugara legalább r, akkor bármely ponthoz tartozó* DIRICHLET *cella kerülete* $\geqq H\left(\frac{t}{2}, r\right)$, *ahol* $H\left(\frac{t}{2}, r\right)$ *jelöli egy olyan* HAJÓS-*féle sokszög kerületét, mely* $\frac{t}{2}$, r *sugarú koncentrikus körökhöz tartozik.*

Ebben a tételben szélső értéket szolgáltatnak pl. az összes olyan pontrendszerek, melyeknek DIRICHLET cellái szabályos (pl. 39., 40., 41., 42., és 43. ábra) vagy HAJÓS-féle mozaikot (pl. 44., 45., 46., 47., 48. és 49. ábra) alkotnak.

II. KÖRELHELYEZÉSEK KÖRKONVEX TARTOMÁNYOKBAN

1. §. Körkonvex ponthalmazokról[57]

A klasszikus értelemben vett konvex ponthalmaz[58] értelmezésére a következő két definíciót szokás használni:

1. Egy zárt ponthalmaz konvex, ha bármely két pontját összekötő szakasz a ponthalmazhoz tartozik,

2. Egy zárt ponthalmaz konvex, ha bármely határpontjához tartozik támaszegyenes.[59]

A konvexitás fogalmának különböző általánosításai ismeretesek (pl. pontra konvex, irányra konvex, L-konvex, hiperkonvex, α-rendű konvex, ε-konvex), amelyek számos matematikust (pl. A. D. ALEXANDROV, H. BRUNN, J. G. VAN DER CORPUT, W. FENCHEL, H. HADWIGER, A. HORN, V. KLEE, A. E. MAYER, K. MENGER, H. MINKOWSKI, J. PERKAL, K. REINHARDT, J. G. RESETNYÁK, L. A. SANTALÓ, F. A. VALENTINE, P. VINCENSINI) foglalkoztattak. Ezeknek az általánosításoknak kiindulópontját lényegében a fenti értelmezések képezték.

J. PERKAL 1956-ban[60] — az ε-konvex ponthalmaz értelmezésével — olyan ponthalmaz osztályhoz jutott, amely az euklideszi térben átmenetet képez egy adott ponthalmaz zárt burka és a ponthalmaz konvex burka között.

PERKAL eredményéhez kapcsolódva bevezetjük az állandó görbületű felületeken a körkonvexitás fogalmát, mely mint látni fogjuk tartalmazza a PERKAL-féle ε-konvexitás, a HADWIGER-féle α-rendű konvexitás és a MAYER-féle r-hiperkonvexitás fogalmát[61]. Ebben a §-ban arra is kitérünk, hogy megmutassuk a kapcsolatot a körkonvex ponthalmazok és a RESETNYÁK-féle[62] O_δ halmazok, ill. az A. D. ALEXANROV-féle PRV halmazok között.[63]

Az eddigiekhez hasonlóan állandó görbületű felület alatt a gömbfelületet, az euklideszi síkot és a hiperbolikus síkot értjük. E felületeken egy sugársor bármely orthogonális trajektoriája (gömbön: kör; euklideszi síkon: kör, egyenes; hiperbolikus síkon: kör, paraciklus, hiperciklus, egyenes) a felületet két tartományra bontja. Egy ilyen határpontjával lezárt tartományt ciklustartománynak — röviden ciklusnak — nevezünk. Ha a ciklust határoló vonal ϱ-sugarú kör, akkor a ciklust ϱ sugarú, ill. — ϱ sugarú ciklusnak nevezzük aszerint, amint a ciklus konvex (78. ábra) vagy konkáv (79. ábra). Célszerűnek mutatkozik a többi ciklushoz is „sugárértéket” hozzárendelni, mégpedig a következőképpen: Legyen az euklideszi félsíkra

[57] A körkonvex elnevezés FEJES TÓTH-tól származik.

[58] Jelen dolgozatunkban a két dimenziós esettel foglalkozunk, de megállapításaink minden nehézség nélkül átvihetők magasabb dimenzióba is.

[59] A két értelmezés nem ekvivalens. Ui. az 1. értelemben konvex ponthalmaz határának egy zárt része az 1. értelmezés szerint általában nem konvex, a 2. értelmezés szerint viszont konvex (l. A. D. ALEXANDROV [3], 10–11. o.).

[60] J. PERKAL [58].

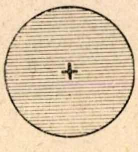
[61] H. HADWIGER [39], A. E. MAYER [47], J. PERKAL [58]. Míg a HADWIGER- és a PERKAL-féle konvexitás a klasszikus konvexitás fogalmának egy kiterjesztése, addig a MAYER-féle annak egy szűkítése. Egyébként könnyen belátható, hogy a HADWIGER-féle értelemben konvex tartomány, PERKAL-féle értelemben is konvex.

[62] J. G. RESETNYÁK [60].

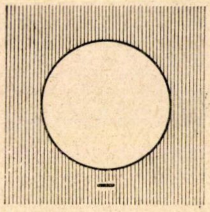
[63] A. D. ALEXANDROV [4], [5].

$\varrho = +\infty$ (80. ábra), a hiperbolikus félsíkra $\varrho = \pm 2\infty$ (81. ábra), a paraciklus által határolt (zárt) tartományra $\varrho = \pm\infty$ (82. ábra), a hiperciklus által határolt (zárt) tartományra $\varrho = \pm 2\infty \mp a$ (83. ábra), ahol a jelenti a hiperciklusnak alapegyenesétől való távolságát.[64] A ϱ sugarú ciklust röviden ϱ-ciklusnak nevezzük.

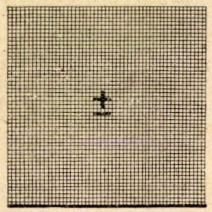
DEFINÍCIÓ: *Egy zárt ponthalmazt ϱ sugarú körkonvexnek, röviden ϱ-konvexnek nevezünk és T_ϱ-val jelölünk, ha bármely határpontjához illeszkedik ϱ-sugarú támaszciklus, azaz olyan ϱ-ciklus, mely illeszkedik a határponthoz és nem tartalmaz belsejében T_ϱ-hoz tartozó pontot.*



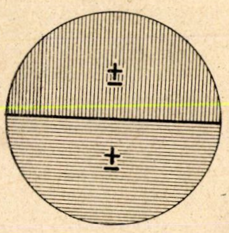
78. ábra



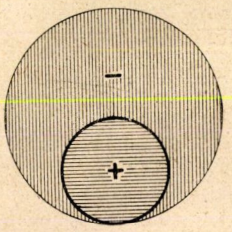
79. ábra



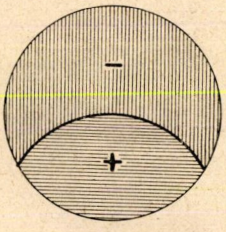
80. ábra



81. ábra



82. ábra



83. ábra

Egyszerű példákat mutat a körkonvex ponthalmazra a 84. és 85 ábra.

Megjegyzések. 1. Nyilvánvaló, hogy

a) egy körkonvex ponthalmaz lehet nem egyszeresen összefüggő (86. ábra), sőt nem is összefüggő (87. b ábra),

b) egy ϱ sugarú körkonvex ponthalmaz egyben ϱ' sugarú körkonvex is, ha $\varrho' < \varrho$ és $\varrho \cdot \varrho' > 0$,

c) a klasszikus értelemben vett konvex ponthalmaz bármely ϱ véges pozitív értékekre ϱ-konvex is.

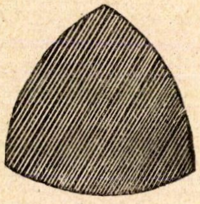
2. Könnyen belátható, hogy ϱ sugarú körkonvex ponthalmazok közös része ugyancsak ϱ sugarú körkonvex ponthalmaz.[65] Ennek a megjegyzésnek alapján

[64] A 81., 82. és 83. ábrán a ciklusokat a POINCARÉ modellen mutatjuk be.

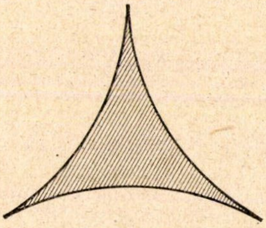
[65] Véges sok ϱ sugarú körkonvex ponthalmaz esetén ez triviális. Végtelen sok $\{T_i\}$ ϱ-konvex ponthalmaz esetén csupán azt kell belátnunk, hogy a metszet olyan A határpontjához is tartozik ϱ-támaszciklus, mely T_i bizonyos A_i határpontjainak torlódási helye. Rendeljünk minden A_i ponthoz a T_i tartományhoz illeszkedő ϱ-támaszciklust és tekintsük ennek az A_i ponton átmenő normálisán egy $A_iC_i = t$ távolságot. A BOLZANO—WEIERSTRASS-tétel értelmében a C_i pontoknak van C torlódási pontja. Az A és C pont éppen egy A-ra illeszkedő ϱ-támaszciklust határoz meg.

értelmezhetjük a körkonvex burok fogalmát. Egy ponthalmaz ϱ-konvex burka alatt a ponthalmazt tartalmazó ϱ-konvex ponthalmazok közös részét értjük (87. a, b ábra, 87. a ábra az eredeti ponthalmaz, 87. b ábra a ϱ-konvex burka).

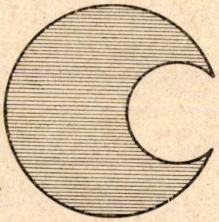
3. A HADWIGER-féle α-rendű konvex H_α ponthalmazok, a PERKAL-féle ε-konvex P_ε ponthalmazok, valamint a MAYER-féle r-hiperkonvex M_r ponthalmazok, ϱ megfelelő értékeire egyben ϱ sugarú körkonvexek is. Ezen állításunk helyességét



84. ábra



85. ábra

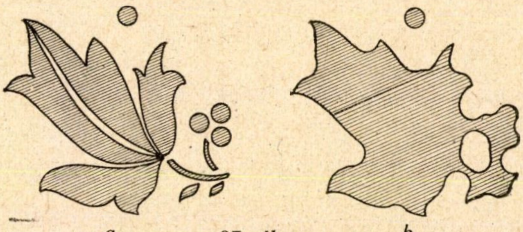


86. ábra

kiolvashatjuk a H_α, P_ε és M_r halmazok alábbi értelmezéséből és a hozzájuk fűzött megjegyzésekből.

Egy zárt ponthalmazt HADWIGER-féle α-rendű konvexnek mondunk (unterkonvex vom Grad α) és H_α-val jelölünk, ha minden $\lambda < \alpha$ sugarú körlappal való metszete egyszeresen összefüggő.[66]

Könnyen bizonyítható, hogy egy HADWIGER-féle α-rendű ponthalmaz egyben α sugarú körkonvex is, jelekben $H_\alpha = T_\alpha$. Ehhez elegendő belátni, hogy a H_α ponthalmaz bármely P határpontjához illeszkedik α sugarú támaszkör. Legyen K_ε egy $\varepsilon < \alpha$ sugarú kör. H_α definíciójából könnyen adódik, hogy amennyiben H_α határa tartalmaz egy „konkáv" ívet, ez nem lehet K_ε körív (88. ábra). Ugyancsak könnyen belátható, hogy $K_\varepsilon \cap H_\alpha$ olyan „konkáv" körívet sem tartalmazhat, melynek belső pontja a H_α ponthalmaznak határpontja (89. ábra). Az elmondottak értelmében a P pont nem más, mint vagy a K_ε kör $K_\varepsilon \cap H_\alpha$-ban levő „konkáv" ívének végpontja (90. ábra), vagy azonos $K_\varepsilon \cap H_\alpha$-val. Az



a 87. ábra b

első esetben a K_ε kört a P pont körül forgatva elérhetjük, hogy $P \equiv K_\varepsilon \cap H_\alpha$. Így tehát H_α bármely P határpontjában illeszkedik K_ε támaszkör. Mivel viszont a P pontban illeszkedik bármely $\varepsilon < \alpha$ sugarú támaszkör, illeszkedik tehát α sugarú támaszkör is.

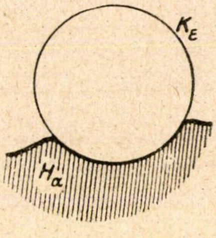
Egy zárt ponthalmaz PERKAL-féle értelemben ε-konvex, röviden P_ε, ha olyan

[66] HADWIGER [39]. Ebben a dolgozatban szerepel a β-rendű konvexitás (Überkonvexitat vom Grad β) fogalma is. A HADWIGER-féle β-rendű konvexitás mintájára bevezethető a ϱ-komplementerkörkonvexitás fogalma is. Egy T ponthalmaz ϱ-komplementerkörkonvex, ha T komplementer ponthalmaza $\bar{T}$ ϱ-konvex, azaz $\bar{T}_\varrho$. Általában $\bar{T}_\varrho \not\equiv T_{-\varrho}$ (84. ábra komplementerje).

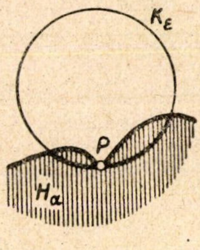
ε sugarú nyílt körlapok összességének zárt komplementerje, melyeknek nincs közös pontja a P_ε halmazzal.[67]

Nyilvánvaló, hogy P_ε bármely határpontjához tartozik ε sugarú támaszkör, azaz $P_\varepsilon \equiv T_\varepsilon$.

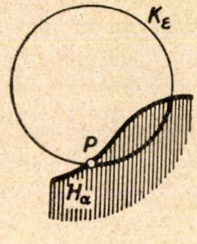
Itt említjük meg, hogy míg egy HADWIGER-féle α-rendű konvex ponthalmaz egyszersmind PERKAL-féle ε-konvex, addig a fordítottja általában nem igaz (92. ábra).



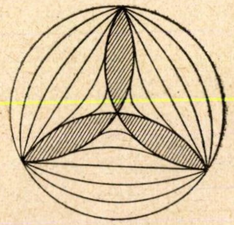
88. ábra



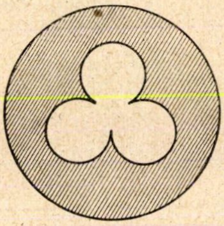
89. ábra



90. ábra



91. ábra



92. ábra

Egy zárt ponthalmaz r-hiperkonvex, röviden M_r, ha r sugarú körök metszete.

Nyilvánvaló, hogy M_r bármely határpontjához tartozik $-r$ sugarú támaszkör, azaz $M_r = T_{-r}$.

4. Érdekes megjegyezni, hogy megadható olyan ϱ sugarú körkonvex tartomány, mely $\varepsilon = \varrho$ értékekre nem PERKAL-féle ε-konvex. Ilyen példát mutat a 86. ábra, mely úgy származik, hogy egy körlap belsejéből kivágunk három egyenlő ε sugarú érintő kört és az általuk határolt „belső" körívháromszöget.

5. RESETNYÁK szovjet matematikus 1956-ban egy dolgozatában bevezette az O_δ ponthalmaz fogalmát[68]. Az O_δ halmaz — lényegében véve — egy olyan elemi felület, melynek bármely pontjához hozzáilleszthető a felületnek mindig ugyanarról az oldaláról egy δ sugarú támaszgömb. Nyilván az O_δ halmazok speciális δ sugarú körkonvex (gömbkonvex) halmazok. Ui. könnyen megadható olyan elemi felület, mely δ sugarú gömbkonvex, viszont nem O_δ halmaz. Ilyent szolgáltat pl.

[67] A ϱ-ciklus segítségével a PERKAL-féle konvexitás kiterjeszthető úgy is, hogy az ε sugarú kör helyett ϱ sugarú ciklust szerepeltetünk. Ezzel a kiterjesztéssel olyan ponthalmazhoz jutunk, mely a ponthalmaz zárt burkától, a konvex burkon keresztül elvezet a ponthalmazt tartalmazó legkisebb körig (91. ábra).

[68] Rezernyák [60.]

egy téglalap, ha behajlítjuk úgy, hogy „profilja" nyomtatott N legyen (93. ábra). Az O_δ halmazok speciális PRV (predsztávimoj ráznosztju vipuklih ... ≡ konvex (függvények) különbségeként előállított ...) halmazok is. A PRV halmaz fogalmát A. D. ALEXANDROV vezette be 1949-ben.[69] A PRV halmaz olyan elemi felület, melynek bármely pontjának kis környezete $z=f(x, y)-g(x, y)$ alakban állítható elő, ahol $f(x, y)$ és $g(x, y)$ konvex függvények.

93. ábra

6. Ha egy T ponthalmaz JORDAN-féle ív komponenseket is tartalmaz, akkor lényegesen más és más T_ϱ körkonvex ponthalmaz fogalomhoz jutunk aszerint, hogy csupán azt követeljük, hogy a JORDAN-féle ív minden pontjához tartozzék ϱ sugarú támaszciklus, vagy pedig ezenkívül még azt is, hogy a szereplő támaszciklus az ív egyik, ill. mindkét oldalán szerepeljen.

2. §. Tételek

Ebben a paragrafusban körelhelyezéseket vizsgálunk körkonvex tartományokban.

FEJES TÓTH-tól ered a következő tétel:[70]

Ha az euklideszi síkon egy konvex tartományában legalább két egymásba nem nyúló egységnyi sugarú kör van elhelyezve, akkor ezeknek a köröknek a tartományra vonatkozó sűrűsége $<\dfrac{\pi}{\sqrt{12}}$.

Az első általánosítása ennek a tételnek, amellyel a következőkben foglalkozni óhajtunk, a

XII. TÉTEL: *Ha az euklideszi sík egy ($\varrho>0$) összefüggő ϱ sugarú körkonvex tartományában legalább két egymásba nem nyúló egységnyi sugarú kör van elhelyezve, akkor ezeknek a köröknek a tartományra vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \leqq \frac{\pi}{\sqrt{12}}, \quad \text{ha } \varrho \geqq \varrho_0,$$

$$\delta \leqq \frac{\pi}{\sqrt{\varrho^2+2\varrho}+\dfrac{\pi}{2}+(1-\varrho^2)\arcsin\dfrac{1}{1+\varrho}}, \quad \text{ha } 1 \leqq \varrho < \varrho_0,$$

$$\delta \leqq \frac{\pi}{\varrho\sqrt{1+2\varrho}+\dfrac{\pi}{2}+(1-\varrho^2)\arccos\dfrac{\varrho}{1+\varrho}}, \quad \text{ha } \varrho < 1,$$

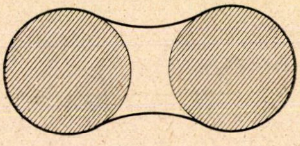
ahol $\varrho_0 = 4{,}8\ldots$ *a*

$$\sqrt{\varrho^2+2\varrho}+\frac{\pi}{2}+(1-\varrho^2)\arcsin\frac{1}{1+\varrho}=\sqrt{12}$$

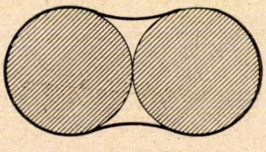
egyenlet pozitív gyöke.

[69] A. D. ALEXANDROV [4], l. még A. D. ALEXANDROV—V. A. ZALGALLER [6].
[70] FEJES TÓTH [19], 1948.

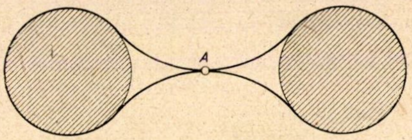
Bizonyításunk előtt megadjuk a tételben szereplő mennyiségek szemléletes jelentését. Azt a tartományt, mely két-két egymásba nem nyúló egységnyi sugarú kör ϱ-konvex burka (94. ábra), ϱ-piskótának nevezzük. Tekintsük ennek azt a két szélső esetét, amidőn az egységkörök (95. ábra), ill. a ϱ sugarú körök érintkeznek



94. ábra



95. ábra

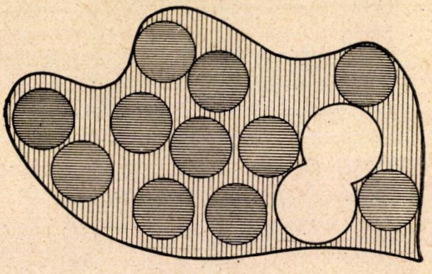


96. ábra

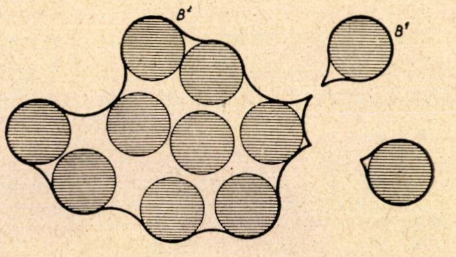
(96. ábra).[71] E két esetben a két egységkörnek a piskótára vonatkozó sűrűségét d_{1-1}^{ϱ}-, ill. $d_1^{\varrho-\varrho}$-val jelöljük. Ekkor

$$d_{1-1}^{\varrho_0}=\frac{\pi}{\sqrt{12}},\qquad d_{1-1}^{\varrho}=\frac{\pi}{\sqrt{\varrho^2+2\varrho}+\frac{\pi}{2}+(1-\varrho^2)\arcsin\frac{1}{1+\varrho}},$$

$$d_1^{\varrho-\varrho}=\frac{\pi}{\varrho\sqrt{1+2\varrho}+\frac{\pi}{2}+(1-\varrho^2)\arccos\frac{\varrho}{1+\varrho}}.$$



97. ábra



98. ábra

Bizonyítás. Tekintsük a $\{K\}$ körrendszer (97. ábra) ϱ-konvex B burkát (98. ábra). Mint a 98. ábránk is mutatja B általában nem összefüggő. B egy-egy összefüggő részét B^1-, ill. B^2-vel jelöljük aszerint, hogy a $\{K\}$ körrendszernek egy vagy legalább két körét tartalmazza. Nyilván $B=\Sigma B^1+\Sigma B^2$.

[71] Tételünkben szereplő egyenlet bal oldala — egyik szélső értéket képviselő — piskóta (95. ábra, az egységkörök érintkeznek) területét adja, s így ez ϱ-nak növekvő függvénye.

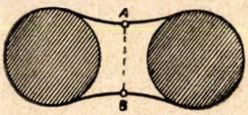
Legyen a B^1 tartományban levő egységkör K. Mivel az eredeti T tartomány összefüggő, van olyan A pontja, mely a K körtől $\sqrt{2\varrho+1}-1$ távolságra van (96. ábra). Mivel viszont a T tartomány ϱ sugarú körkonvex is, könnyen belátható, hogy a K körrel együtt a T tartományhoz tartozik A és K ϱ-konvex T^1 burka.

A T tartomány így értelmezett T^1, ill. $T^2 \equiv B^2$ résztartományai nyilván diszjunktak.

Tételünk bizonyításához elegendő kimutatni, hogy 1. mind a T^1 tartományban, 2. mind pedig a T^2 tartományban a körök sűrűsége nem haladja meg a tételünkben szereplő sűrűségkorlátot.

1. A T^1 tartományban a körök sűrűsége a $d_1^{\varrho-\varrho}$ értéket veszi fel, mely megfelel tételünk állításának, ui. $\varrho \geqq 1$ esetén nyilvánvaló, hogy $d_1^{\varrho-\varrho} \leqq d_{1-1}^{\varrho}$, $\varrho<1$ esetén pedig $d_1^{\varrho-\varrho}$ éppen a tételben szereplő korlát.

2. Annak bizonyítására, hogy a T^2 tartományban a körök sűrűsége nem haladhatja meg a tételünkben szereplő korlátot, két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy I. $\varrho \geqq 1$, II. $\varrho<1$.



99. ábra

I. $\varrho \geqq 1$. A T^2 tartományt a körelhelyezésnek megfelelően $\{D\}$ DIRICHLET cellákra bontjuk, s ezeket három csoportba osztjuk aszerint, hogy határuk a) nem tartalmaz ϱ sugarú körívet, azaz D sokszög, b) egyetlen egy ϱ sugarú körívet tartalmaz, c) legalább két ϱ sugarú körívet tartalmaz.

a) Ha D sokszög, akkor tudjuk, hogy D-ben a körsűrűség $\leqq \dfrac{\pi}{\sqrt{12}}$ (l. pl. az I. tétel bizonyítása).

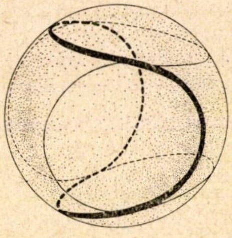
b) Ha D határának egyetlen egy szakaszát ϱ sugarú körív képezi, akkor a K kör és a határát képező ϱ sugarú kör hatványvonalával helyettesítjük a ϱ sugarú körívet (pontosabban mondva csak a hatványvonal D-ben levő részével helyettesítjük a ϱ sugarú körívet). Az így nyert $D^* \subset D$ cellában a körsűrűség $\leqq \dfrac{\pi}{\sqrt{12}}$.

c) Legyen K olyan kör, melyhez tartozó D cella legalább két ϱ sugarú körívet tartalmaz. Legyen továbbá $M \ldots N$ két szomszédos ϱ sugarú körívet összekötő az a töröttvonal, amely a D határához tartozó hatványvonal szakaszokból áll. Legyen B a K körnek és az $M \ldots N$ töröttvonalnak ϱ-konvex burka. Nyilván $D^* = D \cap B \subset D$. Az újonnan kapott D^* cella határvonalát képező töröttvonal végpontjait továbbra is M- és N-nel jelöljük. Ha B nem összefüggő, akkor az 1. eset mintájára könnyen belátható, hogy van olyan $D^{**} \subset D$ cella, amelyben a körsűrűség $d_1^{\varrho-\varrho}$. Ha viszont B összefüggő, akkor két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a K körön „szabadon" hagyott λ ív $\geqq 2\left(\pi - \arccos \dfrac{1}{1+\varrho}\right)$ vagy $< 2\left(\pi - \arccos \dfrac{1}{1+\varrho}\right)$.

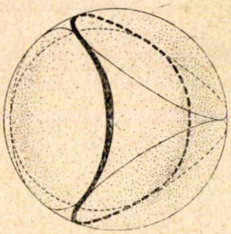
Első eset: $\lambda \geqq 2\left(\pi - \arccos \dfrac{1}{1+\varrho}\right)$. Legyen A, B a két λ sugarú köríven levő egymáshoz legközelebb fekvő pontpár (99. ábra). A D^* cella képzését szem előtt tartva, könnyen belátható, hogy az $M \ldots N$ töröttvonal szélső szakaszai az M, ill. N pontban a megfelelő ϱ sugarú körívvel nem alkotnak tompaszöget, s így az AB szakasz, mely ezekkel az ívekkel derékszöget alkot, a D cellában van. A D^*

cella helyett tekintsük ennek a K kört tartalmazó azon R résztartományát, mely úgy keletkezik, hogy AB-vel ketté vágjuk a D^* tartományt.[72] Könnyen belátható, hogy már az R tartományban is $\frac{K}{R} \leqq d_1^{\varrho-\varrho}$.

Második eset: $\lambda < 2\left(\pi - \arccos \frac{1}{1+\varrho}\right)$. A λ körív egy tetszőleges pontjából D^* határán ellentétes irányokban haladunk, míg a ϱ sugarú íveken levő E_1 és E_2 pontokig nem érünk, amelyekből a K körhöz húzott érintők az E_1, ill. E_2 pontban



100a. ábra



100b. ábra

a megfelelő ϱ sugarú körívvel derékszöget alkotnak. D^* definíciójánál fogva tartalmazza E_1- és E_2-t. Könnyen belátható még, hogy E_1-, ill. E_2-ből húzott e_1, ill. e_2 érintő is a D^* cellában van. Ezek szerint K, e_1 és e_2 konvex B burka résztartománya a D^* cellának. A B tartományban a körsűrűség éppen $d_1^{\varrho-\varrho}$.

II. $\varrho < 1$. Erre az esetre bizonyításunk a következő: a T tartományt felbontjuk D Dirichlet cellákra és lényegében a $\varrho > 1$ esetnél alkalmazott gondolatmenetet követjük. Ha D sokszög vagy határa legalább két ϱ sugarú körívet tartalmaz, akkor a $\varrho > 1$ esetre adott bizonyítás jó $\varrho < 1$ esetén is. Tehát csupán azzal az esettel kell foglalkoznunk, ha D határa egyetlen egy ϱ sugarú K_ϱ körívet tartalmaz. Helyettesítsük a D cellát azzal a kisebb területű D^* sokszöggel, amelyet úgy kapunk, hogy a D cellát átmetsszük a K és K_ϱ hatványvonalával. Elegendő bizonyítani, hogy $\frac{K}{D^*} \leqq d_1^{\varrho-\varrho}$. Ez viszont a 4. segédtétel értelmében teljesül.

Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

A tétel bizonyításából kiolvasható, hogy egyenlőség lép fel $\varrho < \varrho_0$ esetén, ha a körkonvex tartomány extremális alakzatú piskóta tartomány.[73]

Jelentse d_{r-r}^{ϱ}, ill. $d_r^{\varrho-\varrho}$ az r sugarú körök maximális sűrűségét két r sugarú kört tartalmazó extremális ϱ-piskótában, azaz midőn a két r sugarú kör, ill. a két ϱ sugarú kör érintkezik (95., 96. ábra).

A XII. tétel birtokában, követve FEJES TÓTH már idézett tételének indukciós bizonyításmenetét, adódik a

[72] Az R tartományban a körsűrűség λ-nak alulról konkáv függvénye. Ui. az R tartomány t területére áll, hogy $t'' = \frac{1}{2}(1+\varrho^2) \sin \lambda$.

[73] Itt jegyezzük meg, hogy míg az euklideszi, ill. hiperbolikus sík egybevágó piskóta tartományokkal hézagmentesen és többszörös fedés nélkül nem rakható ki, addig a gömbfelület — bizonyos piskóta párokkal — kirakható. Gondoljunk pl. a teniszlabda két egybevágó piskótatartományára (100. a, b ábra).

XIII. TÉTEL: *Ha az euklideszi sík egy összefüggő ϱ-konvex tartományában egymásba nem nyúló n fajta kör van elhelyezve, melyek sugarai $r_1, r_2, \ldots, r_n$ és a legnagyobbikból legalább kettő van, akkor a körrendszernek a ϱ-konvex tartományra vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \leqq 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \operatorname{Max}\left\{\frac{\pi}{\sqrt{12}}, d^{\varrho}_{r_i - r_i}, d^{\varrho-\varrho}_{r_i}\right\}\right).$$

4. KOROLLÁRIUM: *Ha az euklideszi sík egy összefüggő ϱ-konvex tartományában egymásba nem nyúló n fajta kör van, melyek sugarai $\leqq \frac{\varrho}{\varrho_0} = 4, 8\ldots$ és a legnagyobb körből kettő van, akkor a körrendszernek a ϱ-konvex tartományra vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \leqq 1 - \left(1 - \frac{\pi}{\sqrt{12}}\right)^n.$$

A fenti ϱ_0 állandó már a XII. tételben is szerepelt.

Most pedig fordítsuk figyelmünket körök elhelyezésére egy állandó görbületű felület körkonvex tartományában. Ellenpéldán láttuk, hogy hiperbolikus síkon már közönséges konvex tartomány esetén sem adható a körsűrűségre egynél kisebb univerzális korlát. Pontosabban ez az ellenpélda azt igazolja, hogy a hiperbolikus sík valamely konvex tartományában elhelyezett legalább két r sugarú egymásba nem nyúló kör kitöltési sűrűségére nem adható egy r-től független egynél kisebb felső korlát.[74] Mint látni fogjuk, megadható viszont olyan r és ϱ-tól függő korlát (l. a XIV. és XV. tétel), mely bizonyos esetekben pontos.

A XII. tétel bizonyításának gondolatmenetéből ($\varrho > 1$ eset) automatikusan adódik a

XIV. TÉTEL: *Az állandó görbületű felület egy összefüggő ϱ-konvex tartományában elhelyezett legalább két r sugarú körnek a tartományra vonatozó δ sűrűsége*

$$\delta \leqq \operatorname{Max}\{d(r, r, r), d(r, \varrho, \varrho), d_\varrho(r)\},$$

ahol $d(r, a, a)$ jelenti az r sugarú kör sűrűségét a HAJÓS*-féle $H(r, h_{r-a-a})$ sokszögben, $d_\varrho(r)$ pedig jelenti két r sugarú kör ϱ-piskótájában fellépő maximális sűrűségét.*

5. KOROLLÁRIUM: *A gömbfelület egy szűkebb értelemben vett konvex tartományában elhelyezett legalább két egymásba nem nyúló r sugarú körnek a tartományra vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \leqq \operatorname{Max}\{d(r, r, r), d_{\frac{\pi}{2}}(r)\}.$$

Ez a korlát r minden értékére $\left(0 < r \leqq \frac{\pi}{4}\right)$ kisebb $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$-nél, s így $\delta \leqq \frac{\pi}{\sqrt{12}}$ (vö. MOLNÁR [59]).

Megjegyzések. 1. 4. segédtételünket felhasználva kimutatható, hogy a XIV. tételben $a \geqq 5$ esetben

$$\delta \leqq \operatorname{Max}\{d(r, r, r), d_\varrho(r)\}.$$

[74] Az euklideszi síkra vonatkozó XII. és XIII. tételek a gömbfelületre sem vihetők át lényeges módosítás nélkül.

2. Hiperbolikus síkon a ϱ-piskótában a körök által le nem fedett t terület a „szabadon hagyott" λ körívnek konkáv függvénye.[75] Ezért a felső korlátban szereplő $d_\varrho(r)$ érték helyettesíthető a ϱ-piskóta két szélső esetéhez tartozó legnagyobb körsűrűséggel.

3. Az állandó görbületű felületen nehézséget okoz az (r, ϱ) sík azon tartományainak meghatározása, amelyekben $d(r, r, r)$, $d(r, \varrho, \varrho)$ és $d_\varrho(r)$ közül az első, a második vagy a harmadik a legnagyobb. A problémát megnehezíti az is, hogy $d(r, r, r)$ az r-nek nem monoton függvénye.

4. Hiperbolikus síkon teljesen nyitott probléma még a $(\pm\infty, \pm 2\infty)$ „intervallumba" eső ϱ-konvex tartományokban levő körök kitöltési sűrűségének vizsgálata.

Az állandó görbületű felület körkonvex tartományában elhelyezett egymásba nem nyúló inkongruens körökre vonatkozólag csak egy tételt említünk. A XIII. tétel mintájára bizonyítható a

XV. TÉTEL: *Ha az állandó görbületű felület egy összefüggő ϱ-konvex tartományában egymásba nem nyúló n fajta kör van elhelyezve, melyeknek sugarai $r_1, r_2, \ldots, r_n$ és a legnagyobb körből legalább kettő van, akkor a köröknek a ϱ-konvex tartományra vonatkozó δ sűrűsége*

$$\delta \leqq 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathrm{Max}\,\{d(r, r, r), d(r, \varrho, \varrho), d\varrho(r)\}).$$

IRODALOMJEGYZÉK

[1] M., AGENO, 1. Elementi per una sistematica dei monostrati chiusi I., *Istituto superiore di sanita* **24** (1961) 1–19.

[2] 2. Elementi per una sistematica dei monostrati chiusi II., *Istituto superiore di sanita* **28** (1961) 1–63.

[3] A. D. ALEXANDROV, 1. *Konvexe Polyeder*, Berlin 1958.

[4] 2. О поверхностях представимых разностю выпуклых функций Изв. Акад, Наук Казанскои С. С. С. Р. **60** (3), 1949, 3—20.

[5] 3. Поверхности, представимые разпостями выпуклых функций. ДАН **72** (4), 1950, 613—620.

[6] А. Д. Александров—В. А. Залгаллер: Двухмернои многообразия, ограниченной кривизны (Основы внутреннеи геометрий поверхностей) (kézírat).

[7] W. J. BLUNDON, Multiple covering of the plane by circles, *Mathematica* **4** (1957) 7–16.

[8] B. BOLLOBÁS, A sík lefedése egybevágó konvex sokszögekkel I., *Középisk. Mat. Lapok* **22** (1961) 49–55.

[9] A. H. BOERDIJK, Some remarks concerning close-packing of equal spheres, *Philips Res. Rep.* **7** (1952) 303–313.

[10] H. S. M. COXETER, *Introduction to Geometry*, New-York–London, 1961.

[11] L. DANZER, *Verteilung von elf Punkten auf der Kugel*, Előadás az Oberwolfachi kollokviumon, 1958.

[12] G. L. DIRICHLET, Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen, *J. für die reine und angew. Math.* **40** (1850) 209–227.

[75] $$t'' = \frac{\sin 2\sqrt{\varkappa}(r+\varrho) \sin \sqrt{\varkappa}(r+\varrho) \sin\lambda}{\left(\cos^2 \frac{\lambda}{2} + \cos^2 \sqrt{\varkappa}(r+\varrho) \sin \frac{\lambda}{2}\right)^2}.$$

[13] L. Fejes Tóth, Über einen geometrischen Satz, *Math. Zeitschrift* **46** (1940), 83–85.
[14] 2. Az egyenlőoldalú háromszögrács mint szélsőértékfeladatok megoldása, *Mat. és Fiz. Lapok* **49** (1942) 238–248.
[15] 3. Über die Abschätzung des Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems, *Iber. dtsch. Math.-Ver.* **53** (1943) 66–68.
[16] 4. Egy gömbfelület lefedése egybevágó gömbsüvegekkel, *Mat. és Fiz. Lapok* **50** (1943) 40–46.
[17] 5. *Extremális pontrendszerek a síkban a gömbfelületen és a térben*, Kolozsvár 1944.,
[18] 6. Einige Bemerkungen über die dichteste Lagerung inkongruenter Kreise, *Comment. Math. Helvetici* **17** (1944–45) 256–261.
[19] 7. On the densest packing of circles in a convex domain, *Norske Vid. Selks. Forhdl. Trodheim*, **23** (1948) 32–34.
[20] 8. Über dichteste Kreislagerung und dünnste Kreisüberdeckung, *Comment. Math. Helvetici* **23** (1949) 342–349.
[21] 9. On the densest packing of spherical caps, *Amer. Math. Monthly* **56** (1949) 330–331.
[22] 10. Some packing and covering theorems, *Acta Univ. Szeged, Acta Sci. Math.* **12**/A (1950) 62–67.
[23] 11. Ausfüllung eines convexen Bereiches durch Kreise, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949) 92–94.
[24] 12. Covering with dismembered discs, *Proc. Amer. Soc. Math.* **1** (1950) 806–812.
[25] 13. *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1953.
[26] 14. Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **4** (1953) 103–110.
[27] 15. Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **4** (1953) 111–114.
[28] 16. Über die dichteste Horozyklenlagerung, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **5** (1954) 41–44.
[29] 17. Расположения на плоскости, на сфере и в просттранстве, Москва, 1958.,
[30] 18. Eräitä „kauniita" extremalkuvioita, *Arkhimedes*, **2** (1959) 1–10.
[31] 19. Neuere Ergebnisse in der diskreten Geometrie, *Elemente der Math.* **15** (1960) 25–36.
[32] L. Fejes Tóth–J. Molnár: Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise, *Math. Nachrichten* **18** (1958) 236–243.
[33] L. Few: The shortest path and the shortest road through n points, *Mathematica* **2** (1955) 141–144.
[34] S. Finsterwalder: Regelmässige Anordnungen gleicher sich berührender Kreise in der Ebene, auf der Kugel und auf der Pseudosphäre, *Abhandl. d. Bayer. Akad. d. Wiss. Math.-nat. Abt.* **38** (1936) 1–42.
[35] A. Florian: Ausfüllung der Ebene durch Kreise, *II. Magyar Math. Kongr., Előadás kiv.* Budapest, 1960. II.17.
[36] 2. Ausfüllung der Ebene durch Kreise, *Rend. del Circolo Mat. di Palermo* **9** (1960) 300–312.
[37] H. Groemer: Über die Einlagerung von Kreisen in einen konvexen Bereich, *Math. Zeitschrift* **73** (1960) 285–294.
[38] W. Habicht–B. L. van der Waerden: Lagerung von Punkten auf der Kugel, *Math. Annalen* **123** (1951) 223–234.
[39] H. Hadwiger: 1. Die erweiterten Steinerschen Formeln für Ebene und sphärische Bereichen, *Comment. Math. Helvetici* **18** (1946) 59–72.
[40] 2. Über extremale Punktverteilungen in ebenen Gebieten, *Math. Zeitschrift* **49** (1944) 305–309.
[41] A. Heppes: 1. Über mehrfache Kreislagerungen, *Elemente der Math.* **10** (1955) 125–127.
[42] 2. Mehrfache gitterformige Kreislagerungen in der Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **10** (1959) 141–148.
[43] Heppes A.–Molnár J.: Újabb eredmények a diszkrét geometriában I., *Mat. Lapok* **11** (1960) 330–355.
[44] E. Jucovi : Umiestenie 17, 25 a 33 bodov na guli, *Mat. Fiz. Casopis* **9** (1959) 173–176.
[45] R. Kershner: The number of circles covering a set, *Amer. J. Math.* **61** (1939) 665–671.
[46] Krammer G.: Megjegyzés gömbnek körökkel való kitöltéséhez és lefedéséhez, *Mat. Lapok* **11** (1960) 120–123.

[47] A. E. MAYER: Eine Überkonvexität, *Math. Zeitschrift* **39** (1935) 511–532.
[48] H. MESCHKOWSKI: Elementare Behandlung von Lagerungsproblemen, *Math. Phys. Semesterberichte* **4** (1955) 256–262.
[49] 2. *Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie*, Braunschweig 1960.
[50] J. MOLNÁR: 1. Ausfüllung und Überdeckung eines konvexen sphärischen Gebietes durch Kreise I, *Publ. Math. Debrecen* **3** (1952) 266–275.
[51] 2. Ausfüllung und Überdeckung eines konvexen sphärischen Gebietes durch Kreise II, *Publ. Math. Debrecen* **3** (1953) 150–157.
[52] 3. Inhaltsabschätzung eines sphärischen Polygons, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **3** (1952) 67–70.
[53] 4. Körelhelyezések a gömbön, *Mat. Lapok* **4** (1953) 113–123.
[54] 5. Cîteva probleme nerezolvate de geometrie, *Gaz. Mat. Fiz. Bucuresti* **12** (1958) 238–243.
[55] 6. Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise, *Ann. Univ. Sci. Budapestinensis, Sect. Math.* **2** (1959) 31–32.
[56] 7. Collocazioni di cerchi sulla superficie di curvatura costante, *Atti delle celebrazioni archimedee del secolo XX, Siracusa* (nyomás alatt)
[57] 8. Alcune generalizzazioni del teorema di Segre-Mahler, *Accad. Naz. dei Lincei* **30/5** (1961) 700–705.
[58] J. PERKAL: Sur les ensembles ε-convexes, *Colloquium Math.* **6** (1956) 1–10.
[59] R. RADO: Some covering theorems I., *Proc. London Math. Soc.* **51** (1949) 232–264.
[60] Ю. Г. Решетняк, Об одном обобщений выпуклых поверхностеи, Мат. Сборник **40** (82) 1956, 381—398.,
[61] H. RUTISHAUSER: Über Punktverteilungen auf der Kugelfläche, *Comment. Math. Helvetici* **17** (1944–45) 327–331.
[62] K. SCHÜTTE: Überdeckung der Kugel mit höchstens acht Kreisen, *Math. Annalen* **129** (1955) 181–186.
[63] K. SCHÜTTE–B. L. VAN DER WAERDEN: Auf welcher Kugel haben 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand 1 Platz? *Math. Annalen* **123** (1951) 96–124.
[64] B. SEGRE–K. MAHLER: On the densest packing of circles, *Amer. Math. Monthly* **51** (1944) 261–270.
[65] U. SINOGOWITZ: Die Kreislagen und Packungen kongruenter Kreisen in der Ebene, *Z. Kristallogr.* **100** (1939) 461–508.
[66] A. THUE: Om nogle geometrisk taltheoretiske Theoremer, *Forhdl. Skand. Naturfors.* **14** (1892) 352–353.
[67] S. VERBLUNSKY: On the least number of unit circles which can cover a square, *J. London Math. Soc.* **24** (1949) 164–170.
[68] B. L. VAN DER WAERDEN: Punkte auf der Kugel. Drei Zusätze, *Math. Annalen* **125** (1952) 213–222.
[69] L. L. WHITE: Unique arrengements of points on a sphere, *Amer. Math. Monthly* **59** (1952) 606–611.
[70] В. А. Залгаллер: Об одном неоохoдимом признаке плотнейщего расположения фигур, УМН **8** (4) 56 1953, 153—162.

(Beérkezett: 1962. III. 19.)

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

AZ OPERÁTORSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSA LINEÁRIS ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS DIFFERENCIA-DIFFERENCIÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSÁRA*

Írta: JOSEF WLOKA

Ebben a cikkben a közönséges és a parciális lineáris állandó együtthatós differencia-differenciálegyenletek elméletét tárgyaljuk a *Mikusiński*-féle operátorszámítás alkalmazásával. A dolgozat bevezetésből és ezenkívül három részből áll. A bevezetés a *Mikusiński*-féle operátorszámítás alapjait foglalja össze.

Az első részben az $f=\sum_{i=0}^{\infty} r_i(s)h^{\beta_i}$ $(r_i(s)$ az s racionális függvénye), az eltolási operátor végtelen sorait tárgyaljuk. Konvergencia és egyértelműségi tételeket (az előállítás egyértelműsége) vezetünk le, továbbá kritériumokat állítunk fel arra vonatkozólag, hogy egy ilyen sor mikor tartozik a C^n osztályba, illetve mikor állít elő véges disztribuciót. Az első rész tételeit és kritériumait a második, illetve a harmadik részben alkalmazzuk.

A második részben a

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i} x(t) - \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i}{dt^i} x(t-\tau) = f(t) \tag{1}$$

alakú közönséges lineáris differencia-differenciálegyenleteket tárgyaljuk. Az operátorszámítás alkalmazásával ezen egyenletek operátoregyenletekre vezethetők vissza, melyek könnyen megoldhatók. Ily módon az $n \geqq m$ esetben azt kapjuk, hogy az (1) egyenletnek az

$$x^{(k)}(+0) = d_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

kezdeti feltételeket kielégítő egyértelmű megoldása van, mely függvény (pontosabban: $X \in C^{n-1}$ és az $x^{(n)}$ deriváltnak a $k\tau$, $k=1, 2, \ldots$ pontokban véges ugrásai lehetnek). Az $n \geqq m$ esetet MURAWIEW [7] és PINNEY [9] részletesen vizsgálták[1].

Az $m > n$ esetben (1) megoldásai (pontosabban: a hozzá tartozó operátoregyenlet megoldásai) általában végtelen disztribuciók. Felmerül a kérdés, milyen járulékos feltételek teljesülése esetén állít elő a megoldás függvényt. Ezt a kérdést válaszolják meg a II. 2 és II. 3 tételek. Ha $m > n$ és (1) megoldása függvény, akkor ezen megoldás instabil; erre világít rá a II. 4 tétel. Az operátorszámítás lehetővé

* „Über die Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differential-Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten"

Journal für die reine und angewandte Mathematik Band 202, Heft 1/2 Berlin, 1959.

[1] [14] hasonló típusú egyenletek megoldásával foglalkozik, azonban a kezdeti feltételek megadása (2)-nél általánosabban véges intervallumon történik. (A ford. megj.)

teszi, hogy általánosított megoldásokat is keressünk (szakadásos függvények és disztribuciók), és hogy az egyértelműséget egyszerű járulékos feltételekkel biztosítsuk. (II. 1' és II. 2' tételek).

A harmadik részben a

$$\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}x(\lambda, t)}{\partial\lambda^{\mu}\partial t^{\nu}}+\sum_{\mu=0}^{m_1}\sum_{\nu=0}^{n_1}\beta_{\mu\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}x(\lambda, t-\tau)}{\partial\lambda^{\mu}\partial t^{\nu}} = \varphi(\lambda, t),$$

lineáris parciális differenciálegyenleteket a $t=0$-ban előírt kezdeti és a $\lambda=\lambda_0$ vagy a $\lambda=\lambda_1$ és $\lambda=\lambda_2$-ben előírt peremfeltételek mellett fogjuk a *Mikusiński*-féle differenciálegyenletelmélet segítségével osztályozni. A *Mikusiński*-féle differenciálegyenletelmélet alkalmazhatóságának kulcsát a III. 1. tétel képezi, mely kimondja, hogy (3) karakterisztikus egyenlete

$$\sum_{i=0}^{\max(m, m_1)}[\tilde{w}_i(s)+h^{\tau}\tilde{u}_i(s)]v^i = 0$$

a *Mikusiński*-féle M operátortestben annyi lineáris tényezőre bontható, amekkora a fokszáma, és hogy az összes gyökei

$$v = \sum_{i=-q}^{\infty} a_i(s)h^{\frac{\tau}{p}i}$$

alakban írhatók, ahol $a_i(s)$ az s algebrai függvénye.

A III. 2. tétel $\left(\text{a } v = \sum_{i=-q}^{\infty} a_i(s)h^{\frac{\tau}{p}i}\right.$ operátor akkor és csakis akkor logaritmus, ha $q=0$ és ha $a_0(s)$ logaritmus$\left.\right)$ a *Mikusiński*-tételekkel együtt lehetővé teszi, hogy ezt az osztályozást ténylegesen végrehajtsuk és a parciális differencia-differenciálegyenletek megoldásait explicite felírjuk. A tiszta, vegyes és logaritmikus egyenletek szerint való osztályozás itt egyidejűleg az egyértelműségi feltételek megadását is jelenti. Így nyerjük a III. 3a és 3b tételeket. Ez az osztályozás szigorúan összefügg másodrendű parciális differenciálegyenletek esetén a hiperbolikus, elliptikus, illetve parabolikus egyenletek szerinti felosztással (minden hiperbolikus egyenlet logaritmikus, minden elliptikus egyenlet tiszta, és egy parabolikus egyenlet lehet logaritmikus vagy tiszta).

A III. 4—7 tételek egyszerű kritériumokat szolgáltatnak egy egyenletnek valamely osztályba való tartozására vonatkozóan (tiszta, vegyes vagy logaritmikus). Ezen rész végén néhány példa van kidolgozva. A jelölésmódban és nomenklaturában a [2] könyvhöz és MIKUSIŃSKI cikkeihez [3], [4], [5], [6] tartjuk magunkat.

Bevezetés

A *Mikusiński*-féle operátorszámítás [2] a t változó $\langle 0, \infty)$ intervallumában érvényes. Jelöljük a $\langle 0, \infty)$ intervallumon folytonos függvények osztályát C-vel, az ugyanott n-szer vagy végtelen sokszor folytonosan differenciálható függvények osztályát C^n, illetve C^∞-nel. K legyen a $\langle 0, \infty)$ intervallumon értelmezett azon $f(x)$ függvények osztálya, melyek minden véges intervallumban csak véges számú szakadási hellyel bírnak és melyekre $\int_0^t |f(x)|dx$ minden $t>0$ esetén véges, és L jelentse az összes, minden véges intervallumban Lebesgue szerint integrálható függvények osztályát. (L elemeit röviden függvényeknek nevezzük.)

A C-ben (vagy L-ben) bevezetjük a $+$ és $*$ (konvolució) műveleteket. Továbbá célszerű az $f(t)$ függvény értékét magától az $\{f(t)\}$ (vagy f) függvénytől megkülönböztetni. Definiáljuk, hogy

$$\{f(t)\}+\{g(t)\} = \{f(t)+g(t)\},$$

$$\{f(t)\}*\{g(t)\} = \left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right\}.$$

A konvolució kommutatív és asszociatív, az összeadásra vonatkozóan disztributív, így a C (vagy L)-hez tartozó függvények egy egységelem nélküli nullosztómentes gyűrűt képeznek. Az, hogy C gyűrű (vagy L) nullosztómentes, következik a *Titchmarsh*-tételből [11]:

Legyenek $f, g \in C$ és legyen $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau=0$, ha $0 \leqq t \leqq T$, akkor $f(t)=0$ *a* $0 \leqq t \leqq t_1$*-ben és* $g(t)=0$ *a* $0 \leqq t \leqq t_2$*-ben, ahol* $t_1, t_2 \leqq T$ és $t_1+t_2 \geqq T$.

A *Titchmarsh* tételt gyakran fogjuk használni a fenti formában. A következőkben a konvolúciót, mint a szorzást, ponttal fogjuk jelölni, vagy pedig a pontjelölést is elhagyjuk.

Tekintve, hogy a $C(+, *)$ gyűrű nullosztómentes, ezért az az M hányadostestté bővíthető. Ezen M test elemeit operátoroknak fogjuk nevezni. Az M hányadostestben izomorf módon vannak beágyazva: a komplex számok teste, melyet $\mathfrak{K}$-val jelölünk $\left(\text{az izomorfizmus } a \leftrightarrow \frac{\{a\}}{\{1\}}\right)$ és az L gyűrű $\left(\text{az izomorfizmus } \{f(t)\} \leftrightarrow \frac{\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}}{\{1\}}\right)$. Az M test 1 egységeleme megfelel a *Dirac*-féle δ függvénynek.

Alapvető szerepet játszik az $l=\{1\}$ operátor (megkülönböztetést teszünk az 1 egységelem, mely nem függvény és az $\{1\}$ függvény között). Kapjuk, hogy

$$l\{f(t)\} = \left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\} \quad \text{és} \quad l^n = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\}.$$

Az l operátor konvolúció értelemben vett $s=\frac{1}{l}$ inverzét differenciáloperátornak fogjuk nevezni. Jelentését rögtön megérthetjük az $s\{f(t)\}=\{f'(t)\}+f(0)$ formulából, amely abszolút folytonos f függvényekre igaz.

A differencia-differenciálegyenleteknél fontos még a h^β eltolási operátor. $\beta>0$ esetére definiáljuk a $\{H_\beta(t)\}$ függvényt úgy, hogy a $0 \leqq t < \beta$ intervallumon legyen zérus és a $\beta \leqq t < \infty$ intervallumon legyen egyenlő az egységgel. A $h^\beta=s\{H_\beta(t)\}$

operátort eltolási operátornak fogjuk nevezni, mert

$$h^\beta\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 & \text{ha } 0 \leqq t < \beta, \\ f(t-\beta) & \text{ha } \beta \leqq t < \infty \end{Bmatrix}.$$

h^β megfelel a $\delta(t-\beta)$-nak.[2]

I. rész

Operátorokkal kapcsolatos előzetes tételek

Egy a operátort pszeudoanalitikusnak nevezünk, ha van olyan m egész szám, melyre

1. $al^m \in C$,
2. abból, hogy $al^m(t)=0$ a $\langle 0, t_1\rangle$ intervallumon ($t_1 \neq 0$) következik, hogy $al^m \equiv 0$, tehát $a \equiv 0$.

Például az s racionális függvényei pszeudoanalitikus operátorok,

$$r(s) = \frac{w_1(s)}{w_2(s)} \qquad (w_1, w_2 \text{ polinomok}),$$

továbbá általánosabban az s algebrai függvényei, melyeket $a(s)$-sel jelölünk szintén pszeudoanalitikus operátorok (lásd MIKUSIŃSKI [4]).

I. 1. lemma. *Ha a pszeudoanalitikus, akkor* $ae \in C$, *itt* $e=\{e^{-\frac{1}{t}}\}$.

BIZONYÍTÁS: $(al^m)(s^m e)=ae$; mivel $s^m e \in C$, tehát $ae \in C$, q. e. d.

I. 1. tétel. *Legyenek az a_i operátorok pszeudoanalitikusak és legyen* $0=\beta_0<\beta_1<\beta_2<\dots\ \beta_n\dots \to \infty$,[3] *akkor a* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i h^{\beta_i}$ *végtelen sor operátoros értelemben konvergens* (MIKUSIŃSKI [2]). *Itt h^β az eltolási operátort jelöli.*

BIZONYÍTÁS: Ha a végtelen sort e-vel megszorozzuk, kapjuk a $\sum_{i=0}^{\infty} a_i e h^{\beta_i}$ függvénysort. Az I. 1. lemma értelmében $a_i e \in C$ és a $\sum_{i=0}^{\infty} a_i e h^{\beta_i}$ függvénysor majdnem egyenletesen konvergens a $\langle 0, \infty)$-ben.

I. 2. tétel. *Ugyanazokat a feltevéseket tesszük, mint az* I. 1. *tételben. Ha* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i h^{\beta_i}=0$, *akkor* $a_i=0$, $i=0,1,\dots$.

BIZONYÍTÁS: Ha e-vel szorzunk, kapjuk, hogy

$$a_0 e + \sum_{i=1}^{\infty} a_i e h^{\beta_i} = 0.$$

[2] A *Dirac*-féle $\delta(t-\beta)$ függvény a klasszikus analízis módszereivel nem definiálható. Ezzel szemben ez a „függvény" az operátorszámításban egzakt módon jelentkezik, mint az eltolás h^β operátora, mely $\beta=0$ esetén az M hányadostest 1 egységelemébe megy át. Ez az operátorfogalom bevezetésének egyik nagy előnye. (A fordító megjegyzése.)

[3] A β_i-re vonatkozó ezen feltevések a következő tételekben is megmaradnak.

A $0 \leqq t < \beta_1$ intervallumon tehát $a_0 e(t) = 0$, vagyis $(a_0 l^m)(s^m e)(t) = 0$. Azonban, mivel $s^m e$ a 0 semmilyen környezetében sem azonosan 0 a *Titchmarsh*-tételből [11] következik, hogy $a_0 l^m(t) = 0$, midőn $t \in \langle 0, \beta_1)$; de tekintve, hogy a_0 pszeudoanalitikus, nyerjük, hogy $a_0 \equiv 0$. Ha most a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e h^{\beta_i}$ kifejezést sorra megszorozzuk $h^{-\beta_1}$, $h^{-\beta_2}, \ldots$-vel és a fenti meggondolást többször alkalmazzuk, kapjuk hogy $a_i \equiv 0$, ha $i = 0, 1, 2, \ldots$, q. e. d.

I. 1. *Megjegyzés.* A $\sum_{i=0}^{\infty} a_i h^{\beta_i}$ konvergenciája az $\{e^{-\frac{1}{t}}\}$-vel való szorzáson keresztül az abszolút és egyenletes konvergenciára vezethető vissza. Következésképp ilyen sorok összeadására, szorzására, analitikus függvénybe való helyettesítésére vonatkozóan ugyanazok a szabályok érvényesek, mint a hatványsorokra. Kiváltképp

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n h^{n\tau}\right) \qquad (\tau > 0)$$

mindig definiálható, mert az ismert számolási operátor sémával nyert

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n h^{n\tau}\right)^m \frac{1}{m!} = 1 + a_1 h^{\tau} + \left(a_2 + \frac{a_1^2}{2}\right) h^{2\tau} + \left(a_3 + a_1 a_2 + \frac{a_1^3}{3}\right) h^{3\tau} + \ldots$$

sor mindig konvergens.

I. 3. tétel. *Tekintsük az* $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t) h^{\beta_i}$ *sort, ahol* $a_i(t) \in C^n$. f *akkor és csakis akkor tartozik a* C^n *osztályba, ha* $a_i(0) = 0$, $a_i'(0) = 0, \ldots, a_i^{(n)}(0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ *(itt az* $a_i(t)$ *függvényeknek nem kell pszeudoanalitikusaknak lenniük).*

A bizonyítás nyilvánvaló.

I. 2. lemma. *Ha az* $f(t)$ *függvény abszolút folytonos, akkor* $s\{f(t)\} \in L$ *akkor és csakis akkor igaz, ha* $f(0) = 0$. $f \in L$ *helyett mondhatjuk azt is, hogy „f függvény", illetve* $f \notin L$ *helyett azt, hogy „f nem függvény".*

A bizonyítás az $\{f'(t)\} = s\{f(t)\} - f(0)$ formulából és abból a tényből következik, hogy az 1 operátor nem függvény, tehát az $f(0) \neq 0$ operátor sem az. (Azokat az operátorokat, melyek nem függvények, tulajdonképpeni operátoroknak nevezzük.)

Tekintsük most azokat az operátorokat, melyek az s-ben racionálisak:

$$r(s) = \frac{w_1(s)}{w_2(s)} \qquad (w_1 \text{ és } w_2 \text{ együtthatói komplex számok}).$$

I. 4. tétel. $r(s)$ *akkor és csakis akkor függvény, ha* grad $w_1 <$ grad w_2.[4]

BIZONYÍTÁS: A feltétel elégségessége MIKUSIŃSKI ([2] 29. o.) formuláiból következik. Ekkor

$$r(s) = \left\{\sum_{i=0}^{n} b_i t^{m_i} e^{\lambda_i t}\right\} \in C^{\infty}.$$

[4] Ha w polinom, akkor grad w alatt w fokszámát értjük.

A feltétel szükségességét vizsgálandó két esetet kell tárgyalnunk:
1. grad w_1 = grad w_2. Ekkor

$$r(s)=\frac{w_1(s)}{w_2(s)}=\frac{a_0^1 s^n+a_1^1 s^{n-1}+\ldots+a_n^1}{a_0^2 s^n+a_1^2 s^{n-1}+\ldots+a_n^2}=\frac{a_0^1}{a_0^2}\left[1+\frac{(a_1^2 a_1^1-a_0^1 a_1^2)s^{n-1}+\ldots}{a_0^1 a_1^2 s^n+\ldots}\right],$$

ahol $a_0^1 \neq 0$ és $a_0^2 \neq 0$. Ily módon $r(s)$-t egy függvény és egy tulajdonképpeni operátor összege gyanánt állítottuk elő. $r(s)$ tehát nem lehet függvény, mert ekkor az $\frac{a_0^1}{a_0^2}$ tulajdonképpeni operátor két függvény különbségeként lenne előállítható.

2. grad w_1 > grad w_2. Ebben az esetben $\frac{1}{r(s)}=\frac{w_2(s)}{w_1(s)}$ függvény (lásd elégségességet). Ha $r(s)$ függvény lenne, úgy az $1=r(s)\cdot\frac{1}{r(s)}$ tulajdonképpeni operátor is függvény lenne és így ellentmondást kapnánk.

I. 3. lemma. *Legyen* $r(s)=\frac{w_1(s)}{w_2(s)}$ *függvény* (grad w_1 < grad w_2). $r(s)(0)=0$ *akkor és csakis akkor, ha* grad w_1 < grad w_2-1.

BIZONYÍTÁS: *Elégségesség:* Ha a fenti feltétel teljesül, akkor $sr(s)$ függvény és az I. 2. lemmát alkalmazva kapjuk, hogy $r(s)(0)=0$.

A *szükségességet* bizonyítandó csak a grad w_1 = grad w_2-1 esetet kell megvizsgálnunk (ha grad w_1 > grad w_2-1, $r(s)$ az I. 4. tétel értelmében nem lehet függvény!). Itt $r(s)\cdot s \notin L$ és az I. 2. lemmát alkalmazva adódik, hogy $r(s)(0)\neq 0$.

E lemma általánosítható a következő értelemben:

I. 4. lemma. *Legyen* $r(s)=\frac{w_1(s)}{w_2(s)}$ *függvény* (grad w_1 < grad w_2) $\cdot$ $r(s)(0)=0$, $r(s)'(0)=0, \ldots, r(s)^{(n-1)}(0)=0$, *akkor és csakis akkor, ha*

grad w_1 < grad $w_2 - n$.

A következőkben a $\sum_{i=0}^{\infty} r_i(s)h^{\beta_i}$ sorokat fogjuk vizsgálni, ahol $r_i(s)$ az s racionális kifejezése.

I. 5. tétel. *Ahhoz, hogy a* $\sum_{i=0}^{\infty} r_i(s)h^{\beta_i}=f$ *sor függvényt állítson elő, szükséges és elégséges, hogy az összes* $r_i(s)$ *operátorok függvények legyenek.*

BIZONYÍTÁS: A feltétel *elégségessége* közvetlenül belátható, a *szükségességét* indirekt úton bizonyítjuk:

k legyen a legkisebb index, melyre $r_k(s)$ nem függvény. Legyen

$$g=f-\sum_{i=0}^{k-1} r_i(s)h^{\beta_i}=r_k(s)h^{\beta_k}+\sum_{i=k+1}^{\infty} r_i(s)h^{\beta_i} \tag{1}$$

és két esetet különböztetünk meg (lásd I. 4. tétel):

$$1.\quad r_k(s)=\frac{w_k^1(s)}{w_k^2(s)},\ \text{grad}\, w_k^1=\text{grad}\, w_k^2.$$

Írható, hogy

$$r_k(s) = \alpha + g_1,$$

ahol α komplex számoperátor és g_1 függvény (lásd az I. 4. tétel bizonyítását) és így

$$g - g_1 h^{\beta_k} = \alpha h^{\beta_k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} r_i h^{\beta_i}.$$

Szorozzuk meg az egyenletet $\frac{e}{\alpha}$-val és vezessük be a $\frac{g - g_1 h^{\beta_k}}{\alpha} = g_2$ jelölést, így kapjuk, hogy

$$g_2 e = \left(\frac{g - g_1 h^{\beta_k}}{\alpha}\right) e = e h^{\beta_k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{e}{\alpha} r_i(s) h^{\beta_i}.$$

Ebből az egyenletből következik, hogy

(2) $$e g_2(t) = 0 \quad \text{ha} \quad 0 \leqq t < \beta_k,$$

ami TITCHMARSH [11] tétele értelmében azt jelenti, hogy $g_2(t) = 0$, ha $0 \leqq t < \beta_k$ és (2) figyelembevételével

$$\int_{\beta_k}^{t} g_2(\tau) e^{-\frac{1}{t-\tau}} d\tau = e^{-\frac{1}{t-\beta_k}},$$

ha

$$\beta_k \leqq t < \beta_{k+1}.$$

Vezessük be a $\tau - \beta_k = \sigma$ és $t - \beta_k = T$ helyettesítéseket, alkalmazzuk a konvolúció kommutativitását, ily módon a következőt kapjuk:

$$\int_0^T g_2(T - \sigma + \beta_k) e^{-\frac{1}{\sigma}} d\sigma = e^{-\frac{1}{T}}.$$

Volterra-típusú integrálegyenletnek azonban nem lehetnek saját megoldásai, következésképp ellentmondásra jutottunk (lásd PETROVSZKIJ [8] 56. o.).

$$2. \quad r_k = \frac{w_k^1(s)}{w_k^2(s)},$$

$$\text{grad } w_k^1 > \text{grad } w_k^2.$$

Ebben az esetben egyszerűen megszorozzuk (1)-et $\frac{e}{r_k(s)}$-sel és így

$$g \frac{e}{r_k(s)} = e h^{\beta_k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} r_i(s) \frac{e h^{\beta_i}}{r_k(s)}.$$

Bevezetve a $g_2 = \frac{g}{r_k(s)}$ jelölést, a bizonyítás teljesen hasonlóan történhet, mint az 1. esetben.

I. 6. tétel. *Legyen*

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} r_i(s) h^{\beta_i}, \quad \text{ahol } r_i(s) = \frac{w_i^1(s)}{w_i^2(s)}.$$

$f \in C^{n-1}$, akkor és csakis akkor igaz, ha $\operatorname{grad} w_0^1 < \operatorname{grad} w_0^2$ *és* $n < \operatorname{grad} w_i^2 - \operatorname{grad} w_i^1$, *ha* $i = 1, 2, \ldots, (C^{-1} = K)$.

BIZONYÍTÁS: *Szükségesség:* $f \in C^{n-1}$-ből következik, hogy f függvény, tehát az előző tétel értelmében az $r_i(s)$ operátorok is függvények (vagyis kell, hogy $\operatorname{grad} w_0^1 < \operatorname{grad} w_0^2$ legyen). Az $r_i(s)$ függvények tehát a C^∞ osztályhoz tartoznak (lásd az I. 4. tétel bizonyítását), és így a C^{n-1} osztályhoz is. Az I. 3. tételből és az I. 4. lemmából következik a közölt fokszámbecslés.

Az I. 3. tételből, illetve az I. 4. lemmából a feltétel *elégségessége* is következik.

I. 7. tétel. *Legyen $g \in C$ és $f = \sum_{i=0}^{\infty} r_i(s) h^{\beta_i} \in C^n$, akkor $f \cdot g \in C^{n+1}$.* [5]

BIZONYÍTÁS: A feltevés értelmében igaz, hogy $r_i \in C^\infty$ (lásd az I. 4. tétel bizonyítását), továbbá az I. 4. lemmából és az I. 6. tételből következik, hogy

$$(4) \qquad r_i(s) = 0, \ldots, r_i(s)^{(n)}(0) = 0, \quad \text{ha } i = 1, 2, \ldots.$$

Ha most többszörösen alkalmazzuk az

$$\left(\int_0^t r_i(s)(t-\tau) g(\tau)\, d\tau\right)' = \int_0^t r_i(s)'(t-\tau) g(\tau)\, d\tau + r_i(s)(0) g(t)$$

formulát, és tekintetbe vesszük a (4) feltételeket, kapjuk, hogy $r_i(s) g \in C^{n+1}$ és

$$(g r_i(s))(0) = 0, (g r_i(s))'(0) = 0, \ldots, (g r_i(s))^{(n+1)}(0) = 0, \quad \text{ha } i = 1, 2, \ldots.$$

Az I. 3. tétel befejezi a bizonyítást.

I. 8. tétel. *Legyen*

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} r_i(s) h^{\beta_i},$$

ahol

$$r_i(s) = \frac{w_i^1(s)}{w_i^2(s)}.$$

A akkor és csakis akkor véges disztribució, ha van olyan N szám, melyre

$$(5) \qquad \operatorname{grad} w_i^1 - \operatorname{grad} w_i^2 < N, \qquad i = 0, 1, 2 \ldots$$

fennáll. (Egy disztribuciót, melynek tartója a $\langle 0, \infty)$ intervallum, akkor nevezünk végesnek, ha $s^m f$ alakban írható fel, ahol $f \in C$; lásd L. SCHWARTZ [10].)

[5] Ez a tétel tetszőleges függvényekre nem igaz. [1]-ben találunk példát olyan $x(t)$ folytonos függvényre, melyre $x.x$ sehol sem differenciálható.

BIZONYÍTÁS: Tételezzük fel, hogy (5) fennáll. Egyszerűen írható, hogy

$$A = s^{N+1}f, \quad f = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{r_i(s)}{s^{N+1}} h^{\beta_i}.$$

Az I. 6. tétel alapján $f \in C$.

Tételezzük most fel, hogy (5) nem áll fenn. Akkor nem található olyan N szám, melyre a

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{r_i(s)}{s^{N+1}} h^{\beta_i}$$

sor függvényt állítana elő (I. 6. tétel), következésképp A nem lehet véges disztribució.

I. 9. tétel. *Legyen*

$$A = r_1(s) \sum_{i=0}^{\infty} (r(s))^i h^{\beta_i},$$

ahol

$$r(s) = \frac{w_1(s)}{w_2(s)}, \quad r_1(s) = \frac{w_1^1(s)}{w_2^1(s)} \quad \textit{és} \quad \operatorname{grad} w_1 > \operatorname{grad} w_2.$$

Ekkor A nem véges disztribució.

Ezen tétel azonnal következik az I. 8. tételből.

I. 2. *megjegyzés.* Abban az esetben, ha (5) nem teljesül, az

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} r_i(s) h^{\beta_i}$$

sor végtelen disztribuciót állít elő. Ugyanis A a következőképp írható:

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} s^{n_i} \frac{r_i(s)}{s^{n_i}} h^{\beta_i} = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^{(n_i)}(t-\beta_i) * \left(\frac{r_i(s)}{s^{n_i}}\right)(t);$$

ahol $n_i = \operatorname{grad} w_i^1 - \operatorname{grad} w_i^2 + 1$ és $\delta^{(n)}(t)$ a *Dirac-δ-függvény* n-edik deriváltja,

$$\delta^{(-n)}(t) = \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{n-1} H(\tau) \cdot d\tau \dots d\tau,$$

$$H(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqq t < \infty, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

továbbá $\left(\frac{r_i(s)}{s^{n_i}}\right)(t)$ folytonos függvény, melynek tartója a $\langle 0, \infty)$ intervallum (ezzel a függvénnyel kapcsolatos számításokat lásd Mikusiński [2]-ben), végül $*$ a disztribucióértelemben vett konvolúciót jelenti (lásd SCHWARTZ [10]). Az utolsónak felírt sor disztribucióértelemben konvergens és egy végtelen disztribuciót állít elő.

II. rész

Közönséges differencia-differenciálegyenletek

A következőkben az alábbi állandó együtthatós, lineáris differencia-differenciálegyenletet fogjuk vizsgálni:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i} x(t) - \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i}{dt^i} x(t-\tau) = f(t), \tag{1}$$

ahol $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, $0 \leqq t < \infty$, $\tau > 0$, $f(t) \in C$ és $x(t)=0$ ha $t<0$.

Az előírt kezdeti feltételek:

$$x^{(k)}(+0) = d_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, \max(n, m) - 1. \tag{2}$$

Az

$$x^{(k)} = s^k x - s^{k-1} x(+0) - \ldots - x^{(k-1)}(+0) \tag{3}$$

operátoros formula alkalmazásával (1)-ből a következő operátoros egyenletet nyerjük:

$$x\left(\sum_{i=0}^{n} a_i s^i - h^\tau \sum_{i=0}^{m} b_i s^i\right) = \{f(t)\} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i s^i - h^\tau \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i s^i, \tag{4}$$

ahol

$$\begin{aligned} \alpha_i &= a_{i+1} d_0 + a_{i+2} d_1 + \ldots a_n d_{n-i-1} \qquad (i=0, 1, \ldots, n-1),\\ \beta_i &= b_{i+1} d_0 + b_{i+2} d_1 + \ldots b_m d_{m-i-1} \qquad (i=0, 1, \ldots, m-1). \end{aligned} \tag{5}$$

(4)-ből

$$x = \frac{\{f(t)\} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i s^i - h^\tau \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i - h^\tau \sum_{i=0}^{m} b_i s^i}$$

vagy egyszerű átalakítással

$$\begin{aligned} x = {} & \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} + \frac{A}{\left(\sum_{i=0}^{n} a_i s^i\right)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right)^{k-1} h^{k\tau} + \\ & + \frac{\{f(t)\}}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right)^{k} h^{k\tau}, \end{aligned} \tag{6}$$

ahol

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i s^i \sum_{i=0}^{m} b_i s^i - \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i s^i \sum_{i=0}^{n} a_i s^i.$$

II. 1. lemma. *Az*

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i s^i \sum_{i=0}^{m} b_i s^i - \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i s^i \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$$

polinom fokszáma nem nagyobb $\max(n, m) - 1$*-nél.*

BIZONYÍTÁS: A szimmetria miatt elegendő a tételt az $n \geqq m$ esetre bizonyítani. Továbbá vehetünk $n = m$-et, ugyanis a hiányzó b_i-ket egyszerűen nullákkal pótolhatjuk.

Így kapjuk, hogy

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i s^i \sum_{j=0}^{n} b_j s^j - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k s^k \sum_{l=0}^{n} a_l s^l =$$

$$= \sum_{i,j} \alpha_i b_j s^{i+j} - \sum_{k,l} \beta_k a_l s^{k+l} = \sum_{\mu=0}^{2n-1} c_\mu s^\mu.$$

Ha $2n - 1 \geqq \mu \geqq n$, érvényes, hogy

$$c_\mu = \sum_{\nu=0}^{n-1} (\alpha_\nu b_{\mu-\nu} - \beta_\nu a_{\mu-\nu}).$$

Alkalmazzuk most az (5) formulákat, akkor nyerjük, hogy

$$c_\mu = \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\sum_{\varrho=1}^{\mu-\nu} a_{\nu+\varrho} d_{\varrho-1} b_{\mu-\nu} - \sum_{\sigma=1}^{\mu-\nu} b_{\nu+\sigma} d_{\sigma-1} a_{\mu-\nu} \right) =^{6}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=1}^{\mu-\nu} (a_{\nu+\varrho} b_{\mu-\nu} - b_{\nu+\varrho} a_{\mu-\nu}) d_{\varrho-1} = \sum_{\varrho=1}^{n} d_{\varrho-1} \left(\sum_{\nu=0}^{\mu-1} a_{\nu+\varrho} b_{\mu-\nu} - b_{\nu+\varrho} a_{\mu-\nu} \right) =$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{n} d_{\varrho-1} \sum_{\nu=\mu-n}^{n-\varrho} (a_{\nu+\varrho} b_{\mu-\nu} - b_{\nu+\varrho} a_{\mu-\nu}).$$

A $\nu + \varrho = \tau$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$c_\mu = \sum_{\varrho=1}^{n} d_{\varrho-1} \sum_{\tau=\mu+\varrho-n}^{n} (a_\tau b_{\mu+\varrho-\tau} - b_\tau a_{\mu+\varrho-\tau}),$$

ha $2n - 1 \geqq \mu \geqq n$. Ha most még bevezetjük a $\mu + \varrho - \tau = \sigma$ indexet, úgy

$$c_\mu = \sum_{\varrho=1}^{n} d_{\varrho-1} \left(\sum_{\tau=\mu+\varrho-n}^{n} a_\tau b_{\mu+\varrho-\tau} - \sum_{\sigma=\mu+\varrho-n}^{n} a_\sigma b_{\mu+\varrho-\sigma} \right) = 0,$$

ha $2n - 1 \geqq \mu \geqq n$, q. e. d.

Legyen most $n \geqq m$. Vizsgáljuk meg részletesen a kapott (6) megoldást. (6) első tagja a C^∞ osztályba tartozik, a második előállítható $g = \sum_{i=1}^{\infty} r_i(s) h^{i\tau}$ alakban, ahol a II. 1. lemma értelmében az $r_i(s)$-ekben fellépő fokszámkülönbségek legalább

[6] Ebben $a_\lambda = 0$, ha $\lambda > n$.

$n+1$-el egyenlőek; az I. 6. tétel szerint tehát $g \in C^{n-1}$. A harmadik tag felírható $\{f(t)\} \cdot g_1$ alakban, ahol $g_1 = \sum_{i=0}^{\infty} r_i(s) h^{i\tau}$, itt az $r_i(s)$-ekben fellépő fokszámkülönbségek legalább n-nel egyenlőek. Az I. 7. tétel alapján $\{f(t)\} g_1 \in C^{n-1}$. Következésképpen $x \in C^{n-1}$ és $x^{(n)} \in K$ továbbá $x^{(n)}$ ugráshelyei csak a $k\tau$ $(k=1, 2, \dots)$ pontokban vannak és az ugrások végesek. Mivel ilyen x-re nézve (3) formula érvényes, kimondhatjuk a következő tételt:

II. 1. tétel. *Legyen $n \geqq m$, $f(t) \in C$. Az* (1) *egyenletnek az előírt* (2) *kezdeti feltételek mellett egyetlen egy megoldása van, ezt a megoldást a* (6) *kifejezés állítja elő. Az x megoldásra fennáll, hogy $x \in C^{n-1}$ és $x^{(n)} \in K$, ahol $x^{(n)}$ ugráshelyei csak a $k\tau$ $(k=1, 2, \dots)$ pontokban fekhetnek és az ugrások végesek.*

II. 1. *Megjegyzés.* A (6) formula által előállított megoldás explicite felírható mint a t változó függvénye; ehhez csak a MIKUSIŃSKI [2] által meghatározott formulákat kell alkalmazni.

II. 2. *Megjegyzés.* Ha $f \in C_0^\infty$ (vagyis $f \in C^\infty$ és $f^{(n)}(0)=0$ ha $n=0, 1, 2, \dots$), akkor x a $k\tau$ pontok között tetszőlegesen sokszor differenciálható, továbbá a $k\tau$ $(k=1, 2, \dots)$ pontokban először x $((n-m)k+m)$-edik deriváltjának vannak már véges ugrásai. (Ez belátható, ha a (6)-ban fellépő fokszámkülönbségeket pontosabban meghatározzuk.)

Tekintsük most az $m > n$ esetet. Mint (6)-ból látható, a végtelen sorok együtthatóinak fokszámkülönbségei minden határon túl nőnek. Nem várhatjuk tehát, hogy (1) differencia-differenciálegyenlet megoldása mindig függvény legyen. Ezért feltételeket fogunk megadni, melyek teljesülése esetén (1) megoldása függvényt állít elő.

II. 2. tétel. *Legyen $m > n$ és $f \in C_0^\infty$. A* (2) *kezdeti feltételeket előírva az* (1) *egyenlet megoldása akkor és csakis akkor függvény, ha $A \equiv 0$.*[7]

Ha az $A \equiv 0$ feltétel teljesül, akkor érvényes, hogy $x \in C^\infty$, míg ha $A \not\equiv 0$, a (6) *formula által megadott x megoldás végtelen disztribuciót állít elő.*

Ezen tétel következik a (6) formulából, az I. 9. tételből és az I. 2. megjegyzésből.

Most elejtjük az $f \in C_0^\infty$ korlátozó feltételt és csak azt követeljük meg, hogy f függvény legyen. Ekkor érvényes a

II. 3. tétel. *Legyen $m > n$ és legyen* (1)-*nek az*

$$(2)_0 \qquad x_0^{(k)}(+0) = d_k^0, \qquad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

előírt kezdeti feltételeket kielégítő x_0 megoldása függvény. Akkor (1)-*nek azon x megoldása, mely kielégíti az*

$$x^{(k)}(+0) = d_k, \qquad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

kezdeti feltételeket, akkor és csakis akkor függvény, ha fennáll, hogy

$$(7) \qquad A(d_0 - d_0^0, d_1 - d_1^0, \dots, d_{m-1} - d_{m-1}^0) \equiv 0.$$

[7] Az A polinom definíciójára vonatkozóan lásd a II. 1. lemmát. A célból, hogy az A polinomnak a $d_0, d_1, \dots, d_{m-1}$ kezdeti feltételektől való függését szembeötlővé tegyük, az $A(d_0, d_1, \dots d_{m-1})$ jelölést is fogjuk alkalmazni.

BIZONYÍTÁS: Képezzük az $x-x_0$ különbséget. Ezen különbség megfelel az

$$x^{(k)}(+0)-x_0^{(k)}(+0) = d_k-d_k^0, \qquad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

kezdeti feltételeknek és eleget tesz az (1) homogén egyenletnek, azaz $f=0\in C_0^\infty$. Következésképp az $x-x_0$ különbségre alkalmazható a II. 2. tétel és így a (7) feltételhez jutunk.

Mivel (7) teljesülése esetén $x-x_0$ a C^∞ osztályba tartozik, fenti tétel az alábbi kijelentéssé élesíthető: Jelölje B az L, K, C^n vagy C^∞ osztályok valamelyikét. x akkor és csakis akkor tartozik a B osztályba, ha $x_0\in B$ fennáll.

II. 3. *Megjegyzés.* Ha $f=\sum_{i=0}^{\infty} r_i(s)h^{\beta_i}$, akkor annak eldöntéséhez, hogy van-e egyáltalán olyan x_0 megoldás, mely függvény, bevonhatók az I. 5. és I. 6. tételek (lásd 3. példa). Egy olyan rendszer, melynek állapotát az (1) egyenlet írja le ($m>n$) instabil; ezt mondja ki a következő tétel.

II. 4. tétel. *Legyen $m>n$ és legyen* (1)*-nek, a* $(2)_0$ *kezdeti feltételeket kielégítő x_0 megoldása függvény.*

A $(2)_0$ *kezdeti feltételek tetszőlegesen kicsiny környezetben vannak* (1)*-nek olyan „megoldásai", melyek már nem függvények. Pontosabban: Azon kezdeti feltételek, melyeknek a $(d_0, d_1, d_2, \dots d_{m-1})$ kezdeti feltételek m-dimenziós lineáris terében* (1) *x_0 függvénymegoldásai felelnek meg, egy legfeljebb* $(m-1)$ *dimenziós lineáris sokaságot képeznek.*

BIZONYÍTÁS: A II. 3. tétel miatt elegendő azt megmutatni, hogy azon $(d_0, d_1, \dots, \dots, d_{m-1})$ kezdeti feltételek, melyek eleget tesznek (7)-nek, egy legfeljebb $(m-1)$ dimenziós lineáris sokaságot képeznek. $A(d_0-d_0^0, d_1-d_1^0, \dots, d_{m-1}-d_{m-1}^0)$ s-ben $(m-1)$-edfokú polinom (lásd II. 1. lemma), melynek együtthatói $d_k-d_0^k$ ($k=0, 1, \dots \dots, m-1$) homogén, lineáris függvényei. (7) azt jelenti, hogy A összes együtthatói eltűnnek; a $d_k-k_k^0$ mennyiségeknek ($k=0, 1, \dots, m-1$) így m lineáris homogén egyenletet kell kielégíteniök. Mivel — minthogy arról könnyen meggyőződhetünk — $d_{m-1}-d_{m-1}^0$ együtthatói az egyes egyenletekben

$$\underbrace{-a_0b_m, \ -a_1b_m, \ \dots, \ -a_nb_m, 0, \dots, 0}_{m}$$

és feltevésünk értelmében $a_nb_m\neq 0$, az egyenletrendszer rangja nem lehet nulla. Ily módon bebizonyítottuk, hogy azok a $d_0, d_1, \dots, d_{m-1}$ értékek, melyek a (7) feltételnek eleget tesznek, egy legfeljebb $(m-1)$-dimenziós lineáris sokaságot képeznek. A tétel első része abból következik, hogy egy legfeljebb $(m-1)$-dimenziós sokaságnak sohasem lehet teljes környezete.

II. 5. tétel. *Abban az esetben, ha a $\sum_{i=0}^{m} b_is^i$ és a $\sum_{i=0}^{n} a_is^i$ polinomoknak nincs közös osztójuk (számosztók kizárva), az* (1) *egyenletnek legfeljebb egy függvénymegoldása lehet.*

BIZONYÍTÁS (indirekt): Tételezzük fel, hogy több függvénymegoldás létezik.

Ekkor a II. 3. tétel alapján legalább egy olyan $d_j \neq d_j^0$ $(0 \leqq j \leqq m-1)$ létezne, melyre az

$$A(d_0 - d_0^0, \ldots, d_j - d_j^0, \ldots, d_{m-1} - d_{m-1}^0) =$$

(8)
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i s^i \sum_{i=0}^{m} b_i s^i - \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i s^i \sum_{i=0}^{n} a_i s^i \equiv 0$$

azonosság érvényes lenne. $d_j \neq d_j^0$-ból következik, hogy

$$\sum_{i=0}^{m-1} \beta_i s^i \not\equiv 0$$

((5) determinánsa $b_m^m \neq 0$). Osszuk (8)-at $\sum_{i=0}^{m-1} \beta_i s^i \sum_{i=0}^{m} b_i s^i$-vel, úgy a következőt kapjuk:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i s^i}{\sum_{i=0}^{m-1} \beta_i s^i} \equiv \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}.$$

Ellentmondásra jutottunk, hiszen feltételezésünk értelmében a $\sum_{i=0}^{m} b_i s^i$ és $\sum_{i=0}^{n} a_i s^i$ polinomok nem egyszerűsíthetők.[8]

Példák:

1. $x''(t) - x'(t-\tau) - x(t-\tau) = f, \quad \tau > 0,$

$x(+0) = 1, \quad x'(+0) = 1, \quad f \in C.$

$$s^2 x - h^\tau x(s+1) = f + s + 1 - h^\tau$$

$$x = \frac{s+1}{s^2} + \frac{2s+1}{s^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{s+1}{s^2}\right)^{k-1} h^{k\tau} + \frac{f}{s^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s+1}{s^2}\right)^k h^{k\tau}.$$

Az $\frac{1}{s^n} = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\}$ formula alkalmazásával a következőt kapjuk:

$$x(t) = 1 + t + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{(t-k\tau)^{k+i+1}}{(k+i+1)!} \times \left[\binom{k-1}{i-1} + 2\binom{k-1}{i} \right] + \right.$$

$$\left. + (t-\tau k)^{k+1} \left[\frac{(t-k\tau)^k}{(2k+1)!} + \frac{2}{(k+1)!} \right] \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t f(t-u) \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(u-k\tau)^{k+i+1}}{(k+i+1)!} du.$$

Ebben a formulában természetesen $(t-k\tau)^n = 0$ helyettesítendő, ha $t - k\tau \leqq 0$,

[8] A II. 2 és II. 3 tételekből következik, hogy

a) Ha n = 0 az (1) egyenletnek legfeljebb egy függvénymegoldása lehet.

b) Ha $n = 0$ és $f \in C_0^\infty$, az (1) egyenletnek nincs függvénymegoldása.

Ehhez csak azt kell belátnunk, hogy ha $n = 0$, az A polinom sohasem lehet azonosan zérus. (Ford. megjegyzése.)

vagyis véges intervallumon a szereplő összegek végesek.

2. $x(t)-x'(t-\tau)=0, \quad x(+0)=1, \qquad \tau>0.$

Itt $A=-1\neq 0$. Tehát az $x-h^\tau sx=-h^\tau$ operátoregyenlet alábbi megoldása végtelen disztribució:

$$x=-\sum_{k=0}^{\infty} s^k h^{\tau(k+1)}=-\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{(k)}(t-\tau[k+1]).$$

3. Tekintsük az alábbi egyenletet

$$x(t)-x'(t-1)=e^t, \; x(+0)=d_0,$$

és határozzuk meg az összes olyan megoldást, mely függvényt állít elő.

Írjuk át az egyenletet operátoros alakba:

$$x-hsx=\frac{1}{s-1}-d_0h$$

ezt megoldva:

$$x=\frac{1}{(s-1)(1-hs)}-\frac{d_0h}{1-hs}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k}{s-1}h^k-\sum_{k=1}^{\infty}d_0s^{k-1}h^k=$$

$$=\frac{1}{s-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-d_0)s^k+d_0s^{k-1}}{s-1}h^k.$$

Az I. 6. tétel alapján x akkor és csakis akkor függvény, ha az $(1-d_0)s^k+d_0s^{k-1}$ polinom fokszáma minden k-ra kisebb egynél, ami csak úgy lehetséges, hogy $1-d_0=0$, $d_0=0$. Utóbbinak azonban nincs értelme, következésképp fenti egyenletnek nincs függvénymegoldása.

4.

$$x(t)-x'(t-\tau)=\begin{cases} e^{\alpha t} & \text{ha } 0\leqq t\leqq\tau \\ e^{\alpha t}-\alpha e^{\alpha(t-\tau)} & \text{ha } \tau<t<\infty\end{cases}, \quad x(+0)=d_0.$$

Keressük ezen egyenlet összes függvénymegoldásait. Az egyenlet operátoros alakja

$$x-sh^\tau x+d_0h=\frac{1-\alpha h^\tau}{s-\alpha}.$$

Ebből

$$x=\frac{1-\alpha h^\tau(1-d_0)-d_0h^\tau s}{(s-\alpha)(1-sh^\tau)}.$$

Ha $d_0=d_0^0=1$, akkor

$$x_0=\frac{1}{s-\alpha}=\{e^{\alpha t}\}.$$

Az így kapott megoldás függvény, a többi függvénymegoldást meghatározandó meg kell vizsgálnunk az $A(d_0-d_0^0)$ polinomot.

Esetünkben $A(d_0-d_0^0)=-(d_0-d_0^0)$. Így az $A\equiv 0$ feltétel egyenértékű a $d_0=d_0^0$ feltétellel; ez azt jelenti, hogy $x_0=e^{\alpha t}$ az egyetlen függvénymegoldás.

5. ($*$)

$$x''(t)+x'(t)-2x(t)-x'''(t-\tau)-2x''(t-\tau)+2x'(t-\tau)+x(t-\tau) = 0$$

$$x(+0) = d_0,\ x'(+0) = d_1,\ x''(+0) = d_2, \qquad \tau>0.$$

Keressük a függvénymegoldásokat. (5) operátoros alakja:

$$x(s^2+s-2)-h^\tau x(s^3+2s^2-2s-1) = d_0 s+d_0+d_1-$$
$$-h^\tau[s^2 d_0+s(2d_0+d_1)-2d_0+2d_1+d_2].$$

Számítsuk ki az A polinomot:

$$A = (d_0 s+d_0+d_1)(s^3+2s^2-2s-1)-$$
$$-(s^2 d_0+s[2d_0+d_1]-2d_0+2d_1+d_2)(s^2+s-2).$$

A II. 2. tétel értelmében x akkor és csakis akkor függvény, ha $A\equiv 0$. Ebből egyszerű számolással a

$$-5d_0+3d_1+2d_2 = 0,$$
$$3d_0-2d_1-d_2 = 0,$$
$$2d_0-d_1-d_2 = 0$$

homogén egyenletrendszerre jutunk, melynek megoldásai:

$$d_0=d_1=d_2.$$

A (6) formula alapján pedig

$$x = \frac{d_0+d_0+sd_0}{s^2+s-2} = \frac{d_0(s+2)}{s^2+s-2} = \frac{d_0}{s-1} = \{d_0 e^t\}.$$

Eddig az (1) egyenlet megoldásait a $C^{\max(n,m)-1}K$ osztály elemei között kerestük ($x\in C^{\max(n,m)-1}K$, ha $x\in C^{\max(n,m)-1}$ és $x^{\max(n,m)}\in K$). Ez abból következett, hogy az (1) differencia-differenciálegyenletnek a (4) operátoregyenletbe való átírásakor a (3) formulát alkalmaztuk. A következőkben keressük (1) azon x függvénymegoldásait, melyek a $j\tau$ ($j=0,1,2,\ldots$) pontok között max (n, m)-szer folytonosan differenciálhatók, míg a $j\tau$ ($j=0, 1, 2, \ldots$) pontokban úgy x-nek, mint az $x^{(k)}$, $k=1, \ldots,$ max (n, m) deriváltaknak véges ugrásaik lehetnek. Mivel ilyen függvényekre (3) helyett az[9]

$$(3') \qquad x^{(k)} = s^k x - \sum_{j=0}^{\infty}(s^{k-1}x_{j\tau}+s^{k-2}x'_{j\tau}+\ldots+x_{j\tau}^{(k-1)})h^{j\tau}$$

összefüggés érvényes, ahol $x_{j\tau}, x'_{j\tau}, \ldots, x_{j\tau}^{(k-1)}$ az x függvény és deriváltjainak a $j\tau$ pontokban fellépő ugrásait jelentik, a (2) kezdeti feltételek helyett az

$$(2') \qquad x_{j\tau}^{(k)} = d_k^j, \qquad k = 0, 1, \ldots, \max(n, m)-1;\ j = 0, 1, 2, \ldots$$

feltételeket kell előírnunk. (3′) következtében (1) az

$$(4') \quad x\left(\sum_{i=0}^{n} a_i s^i - h^\tau \sum_{i=0}^{m} b_i s^i\right) = \{f(t)\}^* + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i^j s^i\right)h^{j\tau} - h^\tau \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{m-1}\beta_i^j s^i\right)h^{j\tau}$$

[9] Lásd MIKUSIŃSKI [2] 110. o., ahol a formula a $k=1$ esetben le van vezetve.

operátoros alakban írható, amelyben α_i^j és β_i^j azokból a formulákból számíthatók, melyeket az (5) formulákból a j index hozzácsatolásával nyerünk. (4′)-ből kapjuk, hogy

$$x=\frac{\{f(t)\}+\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i^j s^i\right)h^{j\tau}-h^{\tau}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{m-1}\beta_i^j s^i\right)h^{j\tau}}{\sum_{i=0}^{n}a_i s^i-h^{\tau}\sum_{i=0}^{m}b_i s^i},$$

vagy

$$x=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i^j s^i}{\sum_{i=0}^{n}a_i s^i}h^{j\tau}+\frac{\{f(t)\}}{\sum_{i=0}^{n}a_i s^i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sum_{i=0}^{m}b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n}a_i s^i}\right)^k h^{k\tau}+ \tag{6'}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{k}\frac{A_j}{\left(\sum_{i=0}^{n}a_i s^i\right)^2}\left(\frac{\sum_{i=0}^{m}b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n}a_i s^i}\right)^{k-j}\right]h^{(k+1)\tau},$$

ahol

$$A_j=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i^j s^i\sum_{i=0}^{m}b_i s^i-\sum_{i=0}^{m-1}\beta_i^j s^i\sum_{i=0}^{n}a_i s^i. \tag{8'}$$

A (6′) egyenlet a (6) egyenlettel hasonlóan tárgyalható, és kimondhatjuk az alábbi tételt:

II. 1′. tétel. *Legyen $n\geqq m$. Az (1) egyenletnek az előírt (2′) kezdeti feltételek mellett egyetlen egy x megoldása van, ezt a megoldást a (6′) kifejezés állítja elő. x a $j\tau$ $(j=0, 1, \ldots)$ pontok között n-szer folytonosan differenciálható, míg a $j\tau$ $(j=0, 1, \ldots)$ pontokban mind x-nek mind $x', \ldots, x^{(n)}$ deriváltjainak véges ugrásai lehetnek.*[10]

Az $m>n$ esetben (1) megoldásának vizsgálatában fontos szerepe van az A polinomnak (lásd II. 2, II. 3, II. 4 tételt). Amennyiben vizsgálatainkat arra az esetre korlátozzuk, mikor a kezdeti feltételek csak véges számú pontban vannak előírva, vagyis (2′) helyett az

$$x_{j\tau}^{(k)}=d_k^j,\qquad k=0, 1, \ldots, m-1;\ j=0, 1, \ldots, M, \tag{2''}$$

$$d_k^j=0,\qquad k=0, 1, \ldots, m-1;\ j=M+1, M+2, \ldots,$$

feltételek érvényesek, úgy ismét megadhatunk egy polinomot, mely eldönti, hogy (4′) megoldásai mikor állítanak elő véges disztribuciókat. Tekintsük a

$$B_M=\sum_{j=0}^{M}(A_j)\left(\sum_{i=0}^{n}a_i s^i\right)^j\left(\sum_{i=0}^{m}b_i s^i\right)^{M-j}$$

polinomot, úgy igaz a következő tétel.

[10] $x, x', \ldots, x^{(n-1)}$ ugrásai a (2′) feltételeken keresztül vannak előírva.

II. 2′. tétel. *Legyen* $f \in C_0^\infty$, $m > n$ *és a kezdeti feltételek csak véges számú pontban legyenek előírva.* (4′) *akkor és csakis akkor véges disztribució, ha* $B_M \equiv 0$.

BIZONYÍTÁS: Tekintsük a (6′) formulát. Feltevéseink értelmében az első két végtelen sor függvényt állít elő. Az utolsó sor a következőképp írható:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{k}\frac{A_j}{\left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i s^i\right)^2}\left(\frac{\sum\limits_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i s^i}\right)^{k-j}\right] h^{(k+1)\tau} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{\left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i s^i\right)^{k+2}} h^{(k+1)\tau},$$

ahol

$$B_k = \sum_{j=0}^{k}(A_j)\left(\sum_{i=0}^{n} a_i s^i\right)^j\left(\sum_{i=0}^{m} b_i s^i\right)^{k-j}.$$

(2″)-ből $A_k = 0$, ha $k > M$, tehát

$$B_{M+l} = \left(\sum_{i=0}^{m} b_i s^i\right)^l B_M, \qquad l = 0, 1, 2, \dots .$$

Ezzel (6′) harmadik végtelen összegére az alábbi előállítást kapjuk:

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k h^{(k+1)\tau}}{\left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i s^i\right)^{k+2}} = \sum_{k=0}^{M-1}\frac{B_k h^{(k+1)\tau}}{\left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i s^i\right)^{k+2}} + B_M\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\sum\limits_{i=0}^{m} b_i s^i\right)^k h^{(k+M+1)\tau}}{\left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i s^i\right)^{k+M+2}}.$$

Az I. 9. tétel szerint pedig x csak akkor véges disztribució, ha a $B_M \equiv 0$ feltétel teljesül. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Teljesen hasonlóan, a II. 3. és II. 4 tételekkel analóg tételeket is megfogalmazhatjuk a B_M polinom segítségével.

II. 4. *Megjegyzés.* Az ebben a részben ismertetett módszerrel mind többszörös differenciákkal bíró differencia-differenciálegyenletek

$$\sum_{\mu=0}^{p}\sum_{i=0}^{n_\mu} a_{\mu i}\frac{d^i}{dt^i}x(t-\tau_\mu) = f(t), \ \tau_\mu \geqq 0, \qquad \mu = 0, 1, \dots, p,$$

mind differencia-differenciálegyenletrendszerek

$$\sum_{\mu=0}^{p_j}\sum_{i=0}^{n_\mu^j} a_{\mu i}^j\frac{d^i}{dt^i}x_j(t-\tau_\mu^j) = f_j(t), \ \tau_\mu^j \geqq 0, \qquad \mu = 0, 1, \dots, p_j, \ j = 1, 2, \dots, m$$

is tárgyalhatók.

III. rész

Parciális differencia-differenciálegyenletek

Tekintsük az alábbi állandó együtthatós, lineáris parciális differencia-differenciálegyenletet:

$$(1)\qquad \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}x(\lambda,t)}{\partial\lambda^{\mu}\partial t^{\nu}}+\sum_{\mu=0}^{m_1}\sum_{\nu=0}^{n_1}\beta_{\mu\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}x(\lambda,t-\tau)}{\partial\lambda^{\mu}\partial t^{\nu}}=\varphi(\lambda,t),$$

$$(\lambda_1\leqq\lambda\leqq\lambda_2),\ 0\leqq t<\infty,\ \tau>0 \text{ és } x(\lambda,t)=0, \text{ ha } t<0.$$

A II. (3) operátoros formula alkalmazásával az (1) egyenlet a következő operátordifferenciálegyenletbe megy át:

$$(2)\qquad \sum_{\mu=0}^{m}w_{\mu}(s)x^{(\mu)}+h^{\tau}\sum_{\mu=0}^{m_1}u_{\mu}(s)x^{(\mu)}=f(\lambda).$$

Itt

$$(3)\qquad \begin{aligned} w_{\mu}(s)&=\alpha_{\mu n}s^{n}+\dots\alpha_{\mu 0}, && \mu=0,1,\dots,m,\\ u_{\mu}(s)&=\beta_{\mu n_1}s^{n_1}+\dots\beta_{\mu 0}, && \mu=0,1,\dots,m_1,\end{aligned}$$

és

$$f(\lambda)=\{\varphi(\lambda,t)\}+\sum_{\varkappa=0}^{n-1}s^{n-\varkappa-1}\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{\varkappa}\alpha_{\mu,n-\varkappa+\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}x(\lambda,0)}{\partial\lambda^{\mu}\partial t^{\nu}}+$$

$$(4)\qquad +h^{\tau}\sum_{\varkappa=0}^{n_1-1}s^{n_1-\varkappa-1}\sum_{\mu=0}^{m_1}\sum_{\nu=0}^{\varkappa}\beta_{\mu,n_1-\varkappa+\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}x(\lambda,0)}{\partial\lambda^{\mu}\partial t^{\nu}}.$$

Tekintsük (2) karakterisztikus egyenletét:

$$(5)\qquad \sum_{i=0}^{\max(m,m_1)}[\tilde{w}_i(s)+h^{\tau}\tilde{u}_i(s)]\,v^{i}=0,$$

ahol

$$\tilde{w}_1=w_1,\dots,\tilde{w}_m=w_m,\ \tilde{w}_{m+1}=0,\dots;$$

$$\tilde{u}_1=u_1,\dots,\tilde{u}_{m_1}=u_{m_1},\ \tilde{u}_{m_1+1}=0,\dots.$$

Abból a célból, hogy alkalmazhassuk a *Mikusiński*-féle differenciálegyenletelméletet, be kell bizonyítanunk az alábbi tételt.

III. 1. tétel. *Az* (5) *karakterisztikus egyenlet a Mikusiński-féle M operátortestben annyi lineáris tényezőre bontható, amekkora a fokszáma, továbbá az összes gyökei* $v=\sum_{i=-q}^{\infty}a_i(s)h^{\frac{\tau}{p}i}$ *alakban írhatók, ahol az* $a_i(s)$ *operátorok s algebrai függvényei.*

Az 1. tétel bizonyításához PUISEUX alábbi tételét alkalmazzuk (a bizonyítást lásd v. d. WAERDEN [13] 53. o.):

Tétel. *Legyen K egy tetszőleges, algebrailag zárt* 0 *karakterisztikájú test, legyen y egy a K felett transzcendens mennyiség és legyen* $K\lceil y\rceil$ *az y összes formális algebrai* *hatványsorainak teste* $(K\overline{\lceil y \rceil}$ *elemei* $\sum_{i=-q}^{\infty} a_i y^{i/p}$ *alakúak, ahol* $q \geqq 0$, $a_i \in K)$. *A* $K\overline{\lceil y \rceil}$ *test algebrailag zárt.*

Megjegyzés. A Z komplex változó a (z) algebrai függvényét a

$$w_n(z)a^n + w_{n-1}(z)a^{n-1} + \dots w_0(z) = 0$$

egyenleten keresztül definiáljuk, ahol a $w_i(z)$ kifejezések komplex együtthatójú polinomok. A z változó algebrai függvényei egy algebrailag zárt $\mathcal{K}\overline{\lceil z \rceil}$ testet képeznek. Minden $a(z)$ algebrai függvény a $z=0$ környezetében, konvergens törtkitevőkkel bíró

$$a = \sum_{i=-q}^{\infty} b_i z^{i/p}$$

alakú sorba fejthető. Tekintsük a következő leképezést (lásd MIKUSIŃSKI [4])

$$z \leftrightarrow \frac{1}{s}, \quad \sum_{i=-q}^{\infty} b_i z^{i/p} \leftrightarrow \sum_{i=-q}^{\infty} b_i \left(\frac{1}{s}\right)^{i/p}.$$

Ezen hozzárendelésnél a $\mathcal{K}\overline{\lceil z \rceil}$ test a $\mathcal{K}\overline{\left\lceil \frac{1}{s} \right\rceil}$ testbe megy át. A $\sum_{i=-q}^{\infty} b_i \left(\frac{1}{s}\right)^{i/p}$ sorok, melyek $\mathcal{K}\overline{\left\lceil \frac{1}{s} \right\rceil}$ elemeit állítják elő, az operátorszámítás értelmében konvergensek (Mikusiński [4]), következésképp érvényes, hogy $M \supset \mathcal{K}\overline{\left\lceil \frac{1}{s} \right\rceil}$. A $\mathcal{K}\overline{\left\lceil \frac{1}{s} \right\rceil}$ test $a(s)$ elemeit az s operátor algebrai függvényeinek nevezzük.

Most *bebizonyítjuk* a III. 1. tételt. Tekintsük az $a(s)$ algebrai függvények $\mathcal{K}\overline{\left\lceil \frac{1}{s} \right\rceil} \subset M$ testét. A h^τ operátor ezen test felett transzcendens (I. 2. tétel), a

$$h^\tau \leftrightarrow y, \quad \sum_{i=-q}^{\infty} a_i(s) h^{\frac{\tau}{p} i} \leftrightarrow \sum_{i=-q}^{\infty} a_i(s) y^{\frac{i}{p}}$$

leképezés az I. 2. tétel alapján egy izomorfizmus, tehát

$$\mathcal{K}\overline{\left\lceil \frac{1}{s} \right\rceil}\overline{\lceil h^\tau \rceil} \cong \mathcal{K}\overline{\left\lceil \frac{1}{s} \right\rceil}\overline{\lceil y \rceil}.$$

Az I. 1. tétel értelmében $M \supset \mathcal{K}\overline{\left\lceil \frac{1}{s} \right\rceil}\overline{\lceil h^\tau \rceil}$, és a *Puiseux*-tételt a $\mathcal{K}\overline{\left\lceil \frac{1}{s} \right\rceil}$. $\mathcal{K}\overline{\left\lceil \frac{1}{s} \right\rceil}\overline{\lceil h^\tau \rceil}$ testekre alkalmazva a szóban forgó tételt bebizonyítottuk.

Ezek után megválaszoljuk az alábbi kérdést: Az (5) karakterisztikus egyenlet gyökét előállító $v = \sum_{i=-q}^{\infty} a_i(s) h^{\frac{\tau}{p} i}$ operátor mikor logaritmus?

III. 2. tétel. a) *Legyen* $q=0$; *a* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(s) h^{\frac{\tau}{p} i}$ *operátor akkor és csakis akkor logaritmus, ha az* $a_0(s)$ *operátor logaritmus.*

b) *Legyen* $q>0$ *és* $a_{-q}(s) \neq 0$. *Ebben az esetben a* $\sum_{i=-q}^{\infty} a_i(s) h^{\frac{\tau}{p} i}$ *operátor sohasem logaritmus.*

BIZONYÍTÁS: a) Az I. 1. megjegyzésből következik, hogy az

$$\exp\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i(s)h^{\frac{\tau}{p}i}\right)\lambda\right]$$

operátor létezik.

b) bizonyításához elegendő megmutatni, hogy $A=\sum_{i=-q}^{0} a_i(s)h^{\frac{\tau}{p}i}$ nem logaritmus. Írjuk fel az A operátort a következő alakban:

$$A = h^{-q\tau_1}\sum_{i=0}^{q} a_{i-q}(s)h^{\tau_1 i}, \quad \tau_1 = \frac{\tau}{p},$$

és most csak azt kell bebizonyítanunk, hogy az

$$(*) \qquad x'(\lambda) = Ax(\lambda)$$

operátoregyenletnek csak az $x\equiv 0$ megoldása van. Válasszuk meg a C operátort úgy, hogy $(*)$ egy $x=x(\lambda)$ megoldására nézve $cx(\lambda)=y(\lambda)$ függvény legyen, melynek $\frac{\partial}{\partial\lambda}y(\lambda, t)$ deriváltja a $D(\lambda\in I,\ 0\leqq t<\infty)$ intervallumban folytonos (lásd x' definícióját, MIKUSIŃSKI [2] 169. o.), továbbá válasszunk egy N természetes számot úgy, hogy $a_{-i}(s)l^N\in C$ legyen, ha $i=0, \ldots, q$ (MIKUSIŃSKI [4]).

Ha most az $x'=Ax$ egyenletet megszorozzuk a $cl^N h^{q\tau_1}$ operátorral, akkor kapjuk, hogy

$$(6) \qquad \int_0^t \frac{(t-u)^{N-1}}{(N-1)!}\frac{\partial}{\partial\lambda}y(\lambda, u-q\tau_1)\,du = \int_0^t B(t-u)y(\lambda, u)\,du,$$

ahol

$$B(t) = \left(\sum_{i=0}^{q} a_{i-q}(s)h^{\tau_1 i}l^N\right)(t)\in C.$$

Mivel $y(\lambda, t-q\tau_1)=0$, ha $0\leqq t<q\tau_1$, következésképp

$$\int_0^t B(t-u)y(\lambda, u)\,du = 0, \text{ ha } 0\leqq t<q\tau_1.$$

Tekintve, hogy $a_{-q}(s)$ pszeudoanalitikus és $\neq 0$, a *Titchmarsh*-tételt [11] alkalmazva kapjuk, hogy

$$(7) \qquad y(\lambda, t)=0, \quad \text{ha} \quad 0\leqq t<q\tau_1.$$

Ily módon $y(\lambda, t-q\tau_1)=0$, ha $0\leqq t<2q\tau_1$ és ismét következik (6)-ból, hogy

$$(8) \qquad \int_{q\tau_1}^t B(t-u)y(\lambda, u)\,du = 0, \text{ ha } q\tau_1\leqq t<2q\tau_1.$$

Amennyiben $u_1=u-q\tau_1$, $t_1=t-q\tau_1$-et helyettesítünk; $0\leqq t_1<q\tau_1$; úgy (8) a következőbe megy át:

$$\int_0^{t_1} B(t_1-u_1)y(\lambda, u_1+q\tau_1)\,du_1 = 0,$$

A *Titchmarsh*-tételt ismét alkalmazva

$$y(\lambda, t_1+q\tau_1)=0, \quad \text{ha} \quad 0 \leqq t_1 < q\tau_1 .$$

(7) figyelembevételével kapjuk, hogy $y(\lambda, t)=0$, ha $0 \leqq t < 2q\tau_1$.

Az eljárást folytatva adódik, hogy $y(\lambda, t)=0$, ha $0 \leqq t < \infty$ és így $x=0$. q. e. d.

III. 1. *Megjegyzés.* Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a III. 2b) tétel általánosan érvényes olyan $\sum_{i=-q}^{\infty} c_i h^{\tau_i}$ alakú operátorokra, melyek az alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek:

$$1) \quad c_i = \frac{f_i}{r}, f_i, r \in C, \qquad i = -q, \dots, \infty,$$

2) $f_{-q}(t)$ a 0 semmilyen környezetében sem 0. (A bizonyítás megegyezik a fentivel, csupán l^N helyett r-rel kell szorozni.)

III. 2. *Megjegyzés.* Arra a kérdésre, hogy egy $a_0(s)$ operátor mikor logaritmus, MIKUSIŃSKI [5] kritériumot adott, tehát a III. 2. tétel teljes kritériumot szolgáltat annak eldöntésére, hogy (5) karakterisztikus egyenlet valamely $\sum_{i=-q}^{\infty} a_i(s) h^{\frac{\tau}{p}i}$ gyöke logaritmus-e vagy nem.

III. 3. *Megjegyzés.* A fenti tételek — anélkül, hogy szó szerinti szövegüket vagy bizonyításaikat megváltoztatnánk — kiterjeszthetők a következő egyenletekre:

$$(1') \qquad \sum_{k=0}^{d} \sum_{\mu=0}^{m_k} \sum_{\nu=0}^{n_k} \alpha_{\mu\nu}^{k} \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial\lambda^\mu \partial t^\nu} x(\lambda, t-\tau_k) = \varphi(\lambda, t),$$

ahol $\tau_k = \tau p_k$, $k=0, 1, \dots, d, p_0=0$, $\tau > 0$ és p_k természetes számok.

A III. 1. tétel alapján a *Mikusiński*-féle differenciálegyenlet-elmélet alkalmazható az (1) típusú egyenletekre (lásd MIKUSIŃSKI [4], [6]) és kimondhatjuk a következő tételeket.

III. 3a. tétel. *Legyen adva az* (1) *egyenlet, melynek* $x(\lambda, t)$ *megoldása és annak*

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} x}{\partial t^\nu \partial \lambda^\mu} \qquad (\mu = 0, \dots, \max(m, m_1), \ \nu = 0, \dots, \max(n, n_1))$$

deriváltjai elégítsenek ki olyan folytonossági feltételeket, hogy a II. (3) *formula érvényes legyen. Feltesszük, hogy az* (5) *karakterisztikus egyenlet* $\max(m, m_1)$ *számú gyöke között pontosan* N *logaritmus van. Akkor a*

$$(\mathrm{K}) \qquad \begin{aligned} &\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \alpha_{\mu, n-\varkappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial\lambda^\mu \partial t^\nu} = g_\varkappa^1(\lambda) \qquad (\varkappa = 0, \dots, n-1), \\ &\sum_{\mu=0}^{m_1} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \beta_{\mu, n_1-\varkappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial\lambda^\mu \partial t^\nu} = g_\varkappa^2(\lambda) \qquad (\varkappa = 0, \dots, n_1-1), \end{aligned}$$

$$(\mathrm{P}) \qquad \left(\frac{\partial^\varkappa}{\partial\lambda^\varkappa} x(\lambda, t)\right)_{\lambda=\lambda_0} = v_\varkappa(t) \qquad ((\lambda_1 \leqq \lambda_0 \leqq \lambda_2), \ \varkappa = 0, \dots, N-1)$$

feltételek, ahol $g_x^1(\lambda)$, $g_x^2(\lambda)$ *és* $v_x(t)$ *megadott függvények, az* (1) *egyenlet megoldását egyértelműen meghatározzák (feltéve, ha a megoldás létezik).*[11]

III 3b. tétel. *Az* (5) *egyenletnek legalább két gyöke* v_1, v_2 *legyen logaritmus. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az* (1) *egyenletnek a* (K) *kezdeti és az*

$$\text{(P')} \qquad x(\lambda_1, t) = f_1(t), \quad x(\lambda_2, t) = f_2(t) \qquad (0 \leqq t < \infty)$$

peremfeltételeket kielégítő megoldása egyértelmű legyen az, hogy az (5) *egyenletnek ne legyenek további olyan gyökei, melyek logaritmusok* ($N=2$) *és, hogy érvényes legyen a következő:*

$$v_1 - v_2 \neq \frac{2k\pi i}{\lambda_1 - \lambda_2} \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

(lásd MIKUSIŃSKI [6]).

A parciális differencia-differenciálegyenletek 1. logaritmikus ($N = \max(m, m_1)$), 2. vegyes ($0 < N < \max(m, m_1)$), 3. tiszta ($N = 0$) egyenletek szerint oszthatók fel.

III. 4. *Megjegyzés.* Az itt bebizonyított tételek nem csak tiszta egzisztencia-tételek, hanem lehetővé teszik, hogy a parciális differencia-differenciálegyenlet megoldását meghatározzuk.

Ez a következő módon történik: Az (1) egyenletet a (K) kezdeti feltételek segítségével a (2) operátoregyenletbe írjuk át, majd megoldjuk az (5) karakterisztikus egyenletet. (A III. 1. tétel alapján (5) „algebrailag" megoldható.) A III. 2. tétel alkalmazásával a logaritmus gyökök kiválaszthatók. A többi gyököt egyszerűen „kidobjuk". Az általános *Mikusiński*-féle differenciálegyenlet-elmélet értelmében (2) minden megoldása az alábbi alakban írható:

$$x(\lambda) = x_0(\lambda) + c_1 e^{v_1 \lambda} + \ldots + c_N \lambda^{\mu} e^{v_p \lambda}.$$

Itt $x_0(\lambda)$ a (2) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását jelenti, melynek nem kell mindig léteznie, a $v_1, \ldots, v_p$ operátorok pedig az (5) karakterisztikus egyenlet egymástól különböző logaritmus gyökei. (A λ tényező akkor lép fel, ha (5)-nek többszörös logaritmus gyökei vannak.) A $c_1, \ldots, c_N$ operátorok a (P) vagy (P') peremfeltételekből egyértelműen meghatározhatók. (Ehhez csak egy lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk.) Ily módon az x megoldást is egyértelműen meghatároztuk. (Lásd a cikk végén szereplő példákat.)

III. 4. tétel. *Legyen* $m \geqq m_1$. *Az* (1) *egyenlet akkor és csakis akkor* 1. *logaritmikus,* 2. *vegyes,* 3. *tiszta, ha a*

$$\text{(9)} \qquad \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial\lambda^{\mu}\partial t^{\nu}} x(\lambda, t) = 0$$

egyenletnek ugyanazon tulajdonsága van. (9-et (1) *fő részének nevezzük.)*

[11] Az eredeti cikkben a K feltételek hibásan vannak megadva, amit a fordításban korrigáltunk, továbbá a tétel megfogalmazása sem precíz. Könnyű belátni ugyanis, hogy általánosságban a $g_x^1(\lambda)$ és $g_x^2(\lambda)$ függvények nem írhatók elő tetszés szerint egymástól függetlenül. Másrészt az is igaz, hogy pl. a $g_x^1(\lambda)$ függvényeket előírva általánosságban a $g_x^2(\lambda)$ függvények nem határozhatók meg egyértelműen vagy fordítva. Ezen megállapítások a III. 3b. tétel esetében is fennállanak.

Az unicitási feltételekkel és az ún. restriktív egyenletek problémájával (lásd MIKUSIŃSKI [2]) FÉNYES TAMÁS foglalkozik egy a közeljövőben megjelenő cikkében. (A fordító megjegyzése.)

BIZONYÍTÁS: Mivel $m \geqq m_1$, (5) karakterisztikus egyenlet legmagasabb együtthatója $w_m(s)+h^\tau \tilde{u}_m(s)$, ahol $w_m(s)\neq 0$. Következésképp a v gyökök sorfejtése h^τ negatív kitevőit nem tartalmazza. Azonban az $a_0(s)$ együttható (9) karakterisztikus egyenletének gyöke, és így tételünk a III. 2a. tételből következik.

III. 5. tétel. *Legyen $m \geqq m_1$, $n=0$ és n_1 tetszőleges. Ekkor az* (1) *egyenlet mindig logaritmikus.*

A tétel a III. 4. tételből következik, ha figyelembe vesszük, hogy esetünkben (9) karakterisztikus egyenletének csak olyan gyökei lehetnek, melyek számok.

III. 6. tétel. *Legyen $m_1 > m$ és* (1) *fő része ne legyen azonosan nulla. Ekkor az* (1) *egyenlet sohasem logaritmikus.*

BIZONYÍTÁS: Esetünkben az (5) karakterisztikus egyenlet az alábbi alakú:

$$h^\tau u_{m_1}(s)v^{m_1}+\ldots+\big(w_{m_1-i}(s)+h^\tau u_{m_1-i}(s)\big)v^{m_1-i}+\ldots+\big(w_0(s)+h^\tau u_0(s)\big)=0, \tag{10}$$

ahol $u_{m_1}(s)\neq 0$ és $w_{m_1-i}(s)\neq 0$, $i>0$. Jelöljük a (10) karakterisztikus egyenlet gyökeit $v_1,\ldots,v_{m_1}$-gyel. Mivel

$$h^\tau u_{m_1}(s)(-1)^i \sum_{j_1,\ldots,j_i} v_{j_1}\ldots v_{j_i} = w_{m_1-i}(s)+h^\tau u_{m_1-i}(s),$$

legalább egy olyan v_j gyöknek kell léteznie, amelynek sora tartalmazza h^τ negatív kitevőit. A III. 2b) tétel alapján a v_j operátor nem logaritmus.

Bevezetve az (5) karakterisztikus egyenlet esetében az absztrakt *Riemann*-felület fogalmát (lásd v. d. WAERDEN [12]), kimondhatjuk az alábbi tételt:

III. 7. tétel. *Legyen $m_1 > m$ és legyen az* (5) *karakterisztikus egyenlethez tartozó $\mathcal{F}$ Riemann-felület minden levelének a* 0 *pont felett pólusa. Akkor az* (1) *egyenlet tiszta.*

A bizonyítás nyilvánvaló.

Példák.

1. Oldjuk meg a

$$\frac{\partial x(\lambda,t)}{\partial\lambda}-x(\lambda,t-1)=0$$

egyenletet az

$$x(\lambda_0,t)=f(t)$$

peremfeltételek mellett. Az egyenlet operátoros alakja:

$$x'-h^1x=0.$$

A $v-h^1=0$ karakterisztikus egyenlet $v=h^1$ gyöke logaritmus, az előírt peremfeltétel a megoldást egyértelműen meghatározza. Írhatjuk, hogy $x=Ce^{h^1\lambda}$. $x(\lambda_0,t)=Ce^{h^1\lambda_0}=\{f(t)\}$, ahonnan $C=fe^{-h^1\lambda_0}$ és kapjuk, hogy

$$x=fe^{h^1(\lambda-\lambda_0)},\quad e^{h^1(\lambda-\lambda_0)}=1+\frac{(\lambda-\lambda_0)h^1}{1!}+\frac{(\lambda-\lambda_0)^2h^2}{2!}+\ldots$$

$$x(\lambda,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f(t-i)(\lambda-\lambda_0)^i}{i!}.$$

2. Oldjuk meg a

$$\frac{\partial^2 x(\lambda, t)}{\partial \lambda^2}-\frac{\partial^2 x(\lambda, t-2)}{\partial t^2}=0$$

egyenletet az

$$x(\lambda, 0)=0, \quad x_t(\lambda, 0)=0$$

kezdeti és az

$$x(0, t)=f(t), x_\lambda(0, t)=g(t); \; g, f \in C_0^\infty$$

peremfeltételek mellett.

Az egyenletet az előírt kezdeti feltételek figyelembevételével az

$$x''-h^2 s^2 x=0$$

operátoros alakban írhatjuk. A karakterisztikus egyenlet

$$v^2-h^2 s^2=0,$$

melyből $v_{1,2}=\pm hs$. Mindkét gyök logaritmus, tehát az általános megoldás $x=c_1 e^{hs\lambda}+c_2 e^{-hs\lambda}$. Az előírt peremfeltételekből kapjuk, hogy

$$c_1+c_2=f, \quad hs(c_1-c_2)=g,$$

tehát

$$c_1=\frac{f+h^{-1}\frac{1}{s}g}{2}, \quad c_2=\frac{f-h^{-1}\frac{1}{s}g}{2}$$

és

$$x=\frac{1}{2}\left[f(e^{hs\lambda}+e^{-hs\lambda})+\frac{h^{-1}}{s}g(e^{hs\lambda}-e^{-hs\lambda})\right]=$$

$$=f\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(hs\lambda)^{2i}}{(2i)!}+\frac{h^{-1}}{s}g\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(hs\lambda)^{2i+1}}{(2i+1)!}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(2i)}(t-2i)\lambda^{2i}}{(2i)!}+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{g^{(2i)}(t-2i)\lambda^{2i+1}}{(2i+1)!}.$$

3. Oldjuk meg a

$$\frac{\partial^2 x(\lambda, t)}{\partial \lambda^2}-\frac{\partial^2 x(\lambda, t)}{\partial t^2}+2\frac{\partial x(\lambda, t-\tau)}{\partial t}-x(\lambda, t-2\tau)=0$$

egyenletet az $x(\lambda, 0)=0$, $x_t(\lambda, 0)=0$ kezdeti feltételek mellett. (A peremfeltételeket később fogjuk megadni.) Az operátoregyenlet a következő:

$$x''-s^2 x+2h^\tau s x-h^{2\tau}x=0,$$

melyből a

$$v^2-(s-h^\tau)^2=0$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk. Ennek gyökei:

$$v_1=s-h^\tau, \quad v_2=h^\tau-s.$$

v_1 és v_2 operátorok logaritmusok, s így

$$x=c_1 e^{\lambda v_1}+c_2 e^{\lambda v_2}.$$

Írjuk elő a peremfeltételeket oly módon, hogy $c_1=0$, c_2 pedig tetszőleges függvény legyen. Így kapjuk, hogy

$$x = c_2 e^{-s\lambda} e^{h^\tau \lambda} = c_2 h^\lambda e^{h^\tau \lambda},$$

vagy

$$x(\lambda, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i c_2(t - i\tau - \lambda)}{i!}.$$

4.

$$\frac{\partial^2 x(\lambda, t)}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^3 x(\lambda, t)}{\partial \lambda \partial t^2} - 2\frac{\partial x(\lambda, t-1)}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 x(\lambda, t-1)}{\partial t^2} + x(\lambda, t-2) = 0.$$

$$x(\lambda, 0) = 0, \; x_t(\lambda, 0) = 0.$$

$$x'' - s^2 x' - 2hx' + hs^2 x + h^2 x = 0,$$

$$v^2 - v(s^2 + 2h) + hs^2 + h^2 = (v - s^2 - h)(v - h) = 0,$$

$$v_1 = s^2 + h, \; v_2 = h.$$

v_1 nem logaritmus, v_2 viszont igen; ily módon a megoldás egyértelműségét biztosítandó egy peremfeltételt kell előírnunk, $x(\lambda_0, t) = f(t) \in C_0^2$. Ezáltal kapjuk, hogy

$$x = ce^{h\lambda}, \; c = fe^{-h\lambda_0}, \; x = fe^{h(\lambda - \lambda_0)},$$

vagy

$$x(\lambda, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(t-i)[\lambda - \lambda_0]^i}{i!}.$$

5.

$$\frac{\partial^2 x(\lambda, t-\tau_2)}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 x(\lambda, t-\tau_1-\tau_2)}{\partial \lambda \partial t} - \frac{\partial x(\lambda, t)}{\partial \lambda} + \frac{\partial x(\lambda, t-\tau_1)}{\partial t} = 0,$$

$$x(\lambda, 0) = 0.$$

$$h^{\tau_2} x'' - sh^{\tau_1+\tau_2} x' - x' + sh^{\tau_1} x = 0.$$

A

$$h^{\tau_2} v^2 - (sh^{\tau_1+\tau_2} + 1)v + sh^{\tau_1} = (v - sh^{\tau_1})(h^{\tau_2} v - 1) = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei $v_1 = sh^{\tau_1}$, $v_2 = h^{-\tau_2}$, melyek közül az első logaritmus, a második nem. A peremfeltétel legyen:

$$x(\lambda_0, t) = f(t) \in C_0^\infty.$$

Ily módon kapjuk, hogy

$$x = fe^{sh^{\tau_1}(\lambda - \lambda_0)},$$

vagy

$$x(\lambda, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(t - i\tau_1)[\lambda - \lambda_0]^i}{i!}.$$

(Megjegyezzük, hogy a III. 1. tétel erre a feladatra nem vonatkozik, mert τ_2-nek kell τ_1 többszörösének lennie.[12]

[12] A szerző egy később megjelent cikkében további algebrai tételek segítségével bebizonyította, hogy a *Mikusiński*-féle differenciálegyenlet-elmélet általános többszörös differenciákkal bíró állandó együtthatós parciális differencia-differenciálegyenletek esetében is alkalmazható. (Über die Anwendung der Operatorenrechnung auf partielle Differential-Differenzengleichungen mit mehreren Differenzen, Archiv der Mathematik, Vol. XI (1960) 23—28) (A fordító megjegyzése.)

IRODALOM

[1] V. Jarník, Sur le produit de composition de deux fonctions continues, *Studia Mathematica* **12** (1951), 58—64.
[2] J. Mikusiński, *Operatorenrechnung*, Berlin, 1957.
[3] J. Mikusiński, Sur les fondements du calcul opératoire, *Studia Mathematica* **11** (1949), 41—70.
[4] J. Mikusiński, Sur les equations différentielles du calcul opératoire et leurs applications aux équations aux dérivées partielles classiques, *Studia Mathematica* **12** (1951), 227—270.
[5] J. Mikusiński, Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire, *Studia Mathematica* **12** (1951), 208—224.
[6] J. Mikusiński, Sur un type de conditions mixtes pour les équations aux dérivées partielles, *Studia Mathematica* **13** (1953), 277—286.
[7] P. A. Murawiew, Rescheine operacionnym metodom nekotorych differencialnych urawnenij i sistem differencialnych urawnenij c zapazdywajuschtschim argumentom. *Matematitscheskij Sbornik* 44(86): **2** (1958), 157—178.
[8] I. G. Petrowskij, *Lekcii po teorii integralnych urawnenij*, 2. Aufl. G. I. T. L. Moskau—Leningrad, 1951.
[9] E. Pinney, *Ordinary Difference-Differential Equations*, Berkeley and Los Angeles, 1958.
[10] L. Schwartz, *Théorie des distributions* I, II, Paris, 1950—51.
[11] E. C. Titchmarsh, The zeros of certain integral functions, *Proc. of the London Math. Soc.* **25** (1926), 283—302.
[12] B. L. v. d. Waerden, *Algebra I*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.
[13] B. L. v. d. Waerden, *Einführung in die algebraische Geometrie*, Berlin, 1939.
[14] T. Fényes, Anwendung der Operatorenrechnung von Mikusiński zur Lösung gewöhnlicher Differentialdifferenzengleichungen, *MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **4** (1959), 191—196. (A fordító kiegészítése.)

Fordította: *Fényes Tamás*

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1962. VII. 7. — Terjedelem: 10,50 (A/5) ív, 101 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 62-2644

Ára: 23,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XII. KÖTET 4. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1962

// A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XII. kötet 4. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

A KVALITATÍV INFORMÁCIÓELMÉLET PROBLÉMÁI

(SZÉKFOGLALÓ ELŐADÁS)*

Írta: KALMÁR LÁSZLÓ

Az információmennyiség fogalma – néhány, kb. 20 évvel régebbi kezdeményezés[1] után – 1948-ban merült fel,[2] elsősorban a híradástechnika szükségletei folytán. Az azóta eltelt idő bebizonyította, hogy ez a fogalom nemcsak a híradástechnika számára hasznos, hanem a műszaki tudományoktól – ahol a híradástechnikán kívül elsősorban a méréstechnikában és az automatikus vezérlés tudományában nélkülözhetetlen – a számítástechnikán és a biológián keresztül egészen a nyelvtudományig és az államigazgatásig a természettudományok és a társadalomtudományok számos területén alapvető jelentőségű fogalom.

Nyilvánvaló azonban, hogy az információmennyiség fogalma az információnak csak egyik, kvantitatív oldalát tükrözi és így a ráépített *kvantitatív* információelmélet is csak egyik aspektusát vizsgálja az információnak. Akármilyen fontos is pl. a gazdaságos és megbízható hírtovábbítás szempontjából a továbbítandó híranyag információmennyiségének ismerete, annak számára, aki a hírt megkapja, sokkal fontosabb az, vajon születésről vagy halálesetről szól-e a hír. Akármennyire fontos is, hogy valamely automata gépsor vagy izomcsoport vezérlése esetén lehetőleg semmi se vesszen el a vezérlőmű, ill. a központi idegrendszer által küldött vezérlőjelek és a visszajelentő-jelek információtartalmából a huzalos, ill. az idegpálya-vezetékekben, éppoly fontos az is, hogy a vezérlő- és visszajelentő-jelek torzítatlanul érkezzenek meg, hogy valóban a szükséges akciót válthassák ki. Hasonlóan, valamely szövegnek más nyelvre való lefordítása során nemcsak az a fontos, hogy a lefordított szöveg lehetőleg ugyanakkora információmennyiséget tartalmazzon, mint az eredeti szöveg, hanem az is, hogy ugyanazt jelentse. A példákat tetszés szerint lehetne szaporítani a tudomány vagy a gyakorlat különböző területéről; azonban, úgy vélem, már a felsoroltak is eléggé mutatják az információ *kvalitatív* aspektusa figyelembevételének jelentőségét.

Azt lehetne azonban gondolni, hogy a matematikai információelméletre csak az információ mennyiségi oldala, az információmennyiség különböző mértékeinek és azok tulajdonságainak vizsgálata tartozik, az információ kvalitatív vizsgálata pedig minden egyes esetben kizárólag annak a tudományágnak a feladata, amelyhez az információ által éppen közvetített hír jelentésénél fogva tartozik. Ez a vélemény azonban nem veszi figyelembe azt, hogy a matematikát tévedésből szokták magyarul „mennyiségtannak" nevezni. A matematika sohasem szorítkozott tisztán kvantitatív

* Elhangzott a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok 1962 június 28-i felolvasó ülésén.

[1] L. pl. R. V. HARTLEY, Transmission of information, *The Bell System Technical Journal,* 7 (1928), 535–563. old.

[2] C. E. SHANNON, A mathematical theory of communication, *The Bell System Technical Journal,* 27 (1948), 379–423, 623–653. old.; C. E. SHANNON–W. WEAWER, *The mathematical theory of communication,* Urbana, 1949; N. WIENER, *Cybernetics,* New York, 1948.

vizsgálatokra. ENGELS[3] már a múlt században sem a mennyiségeket, hanem a való világ térformáit és mennyiségi viszonyait jelölte meg a „tiszta" matematika tárgyául; márpedig világos, hogy a mennyiségi viszonyoknak, mint mindenféle viszonyoknak, lényeges a kvalitatív aspektusa, nem is beszélve a térformákról, amelyek, mint minden forma, elsősorban kvalitatívok. A matematika újabb feljődése pedig, amelyet Engels kora óta megtett, még jobban kidomborította a matematika teendőit a kvalitatív elemzés terén; gondoljunk csak az absztrakt algebrára, a halmazelméletre, a topológiára, vagy a matematikai logikára és a matematikai nyelvészetre, amelyek matematikai módszerek alkalmazását jelentik olyan szaktudományok (a logika, ill. a nyelvtudomány) területén, amelyeknek vajmi kevés dolguk van mennyiségekkel.

Természetesen, pl. az a kérdés, miről ad információt egy kémjelentés, nem tartozik közvetlenül a matematika körébe. Azonban meg vagyok arról győződve, hogy a matematikának vannak mondanivalói az információ jelentéstartalmáról általában, amelyek alapján más szaktudományok számára is használható matematikai modellekkel tudja leírni az azok területén használt információk kvalitatív vonatkozásait. Ezt tagadni véleményem szerint éppoly képtelenség volna, mint pl. azt állítani, hogy a felületelméletnek egyedül a felszínmérés a feladata, a felületek alaki viszonyainak vizsgálata nem tartozik rá. A különbség csak az, hogy míg a „kvalitatív" felületelmélet a geometria klasszikus fejezetei közé tartozik, addig a kvalitatív matematikai információelmélet még kiépítésre vár.

Bizonyos kvalitatív szempontok felmerültek már a „hagyományos" kvantitatív információelméletben is. Így pl. a hasznos jel és a zaj megkülönböztetése voltaképpen kvalitatív különbségtétel. Hiszen a zajnak is megvan a maga információtartalma, így nem mennyiségileg, hanem abban különbözik a hasznos jeltől, hogy olyan valamiről ad információt, ami a vizsgált kérdés szempontjából nem érdekel bennünket. Pl. rádióhallgatás során a légköri zörejek csak zavarnak bennünket, tehát a rádióműsor jeleivel szemben zajnak minősülnek, bár esetleg a meteorológus számára értékes információt közvetítenek. Hasonlóan, egy állat fehérje-szintetizáló apparátusába valamely vírus által beküldött nukleotid-tripletek csak az állat saját fehérje-szintetizálása szempontjából tekinthetők zajnak, a vírus szempontjából hasznos információt hordoznak. Nyelvjárásban beszélő ember hallgatása közben a nyelvjárásból eredő fonéma-variánsok zajnak számítanak, mert a megértést megnehezítik, de a dialektológus számára esetleg értékes információt közölnek.

Hasonlóan, pl. a redundencia-vizsgálatokba is belejátszik az információmennyiségen kívül az is, *miről* szól az információ, hiszen pl. valamely jelkulcsrendszer akkor redundáns, ha más jelkulcsrendszer alkalmazásával kevesebb információmennyiség segítségével is lehet *ugyanarról* információt adni.

A kvalitatív matematikai információelmélet kiépítését azzal lehet kezdeni, hogy a matematikában használatos információközlési folyamatok során vizsgáljuk meg, miről ad egy-egy jel információt. Az eközben gyűjtött tapasztalatok általánosítása útján felismerhetünk és részben definíciók, részben matematikai tételek alakjában megfogalmazhatunk s az utóbbi esetben megfelelő axiómák alapján bebizonyíthatunk az információ kvalitatív tulajdonságaira vonatkozó általános törvényszerűségeket, amelyeket azután, megfelelő matematikai modellek szerkesztése után, a matematikán kívüli információközlési folyamatokra is alkalmazhatunk.

[3] F. ENGELS, *Herrn Eugen Dührings Umwälzung der Wissenschaft*, 1878, 6. Auflage, Berlin, 1953, 44. old.

Legegyszerűbb példa gyanánt tekintsük egy természetes szám megadását a tízes számrendszerben. Ebben az esetben tehát azok a jelek, amelyeket a szám megadásához lehet használni, a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek, továbbá az „üres jel" a szám végén (l. később). Mielőtt egyetlen jelet megadnak nekünk, vagyis mielőtt a kérdéses szám egyetlen számjegyét ismernők, tudnunk kell, hogy természetes számról van szó, vagyis, hogy a megadandó objektum a természetes számok I halmazához tartozik. Ez tehát az a *kiinduló információ,* amellyel rendelkezünk, még mielőtt egyetlen jel valami további információt adna a kérdéses objektumról. Ilyen kiinduló információ minden esetben eleve adva van; még ha pl. a világűrből kapnánk is valamilyen üzenetet, akkor is, már az első jel megfejtése előtt, tudjuk, hogy értelmes lények olyan üzenetéről van szó, amely a lehetőség szerint önmagát magyarázza.[4]

Milyen információt ad ehhez a kiinduló információhoz az, ha megtudjuk, hogy a kérdéses szám első jegye pl. 2? Nyilvánvaló, hogy akkor már nemcsak azt tudjuk, hogy a kérdéses objektum az I halmaz eleme, hanem többet: azt, hogy eleme a (2, 3), (20, 30), (200, 300), ..., $(2\cdot 10^n, 3\cdot 10^n)$, ... balról zárt intervallumok valamelyikében fekvő természetes számok I_1 halmazának. Ez azért jelent több információt, mert I_1 valódi részhalmaza I-nek. A 2 számjegy által szolgáltatott információ tehát az I halmazt az I_1 valódi részhalmazára redukálja. Ugyanez történik, ha a kérdéses számról kapott hír első jele nem 2, hanem valamely tetszőleges a_1 számjegy, csak ekkor I_1 az $(a_1\cdot 10^n, (a_1+1)\cdot 10^n)$ balról zárt intervallumok valamelyikében fekvő természetes számok halmaza $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Csak ha $a_1=0$, akkor nem ad semmi információt az a_1 jel, mert ekkor $I_1=I$, annak megfelelően, hogy a szám elejére írt 0 számjegy redundáns.

A megadandó szám második számjegye, a_2, további információt ad a kérdéses számról: az I_1 halmazt az $(a_1\cdot 10^n+a_2\cdot 10^{n-1}, a_1\cdot 10^n+(a_2+1)\cdot 10^{n-1})$ balról zárt intervallumok valamelyikében fekvő természetes számok I_2 halmazára redukálja $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Ha $a_1\neq 0$, akkor ez valódi redukció, még akkor is, ha $a_2=0$, mert $I_2\subset I_1$; csak akkor nem ad semmi új információt a kérdéses számról az a_2 számjegy, ha $a_1=a_2=0$.

Általában, ha a kérdéses szám első $m-1$ számjegyét, $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$-et, már ismerjük, akkor tudjuk, hogy az az $(a_1\cdot 10^n+a_2\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_{m-1}\cdot 10^{n-m+2}, a_1\cdot 10^n+ +a_2\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_{m-2}\cdot 10^{n-m+3}+(a_{m-1}+1)\cdot 10^{n-m+2})$ balról zárt intervallumok valamelyikében fekvő természetes számok I_{m-1} halmazához tartozik. A következő a_m számjegy szolgáltatta információ abban áll, hogy ezt az I_{m-1} halmazt az $(a_1\cdot 10^n+ +a_2\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_m\cdot 10^{n-m+1}, \quad a_1\cdot 10^n+a_2\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_{m-1}\cdot 10^{n-m+2}+(a_m+1)\cdot \cdot 10^{n-m+1})$ balról zárt intervallumok valamelyikében fekvő természetes számok I_m halmazára redukálja, amely minden esetben részhalmaza I_{m-1}-nek és $a_1=a_2= =\ldots=a_m=0$ kivételével valódi részhalmaza.

Az a_m számjegy után vagy újabb a_{m+1} számjegy jön, vagy — semmi, vagyis az az információ, hogy a kérdéses szám m-jegyű. Annak ellenére, hogy ez utóbbi információt valamely feltűnő „szám vége" jel helyett az *üres jel* szolgáltatja, ez nagyon fontos információ: az I_m végtelen halmazt az egyetlen $a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_m$ számból álló halmazra redukálja. Az, hogy ilyen fontos információt az üres jelre bízunk, a tízes (vagy bármely más alapszámú) számrendszernek, mint jelkulcsrendszernek különleges sajátossága.

[4] Az, hogy kiinduló információnak minden esetben lennie kell, a kvantitatív információelmélet szempontjából is világos, különben az első jel végtelen nagy információmennyiséget szolgáltatna.

A tízes számrendszer egyszerű példa *egylépcsős matematikai nyelvre*. Egylépcsős, mert a rendszer jeleiből, az $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \triangledown\}$ „ábécé" elemeiből, ahol $\triangledown$ az üres jelet jelöli,[5] csak egyféle funkciójú jelsorozatokat, ti. kifejezéseket képez, amelyek természetes számokról adnak hírt. E nyelv *szintaxisa*, vagyis a kifejezések képzési szabálya, nagyon egyszerű: kifejezés minden olyan, az A ábécé elemeiből képezett „szó" (véges jelsorozat), vagyis az A halmaz által generált szabad félcsoport minden olyan eleme, amelynek utolsó „betűje" $\triangledown$, többi betűi azonban $\triangledown$-tól különbözők és valóban van $\triangledown$-tól különböző betűje. Ezzel szemben valamely pl. matematikai — matematikai logikai formulanyelv *kétlépcsős*, amennyiben az ábécéjéből (az összes, a nyelvben felhasznált matematikai és matematikai logikai jelek halmazából) képezhető szavak közül azokat, amelyeket egyáltalában felhasznál, két kategóriába osztja: *kifejezésekre* és *formulákra*. A kifejezések[6] funkciója az, hogy matematikai individuumokat (pl. számokat, függvényeket, halmazokat) jelöljenek, a formuláké pedig az, hogy ítéleteket, más néven állításokat (pl. axiómákat, sejtéseket, tételeket) fejezzenek ki. Pl. $(a+b)^2$ (algebrai) kifejezés, $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$, $a^2+2ab+b^2$ szintén az[7], ezzel szemben $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2}$ formulák. Azt azonban, hogy mely szavak kifejezések és melyek formulák, e jelentésbeli funkciójukra való hivatkozás nélkül, tisztán formális tulajdonságaik alapján definiálja a kérdéses nyelv szintaxisa[8]; a kifejezések és formulák jelentésének definíciója azután a kérdéses formulanyelv *szemantikájára* tartozik.

Egylépcsős a matematikai logika ítéletkalkulusának formulanyelve is, minthogy ebben csak formulák szerepelnek (kifejezések nem). E nyelv ábécéje megszámlálható: a logikai műveletek jelén: a $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ jeleken (sorra a negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció és ekvivalencia jelén) és a kezdő- és végzárjelen, a (és) jeleken kívül megszámlálhatóan végtelen sok logikai változót tartalmaz. Szintaxisa a formulák halmaza következő rekurzív[9] definíciójából áll: 1. egy egy betűs szó akkor

[5] A $\triangledown$ jel nem tévesztendő össze az üres szóval, amely az A halmaz generálta szabad félcsoport egységeleme (míg $\triangledown$ ennek egyik generátoreleme).

[6] HILBERT eredetileg a kifejezésre az Ausdruck, a formulára a Formel szót használta. Később az Ausdruck szó helyett a rövidebb Term-re tért át. Az újabb német matematikai logikai irodalom az így felszabadult Ausdruck szót a formula értelmében foglalta le, Formel-en tetszőleges véges jelsorozatot értve. A megfelelő angol szakkifejezések: term, well-formed formula, ill. formula. Újabban az ALGOL 60 algoritmikus nyelv visszatért az expression szakkifejezéshez.

[7] Az, hogy itt szigorúan nem lineáris elrendezésű jelsorozatokról, hanem síkbeli elrendezésű figurákról van szó, elvileg nem okoz nehézséget; a linearizálás (pl. $(a+b)/2$) különben is csak triviális módosításokat kíván. Az, hogy $\sqrt{ab}$ *algebrai* kifejezés-e, megállapodás kérdése.

[8] Hogy ez hogyan történhetik, arról hozzávetőleges képet ad az, hogy $(a+b)^2 = a^2+2ab+$ $+b^2$-ről és $\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2}$-ről pusztán annak alapján felismerhető, hogy formulák és nem kifejezések, hogy az $=$, ill. $\leqq$ jel előfordul bennük.

[9] Itt a rekurzió a szó hossza (betűinek száma) szerint halad. A matematikai logikában szokásosabb az ilyenféle rekurzív definíciók következő (a matematikus szemszögéből kevésbé szabványosnak tűnő) stílusban való kimondása: 1. minden logikai változó formula; 2. ha f formula, akkor $\neg f$ is formula; 3. ha f és g formulák, akkor $(f \wedge g)$, $(f \vee g)$, $(f \rightarrow g)$, $(f \leftrightarrow g)$ is formulák; 4. másféle szó nem formula. — Az itt adott zárójelhasználat — annak árán, hogy a formulákat, amennyiben nem egyetlen logikai változóból állnak, feleslegesen zárójelbe zárja — automatikusan biztosítja a teljes zárójelezést.

és csak akkor formula, ha egyetlen betűje logikai változó; 2. egy több betűs szó akkor és csak akkor formula, ha vagy első betűje $\neg$ és az ennek elhagyásával keletkező szó formula, vagy első betűje (, utolsó betűje), és van olyan betűje, amely az $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ és $\leftrightarrow$ jelek egyike és a szóban e betűt megelőző betűk is, az első (elhagyásával, az őt követő betűk is, az utolsó) elhagyásával, formulát alkotnak.

Viszont a szokásos matematikai — matematikai logikai formulanyelvnek (pl. elektronikus számológépeken végrehajtható) számítási algoritmusok megadására szolgáló bővítései, az ún. algoritmikus nyelvek, pl. a *Ljapunov*-féle operátor-nyelv[10] és az ALGOL 60 nyelv[11], *négylépcsős* nyelvek, amennyiben kifejezéseken és formulákon kívül deklarációkat és utasításokat is képeznek[12]. A természetes nyelvek nyilván még több lépcsősek.

Mint mondtuk, a kifejezések, formulák (és egyéb nyelvi képződmények, pl. deklarációk, utasítások stb.) jelentésével a matematikai — matematikai logikai formulanyelvek, az algoritmikus nyelvek és a természetes nyelvek szemantikája (jelentéstana) foglalkozik. Az információ (kvalitatív információelméleti) fogalma is tehát nyilván kapcsolatos a (nyelvnek tekintett) szóban forgó jelkulcsrendszer szemantikájával. Míg azonban a szemantika csak a kész nyelvi képződmények jelentését vizsgálja egészében, a kvalitatív információelmélet feladata annak elemzése, milyen információt szolgáltatnak ehhez a jelentéshez a kérdéses nyelvi képződmény egyes jelei.

Maradjunk egyelőre az egylépcsős, mégpedig olyan matematikai nyelveknél, amelyekben nincs más nyelvi képződmény, mint kifejezés. Ezek közül is a legegyszerűbbek azok a matematikai nyelvek, amelyekben nincsenek *változók;* ilyen többek között a tízes számrendszer is. Az ilyen nyelvekben minden kifejezés jelentése egy bizonyos I halmaz, az ún. individuumtartomány, egy határozott eleme.

Legyen adva egy ilyen, változó nélküli egylépcsős kifejezés-nyelv. Legyen A a nyelv ábécéje, vagyis azon jelek halmaza, amelyből a nyelv kifejezései felépülnek. A nyelv minden kifejezése tehát egy, az A ábécé jeleiből képezett szó, vagyis az A halmaz által generált $P(A)$ szabad félcsoport eleme. Legyen adva a nyelv szintaxisa; ez meghatározza, hogy a $P(A)$ halmaz mely elemei számítanak a nyelvben kifejezéseknek, más szóval, megadja a $P(A)$ halmaz egy K részhalmazát, mint a nyelv kifejezéseinek halmazát. Végül legyen adva a nyelv szemantikája; ez hozzárendeli a nyelv bármely k kifejezéséhez, vagyis a K halmaz bármely eleméhez, hogy az I individuumtartomány valamely $\sigma(k)$ elemét, mint k jelentését. Eszerint, a matematikában szokásos absztrakt kifejezésmódot használva, változó nélküli egylépcsős kifejezésnyelven olyan (A, K, I, σ) négyest érthetünk, ahol A és I két tetszőleges halmaz, K az A halmaz által generált szabad félcsoport valamely részhalmaza, σ pedig a K halmaz valamely leképezése I-be. Minthogy I azon elemeinek, amelyek egy K-beli k-nak sem képei a σ leképezésnél (vagyis amelyekhez nincs olyan kifejezés, amelyek jelentése a kérdéses elem volna), a továbbiakban semmi szerepük nem lesz, ezeket I-ből el is hagyhatjuk, tehát feltételezhetjük, hogy σ a K halmaznak az I halm*azra* való leképezése.

[10] L. pl. A. A. Ляпунов, О логических схемах программ, Проблемы кибернетики, 1 (Москва, 1958), 46—74. old.

[11] L. pl. P. Naur (szerkesztő) és társai, Report on the algorithmic language ALGOL 60, *Numerische Mathematik*, 2 (1960), 106—136 old.

[12] A *Ljapunov*-féle operátor-nyelvben is vannak deklarációk, habár Ljapunov nem számítja azokat az operátor-sémához.

Tekintsünk egy tetszőleges k kifejezést. Álljon ez rendre az A ábécé $a_1, a_2, \ldots, a_m$ jeleiből, amit így írunk: $k = a_1a_2\ldots a_m$. Jelentse $l = 1, 2, \ldots, m$ esetén $K_l = K_l(k)$ az összes $k' = a_1a_2\ldots a_la'_{l+1}\ldots a'_m$ alakú kifejezések halmazát, vagyis azokét, amelyeknek első l jele megegyezik k első l jelével.[13] K_l nem üres, hiszen $k \in K_l$. Tegyük fel, hogy bármely $k \in K$ esetén, $K_m = K_m(k) = \{k\}$, azaz egyedül a k kifejezésből áll (más szóval, hogy valamely kifejezéshez további jeleket írva nem kaphatunk újabb kifejezést). Ez a feltevés számos matematikai kifejezés-nyelv esetén magától teljesül, ha pedig nem teljesül, mesterségesen elérhető a következő módon. Vegyünk hozzá A-hoz egy benne nem levő ∇ jelet, amelyet „kifejezés vége jelnek" nevezünk. Módosítsuk a nyelv szintaxisát úgy, hogy a K halmaz $k = a_1a_2\ldots a_m$ elemei helyett az $a_1a_2\ldots a_m\nabla$ szavakat tekintsük kifejezéseknek. Minthogy a ∇ jel kifejezés belsejében nem szerepelhet, a feltevés nyilván teljesülni fog. Ilyen ∇ jel bevezetése célszerű lesz (ha a mondott feltevés magától nem teljesül az eredeti nyelvre), mert, mint látni fogjuk, lényeges információ hordozója.

Legyen továbbá, $l = 1, 2, \ldots, m$ esetén, $I_l = I_l(k)$ az I halmaz összes $\sigma(k')$ alakú elemeinek halmaza, ahol $k' \in K_l$. Akkor speciálisan $I_m = \{\sigma(k)\}$. Jelöljük az I halmazt I_0-val is. Ha valamely kifejezésről csak azt tudjuk, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}$ jelekkel kezdődik ($l = 1$ esetén semmit sem tudunk róla), akkor a jelentéséről azt tudjuk, hogy I_{l-1}-hez tartozik. Ha ezenfelül azt is megtudjuk, hogy a kifejezés következő jele a_l, akkor ezzel azt az információt nyerjük, hogy a kifejezés jelentése I_l-hez tartozik. Az a_l jel szolgáltatta információ tehát az I_{l-1} halmaznak I_l-re való redukciójában áll.

Hogy ismét a matematikában szokásos absztrakt kifejezésmódot használhassuk, *nevezzük információnak* (a kvalitatív információelmélet értelmében) *az olyan* (I', I'') *párokat, ahol* I' *valamely tetszőleges halmaz,* I'' *pedig* I'*-nek részhalmaza.* Itt tehát az I' halmaznak (amelyről tudtuk, hogy valamely objektum hozzá tartozik, ill. a kérdéses objektumról azt, hogy I'-hez tartozik) I'' részhalmazára való redukcióját (abból a szempontból, hogy újabb információ révén megtudtuk, hogy a kérdéses objektum I''-hez tartozik) az (I', I'') párral azonosítottuk. Ezek után tehát mondhatjuk, hogy a fent említett esetben *a* $k = a_1a_2\ldots a_m$ *kifejezés* l*-edik jele,* a_l *által szolgáltatott információ az* (I_{l-1}, I_l) *pár.* (Világos, hogy $I_l \subseteq I_{l-1}$.)

Ehhez még a következőket fűzhetjük hozzá. Minthogy I_{l-1} és I_l általában nemcsak az a_l jeltől, hanem a k kifejezéstől, pontosabban (l. a 13. lábjegyzetet) annak első $l-1$, ill. l jelétől függnek, *az* a_l *jel szolgáltatta információ is általában függ attól, mely kifejezésben szerepel az* a_l *jel, s abban hol fordul elő* (az esetleg több példányban is előforduló a_l jel melyik példányáról van szó), pontosabban: *az* a_l *jelen kívül általában az őt megelőző* $a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}$ *jelektől is függ.* Ez semmivel sem meglepőbb jelenség, mint az, hogy a tízes számrendszerben a számjegyeknek alaki értékükön kívül helyi értékük is van.

A k kifejezés utolsó a_m jele (esetleg az utólag bevezetett kifejezés vége jel) általában lényeges információt szolgáltat: az I_{m-1} halmaznak, amely általában többelemű (esetleg végtelen) halmaz, az egyelemű $I_m = \{\sigma(k)\}$ halmazra való redukcióját, amelynek egyetlen eleme éppen az egész k kifejezés, mint hír által megadandó objektum.

[13] K_l, és ennélfogva a később definiálandó I_l halmaz is, nyilván csak az $a_1, a_2, \ldots, a_l$ jelektől függ.

Megeshetik, hogy valamely $k = a_1 a_2 \dots a_m$ kifejezés valamely a_l jelpéldánya esetén $I_l = I_{l-1}$, vagyis az a_l jelpéldány szolgáltatta (I_{l-1}, I_{l-1}) információ nem redukálja az I_{l-1} halmazt, amelyről az a_l jel beérkezte előtt is tudtuk, hogy a megadandó $\sigma(k)$ objektumot tartalmazza. Mégsem mondhatjuk ez esetben mindig, hogy az a_l jel e helyen redundáns, azaz nem szolgáltat semmiféle információt. Ugyanis megeshetik, hogy a további $a_{l+1}, a_{l+2}, \dots, a_m$ jelek szolgáltatta információ függ az a_l jeltől. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az a_l jelpéldány *látens információt* szolgáltat. Egyszerű példa erre egy olyan nyelv, amelyben a természetes számokat bármely számrendszerben megadhatjuk. E nyelv ábécéje álljon az összes természetes számból (a 0-t beleértve) és a $*$ jelből. Kifejezései legyenek a $g * a_1 a_2 \dots a_m$ alakú szavak, ahol g tetszőleges 1-nél nagyobb természetes szám, $a_1, a_2, \dots, a_m$ pedig g-nél kisebb természetes számok. I legyen a természetes számok halmaza, s a fenti kifejezés jelentése legyen $a_1 \cdot g^{m-1} + a_2 \cdot g^{m-2} + \dots + a_m$. Világos, hogy a fenti kifejezés első jele szolgáltatta információ (I, I), hiszen bármely természetes szám bármely 1-nél nagyobb alapú számrendszerben felírható. Mégis lényeges, bár azon a helyen, ahol szerepel, látens, információt szolgáltat a g jel is, hiszen az $a_1, a_2, \dots, a_m$ jelek szolgáltatta információ nagyon is függ g-től. Ezzel szemben a $*$ jel, amely szintén az (I, I) információt szolgáltatja, redundáns, már csak azért is, mert a g után semmiféle más jel nem állhat, mint $*$.

Általában redundáns valamely $k = a_1 a_2 \dots a_m$ kifejezés valamely a_j jelpéldánya, ha az A ábécé egyetlen egy a_j-től különböző a'_j jeléhez sincs K-nak $a_1 a_2 \dots a_{j-1} a'_j a'_{j+1} \dots$ $\dots a'_{m'}$ alakú eleme. De akkor is redundánsnak tekinthető, ha A bármely olyan a'_j elemére, amelyhez van K-nak $k' = a_1 a_2 \dots a_{j-1} a'_j a'_{j+1} \dots a'_{m'}$ alakú eleme, és bármely ilyen k' elemre, $k'' = a_1 a_2 \dots a_{j-1} a_j a'_{j+1} \dots a'_m$ is eleme K-nak és viszont, valahányszor $k'' = a_1 a_2 \dots a_{j-1} a_j a'_{j+1} \dots a'_{m'}$ eleme K-nak, $k' = a_1 a_2 \dots a_{j-1} a'_j a'_{j+1} \dots a'_{m'}$ is eleme, továbbá a k kifejezés $a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_m$ jeleinek mindegyike ugyanazt az információt szolgáltatja, mint a $k''' = a_1 a_2 \dots a_{j-1} a'_j a_{j+1} a_{j+2} \dots a_m$ kifejezés megfelelő jele (vagyis ez az információ nem függ a_j-től; világos, hogy ekkor $\sigma(k) = \sigma(k''')$). A kezdő 0 számjegy esete a tízes számrendszerben mutatja, hogy még ez az eset sem meríti ki az összes olyan eseteket, amikor valamely jelet redundánsnak szoktunk tekinteni.

A látens információ esete jól ismert a számítástechnikából: az ilyen információt hordozó jelet tárolni kell mindaddig, amíg a látens információ „fel nem tárul". A tárolókapacitás igénybevételének csökkentésére kívánatos a jelkulcsrendszert úgy választani, hogy minél kevesebb jel hordozzon látens információt, és az minél kevesebb további jel beérkezése után feltáruljon. Evégett kívánatos a látens információ tényének puszta regisztrálása helyett azt közelebbről elemezni. Ehhez az információ fenti definíciójának finomítása szükséges, pl. oly módon, hogy az (I', I''), ill. (I_{l-1}, I_l) párba, további komponensként, azokat a függvényeket is felvegyük, amelyek megadják, hogyan függ a későbbi $a_{l+1}, a_{l+2}, \dots, a_m$ jelek szolgáltatta információ ezektől a jelektől (az eredeti vagy a finomított értelemben, amely utóbbi esetben nyilván rekurzív definícióról van szó).

Az olyan egylépcsős matematikai kifejezés-nyelvek esetére, amelyekben egyes jelek változók szerepét játsszák, amelyek az individuumtartomány elemein futnak át, — amely esetben egy-egy kifejezés jelentése is az individuumtartomány valamely, a kifejezésben szereplő változóktól függő eleme — úgy lehet a fenti meggondolásokat átvinni, hogy az eredeti I individuumtartomány helyett az $\bigcup_{n=0}^{\infty} I^n$ halmaznak I-be való leképezései J halmazát tekintjük individuumtartománynak s az I halmaz bizonyos I-n átfutó változóktól függő eleme helyett J azon határozott elemét tekintjük valamely kifejezés jelentésének, amely megadja, hogy I kérdéses eleme hogyan függ e változóktól. Az individuumtartomány hasonló megváltoztatása célszerű lehet változó nélküli kifejezés-nyelvek esetében is. Álljon pl. egy ilyen kifejezés-nyelv ábécéje a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ,7, 8, 9 számjegyekből, a + és – előjelből és a ∇ kifejezés vége jelből. Kifejezései legyenek az $\varepsilon_1 a_{11} a_{12} \dots a_{1m_1} \varepsilon_2 a_{21} a_{22} \dots a_{2m_2} \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n a_{n1} a_{n2} \dots a_{nm_n} \nabla$ alakú szavak, ahol $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nm_n}$ számjegyek, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ pedig előjelek; e kifejezés jelentése legyen az $\varepsilon_1 a_{11} a_{12} \dots a_{1m_1}, \varepsilon_2 a_{21} a_{22} \dots a_{2m_2}, \dots, \varepsilon_n a_{n1} a_{n2} \dots a_{nm_n}$ egész számok összege (I az egész számok halmaza). Akkor a fenti kifejezés valamennyi jele ∇ kivételével látens információt hordoz, amely csak az utolsó ∇ jel beérkezésekor tárul fel, hiszen bármely egész szám felírható, adott $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ előjelek, $a_{11}, a_{12}, \dots$ $\dots, a_{nm_n}$ számjegyek és alkalmas további ε_{n+1} előjel és $a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, \dots, a_{n+1,m_{n+1}}$ számjegyek esetén, $\varepsilon_1 a_{11} a_{12} \dots a_{1m_1} + \varepsilon_2 a_{21} a_{22} \dots a_{2m_2} + \dots + \varepsilon_n a_{n1} a_{n2} \dots a_{nm_n} + \varepsilon_{n+1} \cdot a_{n+1,1} a_{n+1,2} \dots a_{n+1,m_{n+1}}$ alakban. Így ez esetben célszerű nem magukat az egész számokat, hanem felbontásukat természetes számok algebrai összegére tekinteni az individuumtartomány elemeinek, ill. a kifejezések jelentésének.

Hasonló a helyzet a többlépcsős matematikai nyelvek esetén. A matematikai logikában szokás a formulák jelentéseként az „igaz” és „hamis” logikai értékek egyikét definiálni, aszerint, hogy a formula igaz vagy hamis állítást fejez-e ki. Ez esetben, ha a formula jelei szolgáltatta információt a fentiekhez hasonlóan definiálnók, úgy, hogy I szerepét a két logikai érték L halmazának adjuk át, a formula valamennyi jele, az utolsó nem redundáns jel kivételével, az (L, L) látens információt hordozná. Ez mutatja, hogy célszerűbb magát a formula által kifejezett állítást, vagy méginkább azt a feladatot tekinteni a formula jelentésének, döntsük el, igaz-e vagy hamis ez az állítás. Hasonlóan, az algoritmikus nyelvek esetén pl. az utasítások által megadott algoritmus végrehajtásának feladatát célszerű az utasítás jelentésének tekinteni. A nyelvi képződmények jelentésének alkalmas definíciója, ill. az individuumtartomány, mint e jelentések halmaza alkalmas definíciója segítségével tulajdonképpen az egylépcsős nyelvek esetére lehet visszavezetni a többlépcsős nyelvek esetét is.

A fentiekben a kvalitatív matematikai információelmélethez csupán néhány gondolatot adtam meg; az elmélet kiépítése, amely nem lesz könnyű feladat, még hátra van. Többek között tisztázandó még az új elméletnek a hagyományos, kvantitatív információelmélettel való kapcsolatának kérdése.

Az elméletnek azonban a mai csökevényes alakjában is van néhány alkalmazása. Az egyik ilyen alkalmazás az ún. Szegedi Logikai Géphez automatikus formulaközlő mű konstruálása. Ugyanis a Szegedi Logikai Gép eredeti alakjában a gép által vizsgálandó logikai formulát oly módon kellett a géppel közölni, hogy a géphez készült, ún. műveleti dobozokból dugaszolás útján egy megfelelő áramkört építünk fel. Ez lassú és sok hibalehetőségre alkalmat adó folyamat. Ehelyett olyan jelfogós és keresőgépes kiegészítő berendezést szerkesztettünk a géphez, amely a formula szukcesszív jeleinek megfelelő billentyűk egymásutáni lenyomására felépíti az eddig dugaszolással felépített áramkört. (A berendezés jelenleg huzalozás alatt áll.) Evégett részletesen analizálni kellett, miről ad információt az ítéletkalkulus egy tetszőleges formulájának egy-egy jele (zárójel, logikai művelet jele vagy logikai változó) s hogy ezen információ alapján a kérdéses áramkör felépítésének mely részfeladatát kell a berendezésnek a jelnek megfelelő billentyű lenyomására elvégeznie. Ehhez az információ fenti definíciója, ill. valamely egylépcsős nyelv egy-egy jelpéldánya által szolgáltatott információról mondottak (az ítéletkalkulus formulanyelvére átvive) elegendőnek bizonyultak. Hasonló, csak sokkal bonyolultabb elemzés kellett egy olyan elektronikus számológép megtervezéséhez, amely a hagyományos értelemben vett programozás nélkül (tehát speciálisan programozó program összeállítása nélkül), a végrehajtandó numerikus számítási algoritmusnak egy megfelelő algoritmikus nyelven való felírása alapján működik. Evégett ugyanis azt kellett elemezni, miről ad információt e számítási algoritmus tekintetében az algoritmikus nyelv egy-egy jele, s hogy a számológépnek ezen információ alapján milyen (esetleg mikro-) utasítást kell végrehajtania, amikor a kérdéses jel, megfelelően kódolt alakban, a gép memóriájából az utasításregiszterbe kerül, avégett, hogy ezen utasítások eredője mindig éppen a kívánt algoritmus végrehajtása legyen.

További előrelátható alkalmazások közül megemlítem az algoritmikus nyelvek optimalizálását abból a szempontból, hogy minden jel „épp a legjobbkor" hozza az általa szolgáltatott információt. (Ha túl korán hozza, tárolni kell, míg az ezen információ feldolgozásához szükséges többi adat is beérkezik; ha túl későn hozza, akkor ezeket a többi adatokat kell sokáig tárolni.) De — megfelelő matematikai modellek segítségével — lehetségesnek tartok a matematikán, a matematikai logikán és a számítástechnikán kívüli alkalmazásokat, pl. a matematikai nyelvészetben. Gondolok pl. a morfémahatárok szabatos definíciójára, amelyek nyilván azzal a minőségi változással függnek össze, amely a szó egyes jelei (a fonémák, ill. az írott nyelv esetén a betűk) szolgáltatta információban mutatkozik.

(Beérkezett: 1962. VI. 28)

SOME PROBLEMS OF QUALITATIVE INFORMATION THEORY

(Abstract)

To-day information theory is dealing with the possible ways of measuring information *quantity*. However, given a coding system, also the question, *about what* a particular sign of a message gives information, can be dealt with mathematically. In the simplest case, this information consists in reducing the set about which before arrival of the sign in question was known to contain the object to be given, totally or partially, by the whole message, to some of its sub-sets, depending in general, besides the sign in question, also on those arrived prior to it. Applications, especially to formula languages.

ALGEBRAI RENDSZEREKEN ÉRTELMEZETT FÜGGVÉNYEGYENLETEK
I. ALGEBRAI MÓDSZEREK A FÜGGVÉNYEGYENLETEK ELMÉLETÉBEN*

Írta: HOSSZÚ MIKLÓS

1. §. A függvényegyenletek elméletének alapvonalai

1. Célkitűzés. A matematika jelenkori fejlődésére jellemző a klasszikus szétta-goltság feloldódása, távolálló ágazatok összefonódása. Így pl. az algebra és az analízis határterületein önálló ágazatok születtek, melyek mind a problémáik, mind pedig a módszereik tekintetében egyaránt sorolhatók akár az algebrához, akár az analízis-hez. E dolgozat a függvényegyenletek elméletében fellelhető algebrai vonatkozások kidomborításával kíván egy felépítést bemutatni.

Az algebrai szemlélet alkalmazásának a gyümölcseként elsősorban az tűnik ki, hogy előzetes vagy közbeiktatott algebrai vizsgálatok megkönnyítik sok olyan függ-vényegyenlet megoldását, melyet eddig csupán az analízis fegyvertárához tartozó szo-kásos módszerrel tárgyaltak. Nem célunk, hogy az absztrakt algebrában előforduló klasszikus függvényegyenletekkel foglalkozzunk, mint pl. amilyenekre a csoport bővítések problémája vezet. Erősen leszükítené a problémát, ha ezekre analitikus módszereket alkalmaznánk. Inkább arra törekszünk, hogy rámutassunk az eddig csak a speciális valós vagy komplex test felett értelmezett függvényegyenletek általánosabb algebrai struktúrák felett való vizsgálatának lehetőségére, bár e téren is meg kell küzdenünk egyes előítéletekkel. Szembe kell szállni azzal az ellenvetéssel, hogy ameny-nyiben valamilyen általánosítást az illető függvényegyenlet eddig ismert megoldási módszere egyáltalán megengedne, akkor sem jutnánk a valós vagy komplex testtől lényegesen eltérő általánosabb struktúrához, és ott sem mondana semmi különös újat a megoldás. E kifogás azonban csak addig tartható fenn, amíg meg nem vizsgáljuk néhány példán, hogy eddig milyen módszerrel történt az illető függvényegyenlet megoldása. Ennek során könnyen rájövünk arra, hogy a problémát általánosabban megfogalmazva, algebrai módszerekkel, rövidebb úton sokkal távolabb jutunk, amennyiben a megoldás lehet sokkal általánosabb is, tekintve, hogy az analízis segédeszközeihez szükségképpen megkívánt folytonossági, differenciálhatósági stb. megszorítások elesnek. Példaként felhozhatnám az

$$F[G(x, y), z] = H[x, K(y, z)]$$

függvényegyenletet [2].

Egyébként az algebrai szemléletnek az is jelentős haszna lehet, hogy az a függvényegyenlet-fajták és a megoldások, továbbá a megoldásban szereplő tet-szőleges elemek osztályozását áttekinthetőbbé teszi.

* A dolgozat a szerző 1960-ban készített doktori disszertációjának egy része, RÉDEI LÁSZLÓ, FUCHS LÁSZLÓ, és főként ACZÉL JÁNOS opponensi véleményének figyelembevételével módosított formában.

2. A függvényegyenletek osztályozása. Fogalmazzuk meg pontosan, mit jelentenek a „függvényegyenlet", a „függvényegyenlet megoldása", a „megoldásban szereplő tetszőleges elemek" kifejezések!

Tekintsük az $F, G, \ldots$ függvénynek egy H halmazát, melyek egy X halmaz elemeit egy Y halmazba képezik le. Legyen φ a H-nak egy C halmazba való leképezése. *Függvényegyenletnek* nevezzük a

$$\varphi F = c \tag{1}$$

kifejezést, ahol c a C valamely rögzített eleme. Az F függvény az egyenletben szereplő meghatározandó ismeretlen függvény. Az egyenlet *megoldásának* nevezzük bármelyik F-et, amely (1)-et kielégíti. A megoldások M összessége a H-nak részhalmaza.

Az *F megoldás H-ra vonatkozó legáltalánosabb alakja* valamely E halmazból származtatható

$$F = \chi f, \quad f \in E$$

alakban, ahol f az E tetszőleges eleme, és χ olyan leképezés, mely E-t M-re képezi le. A megoldás legáltalánosabb alakja nyilván határozatlan egy tetszőleges $1-1$ leképezés erejéig, ugyanis ez $f \in E$ elemekre az

$$f \to f' = \varepsilon f$$

$1-1$ leképezést alkalmazva olyan E' halmazt nyerünk, amelynek elemeiből a megoldások

$$F = \chi' f', \qquad \chi' = \chi \varepsilon^{-1}, \qquad f' \in E'$$

alakban lesznek felírhatók. Határozatlan továbbá E olyan szempontból is, hogy χE többszörösen fedheti M-et, vagyis egy-egy $F \in M$ megoldást több $f, g \in E$ elemből is származtathatunk az

$$F = \chi f = \chi g$$

alakban. Célszerű tehát kiválasztani E-nek azt a legszűkebb $\overline{E}$ részét, melyre $\chi\overline{E}$ már egyszeresen fedi M-et, mert így kapjuk meg a megoldásban szereplő *lényeges* tetszőleges elemeket, melyek közül már egyik sem hagyható el a teljes megoldási rendszer származtatásához. Ez az eset áll fenn pl. a lineáris differenciálegyenletek esetében, midőn a legáltalánosabb megoldás egyetlen lineárisan független (alap) rendszerből származtatható. A lineáris függvényegyenletek elméletében szemléltethetők legkézzelfoghatóbban e fogalmak [15, 28]. Minthogy a megoldásban szereplő tetszőleges elemek halmaza és a megoldás legáltalánosabb alakjának fogalma a megoldások részhalmazához képest több határozatlanságot tartalmaz, ezért fő feladatunknak ez utóbbi megadását tekintjük egy függvényegyenlet megoldásával kapcsolatban.

Gyakori eset, hogy X és Y valamely A_i, illetve B_i halmazokból képezett direkt szorzat:

$$X = \bigotimes_{i=1}^{n} A_i, \qquad Y = \bigotimes_{i=1}^{m} B_i,$$

vagyis az $y = F(x)$ függvényben az y, x függő, illetve független változók több komponensre bomlanak:

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \qquad x_i \in A_i,$$

$$y = (y_1, \ldots, y_m), \qquad y_i \in B_i.$$

Ekkor az (1) függvényegyenlet lényegében m ismeretlen függvényt tartalmaz, és n független változót, a függvényegyenletre jellemző eme számokat tehát az *ismeretlen függvénynek*, illetve *szabad változók számának* nevezzük. Fontos speciális eset, midőn az $F(x)$ függvény mindegyik komponense független bizonyos x_i változóktól. Azt a számot, mely megmutatja, hogy az egyenletben szereplő F komponensei közül mindegyik legalább hány változótól független, az egyenlet *degeneráltsági fokának* nevezzük. Szokás még megkülönböztetni a *függvények minimális változó-számát* is, mely megadja, hogy F komponensei közül mindegyik legalább hány változótól függ ténylegesen.

A referáló folyóiratok *speciális függvényegyenletek* címszó alatt foglalják össze az olyan (1) alatti egyenleteket, melyekben φ az ismeretlen F függvény komponensein kívül csupán véges számú megadott függvényt tartalmaz, és e függvényekből van felépítve a függvényeknek a független változók helyébe véges számú lépésben történő helyettesítésével. A megadott függvények egymásba helyettesítése nem változtat lényegesen a függvényegyenlet szerkezetén, az ismeretlen függvények egymásba helyettesítése azonban annál inkább. A függvényegyenletet *annyiszorosan összetettnek* nevezzük, ahány lépésben helyettesítésekkel felépíthető a függvényegyenlet, az ismeretlen függvényt, illetve annak adott függvényét argumentum gyanánt szerepeltetve az ismeretlen függvényben. Pl. a kétváltozós F_i függvényekre értelmezett

$$F_1[F_2(x_1, x_2), F_3(x_3, x_4)] - F_4[F_5(x_1, x_3), F_6(x_2, x_4)] = 0$$

egyenlet egyszeresen összetett, ugyanis felírható az

$$\alpha[F\beta F(x)] = 0$$

alakban, ahol

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad F = (F_1, F_2, ..., F_6),$$

$$\alpha(F_1, ..., F_6) = F_1(F_1, F_3) - F_4(F_5, F_6),$$

$$\beta(F_1, ..., F_6) = \big(F_2(x_1, x_2), F_3(x_3, x_4), F_5(x_1, x_3), F_6(x_2, x_4)\big).$$

és a $F_i(x)$ függvény független az x változó bizonyos komponenseitől.

3. Az algebra alkalmazási területei a függvényegyenletek elméletében. Vegyük rendszeresen szemügyre, hol nyílik lehetőség az algebrai fogalmak és módszerek hatékony alkalmazására a függvényegyenletek elméletében.

a) Egyes függvényegyenlet-problémák, melyeket korábban egymástól elszigetelve vizsgáltak, meglepő rokonságot mutatnak, s közös általánosításuk algebrai szempontból egységesen kezelhető. Példaként említhetném az

$$F[F(x, y), z] = F[x, F(y, z)] \quad \text{(asszociativitás)},$$

$$F[F(x, z), F(y, z)] = F(x, y) \quad \text{(tranzitivitás)},$$

$$F[F(x, u), v] = F(x, u+v) \quad \text{(tranzláció)},$$

$$F[F(x, u), v] = F[x, G(u, v)] \quad \text{(transzformáció)},$$

$$F[F(x, y), F(u, v)] = F[F(x, u), F(y, v)] \quad \text{(biszimmetria)}$$

függvényegyenleteket [2], melyek valamennyien az $F: A^4 \to A^m$ függvényre értelmezett, kétszeresen összetett és kétszeresen elfajult (degenerált)

$$F\{\pi F[\varrho F(x)]\} = c$$

függvényegyenlet speciális esetei, ahol π, ϱ az A^m direkt szorzat halmaz bizonyos adott vetítései A^4-re.

Segítségünkre lehetnek továbbá a függvényegyenletben szereplő függvényekre kirótt mellékfeltételek pontosabb megjelölésénél is az algebrai fogalmak. Sok esetben kiderült pl., hogy az előzőleg analitikus módszerekkel kezelt függvényegyenletben a folytonossági, szigorú monotonitási mellékfeltételek pótolhatók sokkal általánosabb, algebrai, invertálhatósági feltételekkel.

b) Csupán felületes áttekintésre is feltűnik, hogy a függvényegyenletek megoldásának két alapvető módszere van: a szabad változók, illetve az egyenletben szereplő bizonyos függvényértékek ügyes megválasztása és az egyenlet ismételt alkalmazásával (iterációval) nyert többszörösen összetett egyenletből határátmenettel olyan egyenlet felírása, melyből valamelyik függvény már könnyebben meghatározható, ill. a függvény tetszőleges helyen felvett értéke megkonstruálható. Az előbbi módszer szempontjából nem szorul alátámasztásra az algebrai fogalmak (mint pl. az invertálhatóság, vagy ennek hiányában a kongruencia osztályokba sorolás) s különösen a gruppoidok, kvázicsoportok elméletében szereplő fogalmak jelentősége. Kevésbé nyilvánvaló azonban, hogy a jellegzetesen analitikus iteratív módszer, ahol a határátmenet esetén a folytonosságnak is mindig szerepe van, hogyan kezelhető és általánosítható algebrai módszerré. Gondoljuk meg azonban, hogy egy vagy több függvény ismételt egymásba helyettesítésével egy félcsoporthoz, illetve invertálható függvényekkel csoporthoz jutunk, tehát szabad szorzat konstrukcióval olyan egyenlethez jutunk, melyben egy félcsoport, illetve csoportművelet is szerepel, s ez minden folytonossági feltétel nélkül is megkönnyítheti a megoldást. E módszer alkalmazását látjuk a [23, 24] dolgozatokban.

További általános módszer a függvényegyenletek megoldására a differenciál-, illetve integrálegyenletre való vezetés. E téren valóban nem sok mondanivalója akad az algebristának. Viszont tagadhatatlan, hogy sok függvényegyenlet megoldási probléma, mint pl. a geometriai objektumok klasszifikáció elméletében előfordulók is, melyeket előzőleg analitikus módszerekkel [4] (sőt korábban a Lie-elmélet apparátusával [16]) vizsgáltak, algebrai problémáknak bizonyultak, s pl. e függvényegyenletek megoldási módszere lényegében egy csoport, az analitikus függvények szubsztitució csoportjának szerkezeti vizsgálatát: az összes lehetséges (illetve folytonossági feltételek mellett a zárt) alcsoportok megkeresését jelenti [16]. Néhány példa kapcsán ilyen kérdéssel foglalkozik [5, 21] is.

Lényegében a differenciálegyenletre vezetés módszeréhez tartozik, ill. rokon azzal az az eljárás is, hogy az ismeretlen függvényeket sorbafejtve és a függvényegyenletbe helyettesítve, az együtthatók összehasonlítási elve alapján rekurzív összefüggést állapíthatunk meg a meghatározandó függvény együtthatóira. E módszer kiterjesztésével kapcsolatban merült fel [42] az a probléma, hogy melyik az a legáltalánosabb algebrai struktúra, melyben a közönséges polinómokhoz hasonlóan képezett polinómok együtthatóinak összehasonlítási elve még érvényes. E kérdés még lezáratlan, a [3, 22] dolgozatok eredményei azonban jelentenek előrehaladást.

Amint integrálegyenletek megoldásánál fontos szerepet játszik az egyenlet linearizálása és miként a lineáris egyenletek elmélete van leginkább kiépítve, úgy a függvényegyenletek közül is a lineáris függvényegyenlet vizsgálata a legfontosabb. Itt is kézenfekvő az algebrai általánosítás, és az algebrai módszerek alkalmazása: gondoljunk csak a homológia csoportok függvényegyenleteire, vagy a csoportok karakter elméletére.

c) Az egyenletek megoldásának, illetve a megoldások legáltalánosabb alakjának felírásánál rendkívül hasznos az algebrai fogalmak használata, mint pl. a bizonyos elemek által kifeszített lineáris altér, izomorfizmus, izotópizmus, homomorf kép stb. Összefoglalva az a), b), c) alatt kifejtetteket: az algebrai fogalmak használata hasznos mind a függvényegyenlet problémák megfogalmazásánál (az egyes egyenlet fajták osztályozásánál), mind a megoldási módszerben, mind a megoldás felírásában.

4. Az elnevezések rövid áttekintése. Az algebra és a kvázicsoportok [11, 21] elméletének szokásos és jól ismert alapfogalmait gyakran használja e dolgozat. Így pl. *algebrának* nevezzük az $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ halmazok és egy F leképezés együttesét, ahol F az $A_1 \times \ldots \times A_n$ direkt szorzatot képezi le A_{n+1}-be, amit röviden az

$$F: A_1 \times \ldots \times A_n \to A_{n+1}$$

jelöléssel lehet kifejezni. Az $n=2,3$ esetben *binér, ternér* algebrához jutunk ezen értelmezéssel. Ha az A_k halmazok valamennyien megegyeznek, akkor *gruppoidról* beszélünk. $Q(F)$, vagy más jelöléssel $Q(\circ)$, vagy még rövidebben Q° *kvázicsoport* az olyan binér gruppoid, mely egy Q halmazból és egy

$$F(x, y) = x \circ y : Q \times Q \to Q$$

leképezésből áll, és rögzített $y \in Q$, illetve $x \in Q$ esetén az

$$x \to x \circ y, \quad y \to x \circ y : Q \to Q$$

leképezések invertálhatók.

Itt rögzítjük, hogy mit nevezünk invertálható leképezésnek. Az $x \to y = \alpha x$ leképezésről azt mondjuk, hogy az X halmazt az Y halmaz*ba* képezi le, ha X minden x elemét az Y valamely $y = \alpha x$ eleméhez rendeli hozzá. Az α leképezés X-et Y-ra képezi le, ha az αx, $x \in X$ elemek összessége, amit röviden αX-szel lehet jelölni, kimeríti Y-t: $\alpha X = Y$. Az α leképezésről azt mondjuk, hogy $1-1$, ha minden $\alpha x \in Y$ elemhez pontosan egy $x \in X$ tartozik. Az $\alpha: X \to Y$ leképezés *invertálható* Y-on, ha X-et $1-1$ módon képezi le Y-ra. Nyilván minden $\alpha: X \to Y$ $1-1$ leképezés invertálható az $Y_1 = \alpha X$-en, mely esetleg valódi része Y-nak.

Használjuk a szokásos izotópizmus, homotópizmus, autotópizmus, izomorfizmus, automorfizmus, homomorfizmus, endomorfizmus elnevezéseket. Így pl. az

$$F: A \times B \to C$$

algebra *izotópizmusának* nevezzük az

$$\alpha: A \to A', \quad \beta: B \to B', \quad \gamma: C \to C'$$

invertálható leképezések együttesét, ha van olyan $G: A' \times B' \to C'$, mellyel fennáll

$$G(\alpha x, \beta y) = \gamma F(x, y), \qquad x \in A, \ y \in B.$$

Ilyenkor G-t röviden F izotópjának nevezzük. Nem feltétlen invertálható leképezések esetén megfelelően *homotópizmusról* beszélünk. Ha

$$A=A', \quad B=B', \quad C=C', \quad F=G,$$

akkor (α, β, γ) autotópizmus, illetve endotópizmus, aszerint, hogy a leképezések invertálhatók-e vagy sem. Az

$$A=B=C, \quad A'=B'=C', \quad \alpha=\beta=\gamma$$

speciális esetben viszont a „top" szótag a „morf" szótaggal helyettesítendő, s ekkor megfelelően azt mondjuk, hogy $A'(G)$ az $A(F)$ *izomorf*, illetve *homomorf* képe. G az F *főizotópja*, ha $C=C'$, és γ az azonos leképezés.

2. §. Kvázicsoportokon értelmezett függvényegyenletek

1. Kétszeresen összetett, kétszeresen elfajult, négy szabad változójú, és adott függvényt nem tartalmazó egyenletek osztályozása. A címben megadott függvényegyenlet-típus legáltalánosabb alakja:

$$F\{G[H(x)]\} = c, \tag{2}$$

ahol az ismeretlen F, G, H függvények értelmezési tartománya négytényezős direkt szorzat, s hogy egyáltalán értelme legyen az egyenletnek, G, illetve H értékkészlete F, illetve G értelmezési tartományába kell essen. Ha az egyenlet kétszeresen elfajult, akkor mindegyik függvény lényegében csak két komponenstől függ, tehát az egyenlet így írható:

$$\begin{aligned} &F_i\{G_{j_1}[H_{k_1}(x_{p_1}, x_{p_2}), H_{k_2}(x_{q_1}, x_{q_2})], \\ &G_{j_2}[H_{l_1}(x_{r_1}, x_{r_2}), H_{l_2}(x_{s_1}, x_{s_2})]\} = c_i, \end{aligned} \tag{2'}$$

ahol az indexek az 1, 2, 3, 4 értékek közül vannak választva.

Mint látjuk, egyenletünk csupa binér műveletet tartalmaz ismeretlen függvény gyanánt, melyek mindannyian egy-egy kéttényezős direkt szorzatot képeznek le valamely halmazra. Ha a függvények olyanok, hogy akármelyik változó értelmezési tartományát alkotó direkt tényezőt $1-1$ módon képezik le az illető függvény teljes értékkészletére, akkor az általánosság korlátozása nélkül azonosíthatjuk a direkt tényezőket és a szereplő kétváltozós függvények értékkészleteit.

Ha $F_i(x, y): Q \times Q \to Q$ kvázicsoport művelet, akkor az

$$F_i(x, y) = c_i \qquad (c_i \text{ rögzített})$$

összefüggés x és y között egy $y=f(x)$ függvénykapcsolatot létesít, mely Q-t nyilván $1-1$ módon képezi le önmagára. Tehát akkor a (2) egyenlet csupa különböző függvénnyel

$$F[G(x_{p_1}, x_{p_2}), H(x_{q_1}, x_{q_2})] = K[L(x_{r_1}, x_{r_2}), M(x_{s_1}, x_{s_2})], \tag{3}$$

$$(x_{j_i} \in Q; \; j=p, q, r, s; \quad i=1, 2)$$

alakban írható fel, ahol pl.

$$F(x, y) \overset{\text{def}}{=} f[G_{j_1}(x, y)],$$

és a szereplő függvények között természetesen akadhatnak megegyezők is.

További egyszerűsítésre vezet az az észrevétel, hogy a szereplő változók mindegyikének legalább kétszer kell előfordulnia az egyenletben, különben a többi változó rögzítésével az derülne ki, hogy az őt tartalmazó függvény csak látszólag függ tőle, s nem is kvázicsoport művelet. Ha valódi négy szabad változót tartalmazó egyenletet tekintünk, akkor mindegyik változónak elő is kell fordulnia. Minthogy az egyenletben összesen 8 helyen szerepel szabad változó, ezért tehát mindegyik változónak pontosan kétszer kell szerepelnie. Így a triviális esetektől eltekintve a következő lehetőségek állhatnak elő:

$$F[G(x,y), H(u,v)] = K[M(x,u), N(y,v)], \tag{4}$$

$$F[G(x,u), H(x,v)] = K[M(y,u), N(y,v)], \tag{5}$$

$$F[G(x,u), H(x,v)] = K[M(y,y), N(u,v)]. \tag{6}$$

Az osztályozás fő szempontja az, hogy szerepel-e ugyanazon változó többször is egyik oldalon, illetve egyazon függvényen belül.

Akapott egyenletek közül (4) a biszimmetria

$$B[B(x,y), B(u,v)] = B[B(x,u), B(y,v)] \tag{7}$$

egyenletének általánosítása, s mindegyikük visszavezethető az asszociativitás függvényegyenletének

$$F[G(x,y), z] = H[x, K(y,z)], \qquad x, y, z \in Q \tag{8}$$

általánosítására. E visszavezetést a 2-ben részletezzük. Itt még azt mutatjuk meg, milyen speciális egyenletek tartoznak ehhez a típushoz. A már említett (7) biszimmetria [2] egyenletén kívül nyilván ide tartozik:

$$(xy)\otimes(uv) = (x\otimes u)(y\otimes v) \qquad [13], \tag{9}$$

$$(xy)(uv) = (xv)(uy) \qquad [40], \tag{10}$$

$$(xy)(xu) = (vy)(vu) \qquad [31], \tag{11}$$

$$(x\otimes y)(u*v) = (x\otimes u)(y*v) \qquad [29, 30], \tag{12}$$

$$[(xy)\otimes u][x*(vu)] = vy \qquad [12], \tag{13}$$

mely utóbbi egyenlet ugyanis pl. egyenértékű

$$F(x*a, b\otimes u) = F[M(x,b), N(a,u)]$$

-val, ha bevezetjük az

$$F(y,v) \stackrel{\text{def}}{=} vy$$

függvényt és az $xM=b$, $Nu=a$ összefüggéssel értelmezett M, N függvényeket.

2. Visszavezetés és néhány speciális eset. Mint előzőleg említettük, a négy szabad változót tartalmazó egyenletek bizonyos invertálhatósági feltételek mellett lényegében a kvázicsoportokon értelmezett, asszociatív típusú (8) egyenletre vezethetők vissza, mely csupán három szabad változót tartalmaz. Nézzük ezt a visszavezetést!

Pl. az

$$F[G(x,y), H(u,v)] = K[M(x,u), N(y,v)] \tag{4}$$

egyenlet esetében $u=a$ rögzítéssel azt látjuk, hogy

$$F[x, H(a,y)],\ G(x,y),\ K[M(x,a),y],\ N(x,y)$$

valóban (8) alakú egyenletet elégít ki, tehát abból F, G, K, N legáltalánosabb alakját meghatározva, (4)-be visszahelyettesítéssel megadható H, M is.

Az

$$F[G(x,u), H(x,v)] = K[M(y,u), N(y,v)] \tag{5}$$

egyenlet visszavezetése érdekében pedig elég $y=a$ értékét rögzíteni és bevezetni a

$$z = G(x,u)$$

változót, melyből $u = U(z,x)$-et kifejezve, a

$$\bar{K}(u,v) \overset{\text{def}}{=} K[M(a,u), N(a,v)]$$

jelöléssel valóban

$$F[z, H(x,v)] = \bar{K}[U(z,x), v]$$

adódik. G, K, M, N meghatározása érdekében is hasonló visszavezetés végezhető.

Hasonló az eljárás az

$$F[G(x,u), H(x,v)] = K[M(y,y), N(u,v)] \tag{6}$$

egyenlet esetében is, csak ott a

$$\bar{H}(u,v) \overset{\text{def}}{=} K[M(a,a), N(u,v)]$$

jelölésre van szükség.

Az eddig mutatott visszavezetéseken kívül a (8) asszociativitási egyenlet jelentősége sokkal több: tartalmazza a gruppoidok és kvázicsoportok elméletében ismert és vizsgált legfontosabb azonosságokat. Felsorolunk néhányat ezek közül, anélkül, hogy a teljességre törekednénk:

(14)	$x(yz)=y(xz)$	[18, 27, 36, 37],
(15)	$x(yz)=z(yx)$	(GRASSMANN) [1, 35, 36, 39, 18],
(16)	$(xy) * (yz) = xz$	(ACZÉL) [2],
(17)	$(xz)\ (yz) = xy$	(tranzitivitás) [2, 14, 17, 19, 38],
(18)	$x[y(zx)] = zy$	(TARSKI) [39],
(19)	$x[(yz)(yx)] = z$	(NEUMANN) [17],
(20)	$(xy) * z = (zy) * x$	(SCHRÖDER) [34],
(21)	$(xy) * z = x(y * z)$	(SADE) [32],
(22)	$(xy)(xz) = zy$	(SCHWEITZER) [35, 36, 14],
(23)	$xy = uv \rightleftarrows xu = yv$	[32, 20].

Ezek közül (16), (23)-ról nem látszik közvetlenül, hogy (8) speciális esetei lennének, de új változók és függvények bevezetésével ez könnyen kimutatható. Válasszunk ki egy jellegzetes példát, tekintsük pl. (23)-at és mutassuk ki ezt. Tekintsük az xy művelet

xy^{-1} inverz műveletét, melyet az $(xy^{-1})y = (xy)y^{-1} = x$ összefüggés értelmez. Akkor (23) a következő alakban írható:

$$[(uv)y^{-1}]u = yv, \qquad (uv)y^{-1} = (yv)u^{-1},$$

mely utóbbi valóban (8) speciális esete, midőn

$$F(x, y) = H(y, x) = xy^{-1},$$
$$G(x, y) = K(y, x) = xy.$$

További hasonló speciális esetek és alkalmazások tekintetében [2, 7 – 10, 18, 26, 32, 38, 41]-re utalunk.

3. Speciális biszimmetrikus és asszociatív típusú egyenletek megoldása. Térjünk vissza a **2.**-ban bemutatott

$$F[G(x, y), H(u, v)] = K[M(x, u), N(y, v)], \tag{4}$$
$$F[G(x, u), H(x, v)] = K[M(y, u), N(y, v)], \tag{5}$$
$$F[G(x, u), H(x, v)] = K[M(y, y), N(u, v)] \tag{6}$$

egyenletek vizsgálatára. Mint ott megjegyeztük, mindegyikük az asszociativitási egyenletre vezethető vissza. A [20]-ban viszont be van bizonyítva, hogy kvázicsoportokon az asszociativitási egyenlet minden megoldása csoportművelet izotópja. Az (5) egyenlet példáján mutassuk meg, hogyan használható fel e tény a megoldás legáltalánosabb alakjának felírásához.

Ha $F(x, y)$ egy $x \otimes y$ csoportművelet izotópja, akkor felírható

$$F(x, y) = f^{-1}[g(x) \otimes h(y)]$$

alakban, tehát $F(x, y)$ főizotópja az $x \otimes y$-nal izomorf

$$x \circ y = f^{-1}[f(x) \otimes f(y)]$$

csoportműveletnek:

$$F(x, y) = \gamma x \circ \chi y, \tag{24}$$

ahol nyilván

$$\gamma \overset{\text{def}}{=} f^{-1}g, \quad \chi \overset{\text{def}}{=} f^{-1}h.$$

(24)-et (5)-be helyettesítve, x és y rögzítésével látható, hogy K is ugyanazon csoportművelet főizotópja:

$$K(x, y) = \mu x \circ \nu y. \tag{25}$$

(24)-et és (25)-öt ismét (5)-be helyettesítve, alkalmas rögzítés után megfelelő új jelölésekkel leolvasható[1]

$$G(x, u) = \gamma^{-1}(\varphi u \circ \varrho x), \tag{26}$$

[1] Ugyanis (24), (25) és (5) szerint akkor

$$\gamma G(x, u) \circ \chi H(x, v) = \mu M(y, u) \circ \nu N(y, v),$$

tehát y, v értékét rögzítve:

$$\gamma G(x, u) = \varphi u \circ \varrho x$$

adódik, ahol

$$\varphi u \overset{\text{def}}{=} \mu M(y, u), \quad \varrho x \overset{\text{def}}{=} \nu N(y, v) \circ [\chi H(x, v)]^{-1}.$$

és hasonló eljárással, szukcesszive visszahelyettesítve a már megkapott függvényeket, nyerjük sorban a

$$(27)\quad \begin{cases} H(x, v) = \lambda^{-1}[(\varphi x)^{-1} \circ \psi v], \\ M(y, u) = \mu^{-1}(\varphi u \circ \sigma y), \\ N(y, v) = \nu^{-1}[(\sigma y)^{-1} \circ \psi v] \end{cases}$$

képleteket is. Egyszerű visszahelyettesítés meggyőz, hogy (24)—(27) valóban ki is elégíti (5)-öt, tetszőleges (invertálható) φ, ψ, ... függvénnyel.

Teljesen hasonló számolással kapjuk (4) megoldásaként az

$$(28)\quad \begin{cases} F(x, y) = \gamma x + \lambda y, \\ K(x, y) = \mu x + \nu y, \\ G(x, y) = \gamma^{-1}(\varphi x + \psi y), \\ H(x, y) = \chi^{-1}(\varrho x + \sigma y), \\ M(x, y) = \mu^{-1}(\varphi x + \varrho y), \\ N(x, y) = \nu^{-1}(\psi x + \sigma y) \end{cases}$$

formulákat, ahol $x + y$ visszahelyettesítésből láthatóan *Abel*-féle csoportművelet.

Nem részletezzük (6) megoldását sem, csak a végeredményt írjuk fel:

$$(29)\quad \begin{cases} F(x, y) = \gamma x \circ \chi y, \\ N(u, v) = \nu(\varphi u \circ \sigma v), \\ H(x, v) = \chi^{-1}(\psi x \circ \sigma v), \\ G(x, u) = \gamma^{-1}[\varphi u \circ (\psi x)^{-1}], \\ M(y, y) = c \text{ állandó}, \\ K(c, t) = \nu^{-1} t. \end{cases}$$

Ugyancsak a számolás részletezése nélkül felírjuk rendre az (9)—(13) egyenletek megoldásait:

$$(9')\quad \begin{cases} xy = \alpha_1 x = \alpha_2 y + a, \\ x \otimes y = \beta_1 x + \beta_2 y + a, \end{cases}$$

$$(10')\quad xy = \alpha x + \alpha y + a,$$

$$(11')\quad xy = (\alpha x)^{-1} \circ \alpha y \circ a,$$

$$(12')\quad \begin{cases} xy = \gamma x + \chi y, \\ x \otimes y = \gamma^{-1}(\varphi x + \psi y), \\ x * y = \chi^{-1}(\psi x + \sigma y), \end{cases}$$

$$(13')\quad \begin{cases} xy = \sigma x = \chi y, \\ x \otimes y = \gamma^{-1}(x - \chi y), \quad [(x - y) + y = x], \\ x * y = \chi^{-1}(y - \gamma x), \end{cases}$$

ahol $x \circ y$ tetszőleges csoportművelet, $x+y$ tetszőleges *Abel*-féle csoportművelet, $\gamma, \chi, \varphi, \psi, \sigma$ tetszőleges invertálható leképezések, α tetszőleges automorfizmus Q^+, illetve Q°-on, α_i, β_i tetszőleges felcserélhető automorfizmusok:

$$\alpha_i\beta_j = \beta_j\alpha_i; \qquad i, j = 1, 2,$$

$a \in Q$ pedig tetszőleges rögzített elem, mely (9')-ben kielégíti az $\alpha_1 a + \alpha_2 a = \beta_1 a + \beta_2 a$ összefüggést.

Az (14) – (23) speciális asszociatív típusú egyenletek kvázicsoport megoldásainak is csak a végeredményeit írjuk fel:

(14') $$xy = \varphi x + y,$$

(15') $$xy = \alpha^2 x + \alpha y + a,$$

(16') $$\begin{cases} xy = (\varphi x) \circ (\varphi y)^{-1}, \\ x * y = x \circ y, \end{cases}$$

(17') $$xy = x \circ y^{-1},$$

(18') $$xy = x - y + a,$$

(19') $$xy = x - y,$$

(20') $$\begin{cases} x * y = \varphi x + \psi y, \\ xy = \varphi^{-1}(\chi y + \psi x), \end{cases}$$

(21') $$\begin{cases} x * y = x \circ \varphi y, \\ xy = \psi x \circ y, \end{cases}$$

(22') $$xy = x - y + a,$$

(23') $$xy = \varphi(x - y),$$

ahol $x \circ y$ tetszőleges, illetve $x+y$ tetszőleges *Abel*-féle csoportművelet, x^{-1}, illetve $-x$ a megfelelő csoportműveletre vonatkozó inverzet jelöli, φ, ψ, χ tetszőleges invertálható leképezések, α tetszőleges automorfizmus ($\alpha^2 = \alpha\alpha$), $a \in Q$ tetszőleges állandó.[2]

4. A Pexider-féle egyenlet általánosítása. Nem érdektelen a specializálás egy jellegzetes lépésére külön felhívni a figyelmet, éspedig arra, hogy sok esetben döntő jelentőségű az

(30) $$\omega(x \circ y) = \varrho x \circ \sigma y, \qquad x, y \in Q$$

egyenletnek az $\omega, \varrho, \sigma: Q \to Q$ függvényekre vonatkozó megoldása, ahol $x \circ y$ valamely csoportművelet. Ilyen egyenlethez jutunk pl. a (24), (26) formulából az

$$F(x, y) = G(x, y) = \gamma x \circ \chi y = \gamma^{-1}(\varphi x \circ \varrho y)$$

specializálással, ha bevezetjük az

$$\omega \overset{\text{def}}{=} \gamma, \quad \psi \overset{\text{def}}{=} \varphi\gamma^{-1}, \quad \sigma \overset{\text{def}}{=} \varrho\chi^{-1}$$

[2] Megjegyezzük, hogy a megoldások közül némelyiket kvázicsoportnál általánosabb gruppoidon is megadhatjuk: így pl. (14)-nél elég csak annyit feltenni, hogy létezik olyan z_0, melyre $x \to xz_0$ invertálható [18], sőt az is elég, ha $Qz_0 = Q$ teljesül; (17)-nél elég csak a baloldali leoszthatóságot feltenni [19], stb.

függvényeket. A (30) egyenlet az

$$f(x+y) = g(x)+h(y)$$

Pexider-féle [25] egyenlet általánosítása arra az esetre, midőn a valós számokon értelmezett összeadás helyett egy $x \circ y$ csoportművelet van adva. A (30) egyenlet megoldása más szóval a Q csoport autotopizmusainak a meghatározását jelenti, illetve endotopizmusainak meghatározását, ha ω, ϱ, σ nem feltétlen invertálhatók.

Ismeretes, [25], hogy adott Q° csoporton a (30) függvényegyenlet legáltalánosabb megoldása

$$\omega x = a \circ \alpha x \circ b, \quad \varrho x = a \circ \alpha x, \quad \sigma x = \alpha x \circ b,$$

ahol α tetszőleges endomorfizmus.

Ha ω, ϱ, σ közül valamelyikük invertálható, akkor α is az, következőleg ω, ϱ, σ közül mindegyikük invertálható.

IRODALOM

[1] N. H. Abel, Untersuchung der Functionen zweier unabhängigen veränderlichen Grössen x und y, wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben dass $f[z, f(x, y)]$ eine symmetrische Function von x, y und z ist, *Journ. reine angew. Math.*, **1** (1826), 11–15.

[2] J. Aczél: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel, 1960.

[3] J. Aczél, Über die Gleichheit der Polynomfunktionen auf Ringen, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 105–107.

[4] J. Aczél–S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, 1960.

[5] J. Aczél–M. Hosszú–E. G. Strauss, Functional equations for products and compositions of functions, *Publicationes Math.*, **8** (1961), 218–224.

[6] В. Д. Белоусов, О дистрибутивных системах операций, Мат. Сборник **36** (1955), 479—500.

[7] В. Д. Белоусов, Транзитивные дистрибутивные квазигруппы, Укранск. Мат. Журнал. **10** (1958), 13—22.

[8] В. Д. Белоусов. Регулярные группы подстановок в квазигруппах, Бельцкий гос. Пед. Инс., Ученые записки, (1958), 39—49.

[9] В. Д. Белоусов, Производные операции и ассоциаторы в лупах, Мат. Сборник, **45**, (1958), 51—70.

[10] В. Д. Белоусов, О структуре дистрибутивных квазигрупп, Мат. Сборник, **50** (92) (1960), 267—298.

[11] R. H. Bruck, A survey of binary systems. *Ergebnisse der Math.*, N. F. XX, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1958.

[12] A. C. Choudhury, On a generalization of Thomsen's triangle in a web, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **34** (2), (1942), 3–5.

[13] L. Fuchs, On mean systems, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **1** (1950), 303–320.

[14] H. Furstenberg, The inverse operation in groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 991–997.

[15] M. Ghermanescu, *Ecuaţii funcţionale*, *Buçuresti*, 1960.

[16] J. Haantjes–G. Laman, On the definition of geometric objects I–II, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag Math.*, **15** (1953), 208–215, 216–222.

[17] G. Highman–B. N. Neumann, Groups as groupoids with one law, *Publ. Math.*, **2** (1952), 215–221.

[18] M. Hosszú, Some functional equations related with the associative law, *Publ. Math.*, **3** (1954), 205–214.

[19] M. Hosszú, On the functional equation of transitivity, *Acta Sci. Math.*, **15** (1954), 203–208.

[20] Hosszú M., Belouszov egy tételéről és annak néhány alkalmazásáról, *MTA III. Oszt. Közleményei*, **9** (1959), 51–56.

[21] Hosszú M., Függvényegyenletek és algebrai módszerek a geometriai objektumok elméletében, I–III, *MTA III. Oszt. Közleményei*, **9** (1959), 149–162, 237–253, 333–346.

[22] M. Hosszú, Notes on vanishing polynomials, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 108–110.
[23] M. Hosszú, A generalization of the functional equation of translation, *NME Közleményei*, **21** (1960), 7–10.
[24] M. Hosszú, Homogeneous groupoids, *Eötvös Acta*, **3–4** (1960–61), 95–99.
[25] M. Hosszú, Remarks on the generalized Pexider's functional equation, *Lucrari Stiintifice*,...
[26] W. A. Hurwitz, Note on the definition of an abelian group by independent postulates, *Annals of Math.*, **8** (1906–1907), 94–96.
[27] A. Kertész–A. Sade, On some mappings of groupoids into themselves: nuclei and their isotopes, *Publ. Math.*, **6** (1959), 214–233.
[28] H. Kiesewetter, Struktur linear Funktionalgleichungen im Zusammenhang mit N. H. Abels Theorem, *Dissertation*, Jena, 1958.
[29] F. Radó, Équations fonctionnelles caracterisant les nomogrammes avec trois echelles rectilignes, *Math. Cluj*, **1** (1959), 19–23.
[30] F. Radó, Sur quelques équations fonctionnelles avec plusieurs fonctions a deux variables, *Math. Cluj*, 1 (1959), 321–339.
[31] A. Sade, Quasigroupes obéissant a certains lois, *Istanbul üniversitesi Fen Fakültesi Mecmussi*, Ser. A, **22** (1957), 151–184.
[32] A. Sade, Quasigroupes parastrophiques. Expressions et identités, *Math. Nachrichten*, **20** (1959), 73–106.
[33] A. Sade, Théorie des systems demosienes de groupoides, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 625–660.
[34] S. Schröder, Über ein eigenthümliche Bestimmung einer Funktion durch formale Anforderungen, *Journ. reine Ang. Math.*, **90** (1881), 189–220.
[35] A. R. Schweitzer, Theorems on functional equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **18** (1912), 192; **19** (1913), 66–70.
[36] A. R. Schweitzer, Remarks on a functional equation, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **21** (1914), 23–29.
[37] D. M. Sinzow, Über eine Funktionalgleichung, *Archiv der Math. und Phys.*, (3) **6** (1903), 216–217.
[38] S. K. Stein, On the foundation of quasigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **85** (1957), 228–256.
[39] A. Tarski, Ein Beitrag zur Axiomatik der abelschen Gruppen, *Fundamenta Math.*, **30** (1938), 253–256.
[40] H. Zassenhaus, *The theory of groups*, New York, 1949.
[41] F. Zitek, On the definition of the articulation Index, *Apl. Mat.*, **6** (1961), 124–134.
[42] A debreceni Kossuth L. Tud. Egy. Mat. Int. feladatgyűjteménye.

(Beérkezett: 1962. VI. 2)

AZ ABSZTRAKT FÜGGŐSÉGI RELÁCIÓ ÉS EKVIVALENSEI

Írta: SZODORAY ERZSÉBET

1. §. Bevezetés

A matematika különböző területein fellépő függőségi relációk számos közös tulajdonságot mutatnak. E közös jelenségek absztrahálása hozta létre a tetszőleges halmazon értelmezett függőségi reláció fogalmát. Ez a fogalom nem új: az axiómarendszerrel értelmezett függőség már VAN DER WAERDEN klasszikussá vált „Moderne Algebra" című könyvében megtalálható (lásd [5], § 36.). Nem sokkal [5] első kiadásának megjelenése után 1935-ben látott napvilágot H. WHITNEY [6] dolgozata, amely VAN DER WAERDEN felfogásának megfelelően axiómatikusan értelmezi az absztrakt függetlenség, bázis és rang fogalmát (véges halmazt véve alapul), továbbá kimutatja ezek ekvivalenciáját.

A WHITNEY-féle rangfüggvény fogalmát R. RADO átviszi végtelen halmazokra és bebizonyítja az invariancia-tételt [4]. A függőség fogalmát tetszőleges számosságú halmazok esetében M. N. BLEICHER és G. B. PRESTON [1], továbbá KERTÉSZ ANDOR [2] dolgozata vizsgálja. Mindkét dolgozat kimutatja (különböző módszerekkel) az invariancia-tételt, amely ebben az esetben azt jelenti, hogy bármely két maximális független elemrendszer számossága megegyezik. Emellett [1] bebizonyítja a függőség és függetlenség, [2] pedig a függőség és rangfüggvény fogalmának ekvivalenciáját.

Mindezidáig nem szerepelt az irodalomban a bázis absztrakt fogalmának végtelen halmazok esetére való kiterjesztése. A jelen dolgozat célja a bázis fogalmának tetszőleges halmazon való axiómatikus értelmezése, s annak kimutatása, hogy az így értelmezett fogalom a függőség, függetlenség és rangfüggvény fogalmával ekvivalens. Az [1] és [2] dolgozatok alapján természetesen elegendő volna az ekvivalenciát ezek bármelyikével kimutatni, mi azonban itt a teljesség kedvéért mind a négy axiómarendszert ismertetjük, s ciklikus bizonyítást adunk azok ekvivalenciájára.

2. §. Axiómarendszerek

1. A függőség axiómarendszere. Legyen S tetszőleges, nem üres halmaz, és $D[x, A]$ (olvasd: x függ A-tól) binér reláció, amely az S halmaz x elemei és A véges részhalmazai között van definiálva, és amely kielégíti a következő feltételeket:

(D_1) ha $x \in A$, akkor $D[x, A]$;
(D_2) ha $D[x, A]$, $a \in A$ és $\overline{D}[x, A \setminus a]$, akkor $D[a, (A \setminus a) \cup x]$;[1]
(D_3) ha $D[x, A]$ és $D[a, B]$ minden $a \in A$ esetén, akkor $D[x, B]$.

[1] $\overline{D}[x, B]$-vel jelöljük azt a tényt, hogy a $D[x, B]$ reláció nem áll fenn (olvasd x nem függ B-től). — Félreértések elkerülése céljából megemlítjük, hogy $A \setminus B$ a halmazelméleti kivonást jelenti, tehát A mindazon elemeinek összességét, amelyek B-nek nem elemei. Itt említjük meg azt is, hogy az alábbiakban fellépő $\subset$ jel mindig *valódi* tartalmazást jelent a nem szükségképpen valódi tartalmazást jelentő $\subseteq$ jellel szemben. Egy A halmaz esetén $|A|$-val jelöljük az A számosságát. Egy halmaz véges részhalmazai közé soroljuk természetesen az üres részhalmazt is, amelyet $\emptyset$-val jelölünk.

Ha az S halmazon definiált $D[x, A]$ reláció rendelkezik a fenti $(D_1)-(D_3)$ tulajdonságokkal, akkor azt mondjuk, hogy $D[x, A]$ *függőségi reláció* S-en.

Az S halmaz véges részhalmazai közötti függőség fogalmát a következőképpen definiáljuk: akkor mondjuk, hogy A függ B-től (ahol A és B S -nek két véges részhalmaza), ha A minden a eleme függ B-től. E tény kifejezésére szolgál a $D[A, B]$ jelölés.

2. A függetlenség axiómarendszere. Legyen $\mathfrak{I}(A)$ olyan függvény, amely a tetszőleges, nem üres S halmaz minden véges A részhalmazát a 0 és 1 elemekből álló kételemű halmaz egyik elemére képezi le úgy, hogy teljesülnek a következő feltételek:

(I_1) $\mathfrak{I}(A) \geqq \mathfrak{I}(A \cup s)$, ahol $s \in S$;

(I_2) ha A n elemű, B $n+1$ elemű részhalmaz S-ben és $\mathfrak{I}(A)=\mathfrak{I}(B)=1$, akkor létezik olyan $b(\in B, b \notin A)$ elem, hogy $\mathfrak{I}(A \cup b)=1$.

Ha az S halmaz véges A részhalmazára $\mathfrak{I}(A)=1$, akkor azt mondjuk, hogy az A halmaz *független,* ha $\mathfrak{I}(A)=0$, akkor az A halmazt nem függetlennek, vagy függőnek nevezzük.

3. A bázis-fogalom axiómarendszere. Legyen S tetszőleges, nem üres halmaz. S összes A véges részhalmazához egyidejűleg hozzárendelünk egy $\mathrm{A}(A')$ függvényt, amely A összes A' részhalmazain van értelmezve, s amelynek értéke 1 vagy 0. (Más szavakkal: S összes véges részhalmazának egyidejűleg kitüntetjük bizonyos részhalmazait.) Azt mondjuk, hogy az S halmazon bázis-fogalom van értelmezve, ha teljesülnek a következő feltételek:[2]

(B_1) ha $\mathrm{A}(A')=1$ és $A'' \subset A'$, akkor $\mathrm{A}(A'')=0$;

(B_2) ha $\mathrm{A}(A')=1$, $\mathrm{A}(A'')=1$ és $a' \in A'$, akkor létezik A''-nek olyan a'' eleme, hogy $\mathrm{A}((A' \setminus a') \cup a'')=1$;

(B_3) ha $A' \subseteqq A$ és $\mathrm{A}'(A'')=1$, akkor létezik A-nak olyan A^* részhalmaza, hogy $A'' \subseteqq A^*$ és $\mathrm{A}(A^*)=1$;

(B_4) ha $A' \subseteqq A$, $\mathrm{A}'(A'')=1$, $\mathrm{A}(A^*)=1$ és $A'' \subseteqq A^*$, akkor $A^* \setminus A'' \subseteqq A \setminus A'$.

Ha a fenti axiómák teljesülnek és fennáll $\mathrm{A}(A')=1$, akkor azt mondjuk, hogy A' az A halmaz (egyik) *bázisa.*

4. A rang-függvény axiómarendszere. Legyen S tetszőleges, nem üres halmaz. S-en definiálunk egy r függvényt, amely S minden véges A részhalmazához hozzárendel egy nem-negatív $r(A)$ egész számot úgy, hogy kielégülnek a következő feltételek:

(R_1) $r(A \cup x) = r(A)+k$, ahol $x \in S$ és $k=0$, vagy $k=1$;

(R_2) ha $r(A) = r(A \cup x) = r(A \cup y)$, akkor $r(A) = r(A \cup x \cup y)$, ahol $x, y \in S$.

Ha az $r(A)$ függvény kielégíti az (R_1), (R_2) feltételeket, akkor r-et az S halmazon definiált *rang-függvénynek* és $r(A)$-t az A halmaz *rangjának* nevezzük.

[2] Az ebben az axiómarendszerben szereplő (B_1) és (B_2) axiómák lényegében H. WHITNEY axiómái [6].

3. §. Az ekvivalencia bizonyítása

Az **1—4.** axiómarendszerek ekvivalenciájának bizonyítását ciklikusan fogjuk elvégezni. Ez a ciklikus bizonyítás négy lépésből áll:

I. *függőség* $\Rightarrow$ *függetlenség*,
II. *függetlenség* $\Rightarrow$ *bázis-fogalom*,
III. *bázis-fogalom* $\Rightarrow$ *rang-függvény*,
IV. *rang-függvény* $\Rightarrow$ *függőség*.

I. Legyen $D[x, A]$ függőségi reláció a (nem üres) S halmazon. Egy véges $A(\subseteqq S)$ halmazt D-függőnek mondunk, ha létezik egy $a(\in A)$ elem úgy, hogy $D[a, A \setminus a]$. Ellenkező esetben A-t D-függetlennek nevezzük.

1. DEFINÍCIÓ (az $\mathfrak{J}(A)$ függvény definíciója): Legyen A az S halmaz tetszőleges véges részhalmaza. Ekkor

$$\mathfrak{J}(A) = \begin{cases} 0, \text{ ha } A \text{ valamely } a \text{ elemére } D[a, A \setminus a], \\ 1 \text{ az ellenkező esetben.} \end{cases}$$

Kimutatjuk, hogy az így definiált $\mathfrak{J}(A)$ függvény eleget tesz az (I_1) és (I_2) követelményeknek.

1. SEGÉDTÉTEL: *D-független (véges) halmaz bármely részhalmaza D-független.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy az $A(\subseteqq S)$ véges halmaz D-független, és legyen $A' \subseteqq A$. Tegyük fel továbbá, hogy A' nem D-független, vagyis létezik olyan $a'(\in A')$ elem, hogy $D[a', A' \setminus a']$. Ugyanekkor fennáll $A' \setminus a' \subseteqq A \setminus a'$. Így (D_1) miatt $D[A' \setminus a', A \setminus a']$. Alkalmazva a (D_3) axiómát, nyerjük, hogy $D[a', A \setminus a']$, amely ellentmond annak a feltevésnek, hogy A D-független.

Az (I_1) axióma teljesülésének bizonyításához két esetet különböztetünk meg:

a) Legyen először $\mathfrak{J}(A \cup s) = 0$. Tekintettel arra, hogy az $\mathfrak{J}$ függvény csak a 0 és 1 értékeket veheti fel, nyilvánvalóan teljesül $\mathfrak{J}(A) \geqq \mathfrak{J}(A \cup s)$.

b) Legyen most $\mathfrak{J}(A \cup s) = 1$. Minthogy $A \subseteqq A \cup s$, az 1. definíció és az 1. segédtétel miatt $\mathfrak{J}(A) = 1$, tehát az (I_1) axióma ebben az esetben is teljesül.

2. SEGÉDTÉTEL: *Ha az $A(\subseteqq S)$ véges halmaz D-független és $\overline{D}[s, A]$ $(s \in S)$, akkor $(A \cup s)$ is D-független.*

BIZONYÍTÁS: Állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy az $(A \cup s)$ halmaz nem független. Ekkor van $(A \cup s)$-nek olyan ($\overline{D}[s, A]$ miatt nyilván A-beli) a eleme, amelyre $D[a, (A \setminus a) \cup s]$ teljesül. Mivel az A halmaz függetlensége miatt $\overline{D}[a, A \setminus a]$, a (D_2) axióma alapján $D[s, A]$ adódik, amely ellentmondásban van feltevésünkkel.

2. a. SEGÉDTÉTEL:[3] Ha a k elemű, D-független $B(\subseteqq S)$ halmaz minden eleme függ a véges $A(\subseteqq S)$ halmaztól, vagyis $D[B, A]$, akkor A legalább k elemet tartalmaz.

Az (I_2) axióma teljesülésének bizonyítása céljából tegyük fel, hogy S-nek A n elemű, B pedig $n+1$ elemű részhalmaza, továbbá, hogy $\mathfrak{J}(A) = \mathfrak{J}(B) = 1$.

[3] Ez a segédtétel, bizonyítással együtt, megtalálható G. PICKERT [3] könyvében (66. oldal).

A 2. a. segédtétel alkalmazásával nyilvánvalóan adódik, hogy létezik olyan $b(\in B, b \notin A)$ elem, hogy $D[b, A]$; de ez a 2. segédtétel alapján azt jelenti, hogy $A \cup b$ D-független, vagyis az 1. definíció értelmében $\mathfrak{I}(A \cup b) = 1$, ami a bizonyítandó állítás volt.

Ezzel az ekvivalencia-bizonyítás első lépését elvégeztük.

II. Legyen $\mathfrak{I}(A)$ az S halmazon értelmezett és a függetlenség axiómarendszerét kielégítő függvény. Egy véges $A(\subseteq S)$ halmazt I-függetlennek nevezünk, ha $\mathfrak{I}(A) = 1$. Az A halmazt I-függőnek nevezzük, ha $\mathfrak{I}(A) = 0$.

2. DEFINÍCIÓ: Az S halmaz véges A részhalmazának valamely A' részhalmazáról akkor mondjuk, hogy bázis A-ban (jelben: $\mathbf{A}(A') = 1$), ha $\mathfrak{I}(A') = 1$ és bármely $a(\in A, a \notin A')$ elem esetén $\mathfrak{I}(A' \cup a) = 0$.

A definíció alapján látható, hogy egy véges részhalmaz bázisai pontosan e halmaz maximális I-független részhalmazai.

Kimutatjuk, hogy az így definiált bázis-fogalom eleget tesz a $(B_1)-(B_4)$ követelményeknek.

3. SEGÉDTÉTEL: *I-független véges halmaz bármely részhalmaza is I-független.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy az $A(\subseteq S)$ véges halmaz I-független, és legyen $A' \subseteq A$. Az $A' = A$ esetben az állítás triviális. Legyen most $A \setminus A'$ nem üres: $A \setminus A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Alkalmazzuk az (I_1) axiómát: $\mathfrak{I}(A') \geqq \mathfrak{I}(A' \cup a_1) \geqq \ldots \geqq \mathfrak{I}(A' \cup a_1 \cup \ldots \cup a_n) = \mathfrak{I}(A) = 1$, ahonnan következik, hogy $\mathfrak{I}(A') = 1$.

A (B_1) axióma közvetlen következménye a 2. definíciónak és a 3. segédtételnek.

4. SEGÉDTÉTEL: *A véges $A(\subseteq S)$ részhalmaz bármely két bázisának számossága megegyezik.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}(A') = 1$ és $\mathbf{A}(A'') = 1$. Legyen A' számossága k és A'' számossága h. Tegyük fel továbbá, hogy $k < h$. Ekkor A''-nek van $k+1$ elemű részhalmaza. Jelöljünk egy ilyet A^*-gal. A^* a 3. segédtétel értelmében I-független, vagyis $\mathfrak{I}(A^*) = 1$. Az A' és A^* halmazokra alkalmazható az (I_2) axióma: A^*-nak létezik olyan a^* eleme, amely nincs benne A'-ben, s amelyre fennáll az $\mathfrak{I}(A' \cup a^*) = 1$ összefüggés. Ez viszont a 2. definíció miatt ellentmond annak a feltevésnek, hogy $\mathbf{A}(A') = 1$. Szimmetria okokból $h < k$ szintén lehetetlen, tehát $k = h$.

(B_2) teljesülésének kimutatása céljából legyen $\mathbf{A}(A') = 1$, $\mathbf{A}(A'') = 1$ és $a' \in A'$. Az A' és A'' számossága a 4. segédtétel értelmében megegyezik. Jelöljük ezt a közös számosságot n-nel. $A' \setminus a'$ számossága $n-1$, tehát (I_2) alapján létezik olyan a'' $(\in A'', a'' \notin A' \setminus a')$ elem, hogy $\mathfrak{I}((A' \setminus a') \cup a'') = 1$. Az $(A' \setminus a') \cup a''$ tehát A-nak n elemű, független részhalmaza. Minthogy véges részhalmaz bármely I-független részhalmaza nyilvánvalóan benne van a tekintett halmaz valamely maximális I-független részhalmazában, a 4. segédtétel alapján A-nak minden n elemű, független részhalmaza bázis A-ban, tehát $\mathbf{A}((A' \setminus a') \cup a'') = 1$.

A (B_3) axióma közvetlen következménye annak az imént említett ténynek, hogy minden független részhalmaz tartalmazva van egy maximális független részhalmazban.

A (B_4) axióma teljesülésének bizonyítását indirekt úton végezzük. Tegyük fel, hogy létezik olyan a^* $(\in A^* \setminus A'')$ elem, hogy $a^* \notin A \setminus A'$, vagyis $a^* \in A'$. Az A'' halmaz feltevés szerint bázis A'-ben, tehát a 2. definíció értelmében $\mathfrak{I}(A'' \cup a^*) = 0$. Másrészt $\mathfrak{I}(A^*) = 1$ és $(A'' \cup a^*) \subseteq A^*$, Ebből a 3. segédtétel alkalmazása arra az eredményre vezet, hogy $\mathfrak{I}(A'' \cup a^*) = 1$. Ez ellentmondás, tehát feltevésünk nem helytálló, vagyis $A^* \setminus A'' \subseteq A \setminus A'$.

III. Mielőtt a bázis-fogalom alapján definiálnánk a rang-függvényt, bebizonyítunk egy segédtételt. Ez csak formálisan állítja ugyanazt, mint a 4. segédtétel, minthogy most nem a függetlenség, hanem a bázis-fogalom axiómarendszerét vesszük alapul. Egyébként e segédtétel a bázis-fogalom egyik legfontosabb tulajdonságát fejezi ki.

5. SEGÉDTÉTEL: *Legyen az S halmazon bázis-fogalom értelmezve a* $(B_1)-(B_4)$ *axiómák alapján. Ekkor a tetszőleges véges A $(\subseteq S)$ halmaz bármely két bázisának számossága megegyezik.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $\mathbf{A}(A') = 1 = \mathbf{A}(A'')$ és $|A'| = n \geqq 0$, $|A''| = m \geqq 0$. Kimutatjuk, hogy $n = m$. Ez az $n = 0$ esetben világos, minthogy ekkor $\mathbf{A}(A' \cup A'') = 1$, s így (B_1) miatt az $A' \cup A''$ halmaz, tehát A'' is szükségképpen üres, tehát $m = 0$. Ezután az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $0 < n \leqq m$. Legyen $a' \in A'$. Ekkor a (B_2) axióma miatt van olyan $a''(\in A'')$ elem, hogy $(A' \setminus a') \cup a''$ bázis A-ban. Legyen $a^* \in A' \setminus a'$. Ismét a (B_2) axióma alapján állíthatjuk, hogy van olyan $a^{**}(\in A'')$ elem, hogy $(((A' \setminus a') \cup a'') \setminus a^*) \cup a^{**}$ bázis A-ban. Ezt az eljárást tovább folytatva, n lépés után olyan bázist nyerünk, amely a konstrukció miatt n elemű, (hiszen (B_1) miatt egy A''-beli elem legfeljebb egyszer kerülhet be elemként a most konstruált bázisba) és csupa A''-beli elemet tartalmaz. (B_1) miatt ez az új n elemű bázis A''-nek minden elemét tartalmazza, következésképpen A'' is n elemű, vagyis $n = m$.[4]

A fenti segédtétel alapján egyértelmű a következő definíció:

3. DEFINÍCIÓ (az $r(A)$ függvény definíciója): Legyen A az S halmaz tetszőleges véges részhalmaza. Rendelje $r(A)$ az A-hoz A valamely A' bázisának számosságát. Ha A-nak nincs bázisa, akkor legyen $r(A) = 0$.

Kimutatjuk, hogy az így definiált függvény (melynek értékei a definíció alapján nem-negatív egész számok) eleget tesz az (R_1), (R_2) követelményeknek.

Ha $\mathbf{A}(A') = 1$, $x \in S$, akkor (B_3) szerint vagy A', vagy $A' \cup x$ bázisa $A \cup x$-nek, amely a 3. definíció figyelembevételével az (R_1) axióma teljesülését bizonyítja abban az esetben, ha A-nak van bázisa. Ha A-nak nincs bázisa, akkor $r(A) = 0$. Ha $A \cup x$-nek sincs bázisa, akkor $r(A \cup x) = 0$, tehát (R_1) teljesül. Ha $A \cup x$-nek van bázisa, akkor ez (B_4) miatt $(A \cup x) \setminus A$-nak részhalmaza, tehát vagy az üres halmaz, vagy az x elemből álló egyelemű halmaz, miszerint $r(A \cup x) = 0$ vagy 1. Az (R_1) axióma tehát ez esetben is teljesül.

Az (R_2) axióma teljesülésének bizonyítása céljából legyen $\mathbf{A}(A') = 1$ és $r(A) = r(A \cup x) = r(A \cup y)$. Ebből (B_3) és a 3. definíció alapján következik, hogy A' egyidejűleg bázis $A \cup x$-ben és $A \cup y$-ban. Ugyancsak (B_3) alapján A' kiegészíthető $A \cup x \cup y$ bázisává, mégpedig (B_4) szerint csakis olyan elemekkel, amelyek egyidejűleg tartalmazva vannak az

$$(1) \qquad (A \cup x \cup y) \setminus A; \quad (A \cup x \cup y) \setminus (A \cup x); \quad (A \cup x \cup y) \setminus (A \cup y)$$

[4] Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a fenti bizonyításban csupán a WHITNEY-féle (B_1) és (B_2) axiómák vannak felhasználva, tehát a segédtétel állítása általánosabban is érvényes.

halmazok mindegyikében. Minthogy ilyen elem nem létezik, A' bázisa $A\cup x\cup y$-nak, s így $r(A)=r(A\cup x\cup y)$, vagyis (R_2) ebben az esetben teljesül. — Ha A-nak nincs bázisa, akkor $r(A)=r(A\cup x)=r(A\cup y)=0$. Ha $A\cup x\cup y$-nak sincs bázisa, akkor $r(A\cup x\cup y)=0$, tehát (R_2) teljesül. Ha $A\cup x\cup y$-nak van bázisa, akkor ez (B_4) miatt részhalmaza az (1) halmazok mindegyikének, tehát szükségképpen az üres halmaz. Így $r(A\cup x\cup y)=0$, tehát (R_2) ez esetben is teljesül.

IV.[5] Legyen $r(A)$ az S halmazon értelmezett rang-függvény.

4. DEFINÍCIÓ: Akkor mondjuk, hogy az S halmaz x eleme és A véges részhalmaza között fennáll a $D[x, A]$ reláció, ha $r(A)=r(A\cup x)$. Ha a $D[x, A]$ reláció fennáll, akkor azt mondjuk, hogy az x elem függ az A halmaztól.

Kimutatjuk, hogy az így definiált függőségi fogalom kielégíti a $(D_1)-(D_3)$ követelményeket.

A (D_1) axióma teljesülése nyilvánvaló, minthogy $x\in A$ esetén $A=A\cup x$, tehát $r(A)=r(A\cup x)$, vagyis $D[x, A]$.

Tegyük fel most, hogy $D[x, A]$, $a\in A$ és $\bar{D}[x, A\setminus a]$. Ekkor a fenti definíció és az (R_1) axióma miatt $r(A)=r(A\cup x)$ és $r(A\setminus a)=r((A\setminus a)\cup x)-1$. Ezt felhasználva $r(A)\leqq r(A\setminus a)+1=r((A\setminus a)\cup x)\leqq r(A\cup x)=r(A)$ adódik, tehát $r((A\setminus a)\cup x)=$ $=r(A\cup x)$, és ez éppen a (D_2) axióma teljesülését jelenti.

6. SEGÉDTÉTEL: *Ha* $r(A)=r(A\cup x_1)=r(A\cup x_2)=\ldots=r(A\cup x_n)$, *akkor* $r(A)=r(A\cup x_1\cup x_2\cup\ldots\cup x_n)$.

BIZONYÍTÁS: $n=2$ esetén az állítás az (R_2) axióma miatt igaz. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Tegyük fel, hogy $n-1$ esetén igaz az állítás. Ekkor $r(A)=r(A\cup x_1\cup x_2\cup\ldots\cup x_{n-2}\cup x_{n-1})=r(A\cup x_1\cup x_2\cup\ldots\cup x_{n-2}\cup x_n)$. Ismét alkalmazva (R_2)-t, nyerjük, hogy $r(A)=r(A\cup x_1\cup x_2\cup\ldots\cup x_n)$, q. e. d.

7. SEGÉDTÉTEL: *Ha* $r(A)=r(A\cup x)$, *akkor minden véges* Y *halmazra* $r(A\cup Y)=$ $=r(A\cup Y\cup x)$ *teljesül.*

BIZONYÍTÁS: Könnyen belátható, hogy állításunkat elegendő az $Y=\{y\}$ egyelemű halmazra igazolni. Két esetet különböztetünk meg:

1. Ha $r(A\cup y)=r(A)$, akkor $r(A)=r(A\cup x)$-ből (R_2) miatt következik, hogy $r(A\cup y)=r(A\cup x\cup y)$.

2. Ha $r(A\cup y)=r(A)+1$, akkor $r(A\cup x\cup y)\geqq r(A\cup y)=r(A)+1=$ $=r(A\cup x)+1$; másrészt (R_1) miatt $r(A\cup x\cup y)\leqq r(A\cup x)+1$, ahonnan következik, hogy $r(A\cup y)=r(A\cup x\cup y)$.

(D_3) bizonyítása céljából tegyük fel, hogy $D[x, A]$ és $D[a, B]$ teljesül A minden a elemére. Kimutatjuk, hogy $D[x, B]$ is fennáll. Feltevésünkből a 4. definíció alapján következik, hogy $r(B)=r(B\cup a_i)$, ahol $i=1, 2, \ldots, n$ és $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$. Alkalmazva a 6. segédtételt, nyerjük, hogy

$$r(B)=r(A\cup B). \tag{2}$$

Vegyük figyelembe az $r(B)=r(B\cup a_1)$ összefüggést és alkalmazzuk a 7. segédtételt.

[5] Az ekvivalencia-bizonyítás IV. lépése KERTÉSZ ANDOR [2] dolgozatából való.

Ekkor azt nyerjük, hogy

(3) $$r(B \cup a_1 \cup x) = r(B \cup x).$$

Az $r(B) = r(B \cup a_2)$ összefüggést tekintve is alkalmazzuk a 7. segédtételt. Ekkor eredményül

(4) $$r(B \cup a_1 \cup a_2 \cup x) = r(B \cup a_1 \cup x)$$

adódik. (3)-ból és (4)-ből következik, hogy $r(B \cup a_1 \cup a_2 \cup x) = r(B \cup x)$. Ezt az eljárást folytatva, az n-edik lépés után nyerjük, hogy

(5) $$r(B \cup A \cup x) = r(B \cup x).$$

Végül az $r(A) = r(A \cup x)$ összefüggés esetén alkalmazzuk a 7. segédtételt:

(6) $$r(A \cup B) = r(A \cup B \cup x).$$

Innen (2), (6) és (5) alapján következik, hogy $r(B) = r(B \cup x)$, vagyis $D[x, B]$.

Ezzel az ekvivalencia-bizonyítás utolsó lépését is elvégeztük.

4. §. Négy ekvivalens függetlenségi fogalom tetszőleges számosságú halmazokra

Teljesüljön a nem üres S halmazon az **1.—4.** axiómarendszerek valamelyike. Ekkor a 3. §. 1. — 4. definíciói alapján S-en egyidejűleg teljesül az **1.—4.** axiómarendszerek mindegyike.

1′. DEFINÍCIÓ: Az S halmaz valamely H részhalmazát D-függetlennek nevezzük, ha H bármely véges A részhalmazára teljesül $\bar{D}[a, A \setminus a]$ minden $a \in A$ esetén.

2′. DEFINÍCIÓ: Az S halmaz valamely H részhalmazát I-függetlennek nevezzük, ha H minden véges A részhalmazára $\mathfrak{I}(A) = 1$ teljesül.

3′. DEFINÍCIÓ: Az S halmaz valamely H részhalmazát B-függetlennek nevezzük, ha H minden véges részhalmaza önmagának bázisa.

4′. DEFINÍCIÓ: Az S halmaz valamely H részhalmazát R-függetlennek nevezzük, ha H minden véges A részhalmazára $r(A) = |A|$ teljesül.

E négy függetlenségi fogalom ekvivalenciája az eddigiek alapján nyilvánvaló.

Jelölje X a D, I, B és R betűk valamelyikét. S halmaz maximális X-független részhalmazának nevezünk egy olyan X-független részhalmazt S-ben, amelyhez S bármelyik további elemét hozzávéve a nyert halmaz nem X-független. Minthogy az X-függetlenség az 1′. — 4′. definíciók alapján nyilvánvalóan „véges jellegű tulajdonság", a jólismert TEICHMÜLLER — TUKEY-féle lemma alapján az S halmaznak mindig van maximális X-független részhalmaza. Az alábbi fontos tétel azt fejezi ki, hogy egy maximális X-független részhalmaz számossága az S halmaz invariánsa.

TÉTEL: *Az S halmaz bármely két maximális X-független részhalmazának számossága megegyezik.*

A tétel bizonyítása az $X = D$ esetben megtalálható KERTÉSZ ANDOR [2] dolgozatában. Minthogy a négy függetlenségi fogalom ekvivalens, ez egyúttal a tétel teljes bizonyítását jelenti.

5. §. Egy triviális eset kizárása az axiómarendszerek kiegészítésével

A 2. §-ban bevezetett axiómarendszerek megengednek egy többé-kevésbé érdektelen esetet. Pl. a $(D_1)-(D_3)$ axiómák teljesülnek, ha feltesszük, hogy a (nem üres) S halmaz bármely x elemére és bármely véges A részhalmazára teljesül $D[x, A]$. Vagy az S véges A részhalmazain értelmezett azonosan zérus $\mathfrak{J}(A)$ függvény is kielégíti az (I_1), (I_2) axiómákat. (Ebben az esetben S-nek nincs független részhalmaza.) Továbbá az S halmazon értelmezett bázis-fogalom összeegyeztethető azzal az esettel, amikor S egyetlen véges részhalmazának sincs bázisa. Végül, az azonosan zérus $r(A)$ $(A \subseteq S)$ függvény is kielégíti az (R_1), (R_2) axiómákat.

Ezeket a triviális eseteket kizárhatjuk az axiómarendszerek kiegészítésével:

(D_4) $\bar{D}[x, \emptyset]$ az S halmaz minden x elemére, vagyis egyetlen S-beli elem sem függ az üres halmaztól.

(I_3) $\mathfrak{J}(\emptyset) = 1$, továbbá, ha $x \in S$, akkor $\mathfrak{J}(x) = 1$.

(B_5) Az üres halmaz önmagának bázisa, továbbá, S bármely véges, nem üres részhalmazának van nem üres bázisa.

(R_3) $r(\emptyset) = 0$, továbbá, ha $x \in S$, akkor $r(x) > 0$.[6]

Könnyen belátható (ciklikus bizonyítás útján) a 3. § 1–4. definícióinak felhasználásával, hogy a fenti négy axióma egymással ekvivalens. Így a 3. § eredménye alapján *a* $(D_1)-(D_4)$, $(I_1)-(I_3)$, $(B_1)-(B_5)$ *és* $(R_1)-(R_3)$ *axiómarendszerek is ekvivalensek.* Ezek az axiómarendszerek nyilvánvalóan kizárják a fentebb említett triviális eseteket.

IRODALOM

[1] BLEICHER, M. N.—PRESTON, G. B.: Abstract linear dependence relations, *Publ. Math. Debrecen*, **8** (1961), 55–63.

[2] KERTÉSZ, A.: On independent sets of elements in algebra, *Acta Sci. Math. Szeged*, **21** (1960), 260–269.

[3] PICKERT, G.: Einführung in die Höhere Algebra, *Göttingen*, 1951.

[4] RADO, R.: A theorem on independence relations, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, **13** (1943), 83–89.

[5] VAN DER WAERDEN, B. L.: Moderne Algebra I., *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1950.

[6] WHITNEY, H.: On the abstract properties of linear dependence, *Amer. J. Math.*, **57** (1935), 509–533.

(Beérkezett: 1962. VI. 14.)

[6] (R_1)-ből és az $r(\emptyset) = 0$ relációból következik, hogy $r(x) = 1$.

NÉHÁNY MEGJEGYZÉS AZ I-DIVERGENCIA FOGALMÁVAL KAPCSOLATBAN

Írta: ARATÓ MÁTYÁS

VINCZE I. két cikkében [1], [2] foglalkozik az információ fogalmának értelmezé sével és javasolja, hogy az $f(x)$ sűrűségfüggvényű ξ valószínűségi változónak $\varphi(x)$ érdeklődési sűrűség esetén az információja legyen értelmezés szerint

$$I_\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{\varphi(x)}\, dx. \tag{1}$$

Ezt a fogalmat absztrakt terekben KULLBACK vezette be, és általános valószínűség-eloszlások esetén — melynek (1) speciális esete — I-divergenciának nevezte el, mely azóta is általánosan használt. Ez a fogalom mind az információelméletben, mind a matematikai statisztikában igen hasznosnak bizonyult. Az [1], [2] cikkekben szereplő irodalmon kívül az olvasó erről meggyőződhet, pl. PINSKER [3] könyve, vagy ROZANOV [4] dolgozata alapján. Az I-divergencia fogalma azonban elsősorban kisegítő fogalom, mely az információelmélet és a statisztika különböző meggondolásaiból, tételeiből adódik és amelynek segítségével igen szép tételek bizonyíthatók sok más területen is. Példaként megemlítem a következőket: annak a tételnek a bizonyítása, hogy két normális mérték szinguláris, vagy abszolút folytonos egymásra nézve, az I-divergencia tulajdonságainak a felhasználásával történik. (HAJEK [5], ROZANOV [4].) A fenti (1) képlethez hasonlóan történik bizonyos számelméleti leképezések (pontos endomorfizmusok) entrópiájának kiszámítása is (ROHLIN [10]).

VINCZE [2] dolgozatában szerepel még alkalmazásként konfidenciaintervallumok szerkesztése is, bizonyos eloszlások ismeretlen paramétereire. Nem foglalkozik azonban eljárásának elvi kérdéseivel, a módszer érvényességi körének vizsgálatával. Kérdés például, hogy az általa javasolt konfidencia halmazok jobbak-e, mint az eddig ismertek, és hogy az általa javasolt eljárás esetén mennyiben válik egyszerűbbé a megfelelő valószínűségi szintek kiszámítása. Nem látható be, hogy az említett elv alapján kapható-e az ismeretlen paraméterre becslés, és hogy a kapott halmazok mely esetben lesznek konfidencia halmazok.

Az alábbiakban ismertetem WILKS, még 1938-ban végzett azokat a vizsgálatait [6], amelyekben az aszimptotikusan legjobb konfidencia halmaz szerkesztésének a problémájával foglalkozik. WILKStől eltérően a jelenleg szokásos jelöléseket használom, s az alábbi — WILKStől származó — állítás lényegesen egyszerűbb bizonyítását adom.

TÉTEL: *Legyen a $P_\theta(\cdot)$ mértékek egy $\theta \in \Theta$ paramétertől függő serege abszolút folytonos a P_0 mértékekre nézve és jelölje*

$$L_\theta(\omega) = \log \frac{P_\theta(d\omega)}{P_0(d\omega)}$$

az ún. likelihood hányadost. Ismeretes, hogy $M_\theta \frac{\partial}{\partial\theta} L_\theta(\omega) = 0$, *másrészt* $\sigma(\theta) = D \frac{\partial}{\partial\theta} L_\theta(\omega) = -M_\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \varphi_\theta(\omega)$, *ahol* $\varphi_\theta(\omega) = \frac{1}{\sigma(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} L_\theta(\omega)$ $\Big($felhasználva, hogy $M_\theta \frac{\partial^2 L_\theta(\omega)}{\partial\theta^2} = -\sigma^2(\theta)\Big)$. Ezen összefüggések hasonlóan bizonyíthatók, mint CRAMER [7] könyvének 502. oldalán levő összefüggések, természetesen bizonyos megszorítások esetén, melyeket nem részletezünk. *Legyen* $\psi_\theta(\omega)$ *tetszőleges az* $M_\theta\psi_\theta(\omega)=0$ *és* $D\psi_\theta(\omega)=1$ *feltételeknek eleget tevő függvény, akkor igaz a következő egyenlőtlenség*

$$\left| M_\theta \frac{\partial\psi_\theta(\omega)}{\partial\theta} \right| \leqq -M_\theta \frac{\partial\varphi_\theta(\omega)}{\partial\theta} = \sigma(\theta).$$

BIZONYÍTÁS: A $p_\theta(\omega) = \frac{P_\theta(d\omega)}{P_0(d\omega)}$ jelöléssel és az $M_{P_0}\left(\frac{\partial\psi_\theta p_\theta}{\partial\theta}\right) = 0$ összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$M_\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\psi_\theta(\omega) = \int_\Omega \frac{\partial\psi_\theta(\omega)}{\partial\theta} p_\theta(\omega) P_0(d\omega) = -\int_\Omega \psi_\theta(\omega) \frac{\partial p_\theta(\omega)}{\partial\theta} P_0(d\omega) =$$

$$= -\int_\Omega \psi \frac{\partial L_\theta(\omega)}{\partial\theta} p_\theta(\omega) P_0(d\omega) = -M_\theta\left(\psi_\theta(\omega) \frac{\partial L_\theta(\omega)}{\partial\theta}\right) = -\sigma(\theta)\, M_\theta(\psi_\theta(\omega)\varphi_\theta(\omega)).$$

Innen a *Cauchy—Bunyakovszkij egyenlőtlenség* alapján kapjuk állításunkat. Másrészt bizonyos általános feltételek esetén a maximum likelihood egyenlet megoldásának eloszlása aszimptotikusan megegyezik a likelihood hányados deriváltjának eloszlásával (lásd pl. WALD [8]), s az általuk szolgáltatott konfidencia intervallumok hossza azonos (lásd LUVSZANCEREN [11]). Ily módon, mivel a $\psi_\theta(\omega)$ függvény „átlagban" laposabban metszi a θ tengelyt, a megfelelő $|\psi_\theta(\omega)| \leqq x$ intervallum hossza „átlagosan" hosszabb lesz, mint a $\varphi_\theta(\omega)$ függvény esetén nyert intervallum. Éppen ebben az értelemben nevezi WILKS a maximum likelihood egyenlet megoldásából adódó konfidencia halmazokat optimálisnak. Ha φ függ a megfigyelési intervallum hosszától (pl. sztochasztikus folyamatok esetén), — legyen ez $(0, T)$ — akkor

$$-\frac{1}{\sigma(\theta)} \cdot \frac{\partial\varphi_\theta^T(\omega)}{\partial\theta} = -\frac{1}{\sigma^2(\theta)} \frac{\partial^2 L_\theta^T(\omega)}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sigma^3(\theta)} \frac{\partial L_\theta^T(\omega)}{\partial\theta} \cdot \frac{\partial\sigma(\theta)}{\partial\theta},$$

ahol az első tag -1-hez való tartása $T \to \infty$ esetén, az információs stabilitást jelenti (lásd pl. PINSKER [3], vagy DOBRUSIN [9]), miközben a második tag nullához tart. Az elmondottakból látható a konfidencia intervallum és az információ fogalmának a kapcsolata.

IRODALOM

[1] VINCZE I.: *MTA III. Osztályának Közleményei* (1962) 1, 7–14.
[2] VINCZE I.: *Mat. Lapok* (1960) 1.
[3] М. С. Пинскер: Информация и информационная устойчивость случайных величин и ироцессов, Изд. А. Н. СССР, Москва, 1960.
[4] Ю. А. Розанов: Теория вер. и её ирим. **7** (1962) 1, 84—89.
[5] J. HAJEK: Чехослов. Мат. журнал **6** (81) (1956) 94—114.
[6] S. S. WILKS: A. M. Stat. **9** (1938) 166–175.
[7] H. CRAMER: *Mathematical Methods of Statistics*, London 1946.
[8] A. WALD: *A. M. Stat* **13** (1942) 127–137.
[9] R. L. DOBRUSIN: *MTA III. Osztályának Közleményei* **11** (1961) 427, **12** (1962) 51.
[10] В. А. Рохлин: Известия А. Н. СССР. сер. Мат. (1961) Н°4, 499—530.
[11] Ш. Лувсанцерен: Д. А. Н. **98** (1954) 723—726.

(Beérkezett: 1962. VII. 19)

EGY ELOSZTÁSI PROBLÉMÁRA VONATKOZÓ HATÁRELOSZLÁSTÉTEL ÚJ BIZONYÍTÁSA

Írta: BÉKÉSSY ANDRÁS

IRWING WEISS bebizonyította a következő tételt [1]: Ha n számú urnában véletlenszerűen elosztunk N golyót, olyan módon, hogy bármelyik golyó a többitől függetlenül $1/n$ valószínűséggel eshet bármelyik urnába, továbbá, ha n és N a végtelenhez tart, és $\lim_{n\to\infty} N/n = \alpha > 0$ létezik, akkor az üresen maradó urnák $\xi_{n,N}$ száma aszimptotikusan *normális* eloszlású $ne^{-\alpha}$ középértékkel és $\sqrt{n}e^{-\alpha/2}\sqrt{1-(1+\alpha)e^{-\alpha}}$ szórással.

RÉNYI ALFRÉD lényegesen enyhített feltételek mellett újból kimutatta a határeloszlás normális voltát [2]; tétele szerint a határeloszlás még akkor is normális, ha

$$N^2/n \to \infty, \quad N/n - \log n \to -\infty, \tag{1}$$

vagyis, ha $\lim_{n\to\infty} N/n$ nem létezik, ill. nullához vagy végtelenhez tart, azonban N/n változását az (1) feltételek alulról, ill. felülről korlátozzák. A teljes tétel bizonyítása három, a felhasznált eszközök szempontjából lényegesen eltérő módszerrel történt: a) az úgynevezett nyeregpont módszerrel arra az esetre, amikor N/n alulról és felülről is korlátos; b) a [3] cikkben kidolgozott módszerrel arra az esetre, amikor N/n alulról korlátos és $N/n - \log n \to -\infty$, végül c) speciális valószínűségszámítási megfontolásoknak és a centrális határeloszlástételnek felhasználásával arra az esetre, amikor N/n felülről korlátos és $N^2/n \to \infty$. Mind a b), mind a c) bizonyítás fedi az a) esetet is, — amely lényegében I. WEISS tétele, — tehát éppen a „legerősebb" eszközzel, a nyeregpont módszerrel végrehajtott vizsgálat hozta a leggyengébb a) eredményt. Ezért RÉNYI A. azt sejtette, hogy az enyhített feltételekre vonatkozó teljes tétel bebizonyítható egységes módszerrel is, és az alábbiakban ezt a sejtést kívánom igazolni.

A karakterisztikus függvények helyett az alábbiakban momentum-generáló függvényeket vezetünk be. Ennek előnye, hogy a tárgyalás áttekinthetőbb és kényelmesebb lesz. A momentum-generáló függvényeknek is — ha léteznek — I. H. CURTISS tételei szerint megvan az a folytonossági tulajdonságuk, ami a karakterisztikus függvényeknek, nevezetesen, ha a ξ_n valószínűségi változók sorozatának momentum-generáló függvényei egy $\Psi(t)$ korlátos határfüggvényhez konvergálnak egy a 0 pontot belsejében tartalmazó és $n \to \infty$-re alulról korlátos hosszúságú — valós — intervallumon, akkor $\Psi(t)$ egy $F(x)$ eloszlásfüggvény momentum-generáló függvénye és ξ_n eloszlásfüggvényeinek sorozata a folytonossági pontokban egyenletesen $F(x)$-hez tart.

A $\xi_{n,N}$ változóknak, az üres urnák számának különböző N értékekre vonatkozó $\Phi_{n,N}(t)$ karakterisztikus függvényeit generáló függvény [2], (10) szerint

$$G(t,z) = \sum_{N=0}^{\infty} \Phi_{n,N}(t)\frac{(nz)^N}{N!} = (e^z + e^{it} - 1)^n,$$

ahol

$$\Phi_{n,N}(t) = \mathrm{E}\{e^{i\xi_{n,N}\cdot t}\},$$

ha tehát karakterisztikus függvények helyett a

$$\psi_{n,N}(t) = \Phi_{n,N}(-it) = \mathrm{E}\{e^{\xi_{n,N}\cdot t}\}$$

momentum-generáló függvényeket vesszük kiindulási alapul, akkor az ezeket generáló függvény $(e^z + e^t - 1)^n$ és

$$\psi_{n,N}(t) = \frac{N!}{n^N 2\pi i} \oint \frac{(e^z + p)^n}{z^{N+1}} dz, \tag{2}$$

ahol $p = e^t - 1$.

TÉTEL. *Ha* $N \to \infty$ *és* $n \to \infty$,

$$N^2/n \to \infty \tag{3}$$

és

$$\frac{e^{N/n}}{n} \to 0, \tag{4}$$

akkor

$$\psi_{N,n}\left(\frac{s}{D_n\sqrt{n}}\right) e^{-\frac{s\sqrt{n}e^{-\alpha_n}}{D_n}} \to s^2/2, \tag{5}$$

ahol $\alpha_n = \dfrac{N+1}{n}$ *és* $D_n^2 = e^{-\alpha_n}[1 - (1+\alpha_n)e^{-\alpha_n}]$.

Az (5) relációból CURTISS említett tétele szerint következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\xi_{n,N} - ne^{-\alpha_n}}{D_n\sqrt{n}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

A bizonyításhoz a (2) integrált átalakítjuk. Legyen b olyan pont, amelyben (2) logaritmikus deriváltja eltűnik, tehát amely az

$$\frac{ne^b}{e^b + p} - \frac{N+1}{b} = 0,$$

vagy

$$b = \alpha_n(1 + pe^{-b}) \tag{6}$$

egyenletnek tesz eleget. Az (5) egyenletnek mind pozitív, mind negatív p esetében egyetlen olyan valós pozitív gyöke van, amelyik p-vel nullához tart, ezt válasszuk kitüntetett nyeregpontnak és ezt jelöljük a következőkben b-vel. Legyen $c = b - \alpha_n$, akkor

$$ce^c = p\alpha_n e^{-\alpha_n}. \tag{7}$$

Legyen a (2) egyenlet integráljának integrációs útja a 0 középpontú b sugarú kör. Legyen tehát $z=be^{i\varphi}$ és emeljük ki az integrál alól az integrandusnak a b nyeregpontban felvett értékét. A (6) egyenlet felhasználásával a következő alakra jutunk:

$$\psi_{n,N}(t)=F\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\left[1+\frac{\alpha_n}{b}(e^{-b+be^{i\varphi}}-1)\right]^n e^{-iN\varphi}d\varphi, \tag{8}$$

ahol

$$F=\frac{N!}{n^N}\cdot\frac{(e^b-p)^n}{b^N}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi N}}. \tag{9}$$

Az integrál (8) alakja kényelmes lesz annak az esetnek tárgyalásánál, amelynél α_n felülről korlátos, ha azonban α_n felülről nem korlátos, — de korlátos alulról —, akkor kényelmesebb integrációs útnak a b ponton átmenő, az imaginárius tengellyel párhuzamos, mindkét irányban a végtelenbe húzódó egyenest választani. Könnyen belátható, hogy ez az út megengedett, ekvivalens a (2) egyenletben meghatározott, a 0 pontot körülvevő zárt görbével. Legyen tehát $z = b+bi\varphi$ és

$$\psi_{n,N}(t)=F\cdot\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1+\frac{\alpha_n}{b}(e^{-b+bi\varphi}-1)\right]^n\frac{d\varphi}{(1+i\varphi)^{N+1}}. \tag{10}$$

Az F mennyiség a $p=e^{s/D_n\sqrt{n}}-1$ és a (6) egyenlettel definiált b mennyiségen keresztül függ, s, n és N értékétől, az aszimptotikus értékének meghatározására szolgáló számolás tehát teljesen elemi; először is a tétel (3), ill. (4) feltétele szerint $p\to 0$, tehát $c/\alpha_n\to 0$, $\alpha_n pe^{-\alpha_n}=0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ és ennélfogva a (7) egyenlet ismételt felhasználásával

$$c=p\alpha_n e^{-\alpha_n}-p^2\alpha_n^2e^{-2\alpha_n}+0\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \tag{11}$$

Alkalmazzuk továbbá (9)-re a *Stirling*-formulát, b helyett vezessük be c-t és akkor

$$\log F=nc+(n-N)\log\left(1+\frac{c}{\alpha_n}\right)+o(1). \tag{12}$$

Ha α_n alulról korlátos, akkor (11) szerint $c/\alpha_n=0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ tehát (12)-ből F aszimptotikus kifejezése:

$$F\sim e^{s^2/2+s\sqrt{n}e^{-\alpha_n}/D_n} \tag{13}$$

minden nehézség nélkül adódik. Ha azonban α_n alulról nem korlátos, hanem csökkenését csak a (3) szerinti $n\alpha_n^2\to\infty$ feltétel korlátozza, akkor a (12)-ben szereplő $n\log\left(1+\frac{c}{\alpha_n}\right)$ kifejezésnek $o(1)$-ig való kifejtése némi nehézséget okoz, mert c/α_n

csak $0(1/\alpha_n\sqrt{n})$ nagyságrendű. Ebben az esetben például az

$$n\log\left(1+\frac{c}{\alpha_n}\right)=$$

$$=n\log\left(1+pe^{-\alpha_n}-p^2\alpha_n e^{-2\alpha_n}\right)+0\left(\frac{1}{\alpha_n\sqrt{n}}\right)=$$

$$=n\log(1+p)+n\log\left(1-\frac{p(1-e^{-\alpha_n})+\alpha_n p^2 e^{-2\alpha_n}}{1+p}\right)+0\left(\frac{1}{\alpha_n\sqrt{n}}\right)$$

átalakítás vezet célhoz, mert $p(1-e^{-\alpha_n})$ már $0(1/\sqrt{n})$ nagyságrendű, és ennélfogva a logaritmikus kifejezések $0(1/n\sqrt{n})$-ig könnyen kifejthetők. Összevonások és egyszerűsítések után ugyancsak (13) adódik.

(8) szerint tehát

$$\psi_{n,N}\left(\frac{s}{D_n\sqrt{n}}\right)\sim e^{s^2/2+s\sqrt{n}e^{-\alpha_n}/D_n}\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\left[1+\frac{\alpha_n}{b}\left(e^{-b+be^{i\varphi}}-1\right)\right]^n e^{-iN\varphi}d\varphi \tag{14}$$

illetőleg (10) szerint

$$\psi_{n,N}\left(\frac{s}{D_n\sqrt{n}}\right)\sim e^{s^2/2+s\sqrt{n}e^{-\alpha_n}/D_n}\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1+\frac{\alpha_n}{b}\left(e^{-b+bi\varphi}-1\right)\right]^n\frac{d\varphi}{(1+i\varphi)^{N+1}}\,. \tag{15}$$

ennélfogva még csak annyit kell megmutatni, hogy a tétel feltételei mellett

$$\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\left[1+\frac{\alpha_n}{b}\left(e^{-b+be^{i\varphi}}-1\right)\right]^n e^{-iN\varphi}d\varphi\to 1, \tag{16}$$

illetőleg

$$\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1+\frac{\alpha_n}{b}\left(e^{-b+bi\varphi}-1\right)\right]^n\frac{d\varphi}{(1+i\varphi)^{N+1}}\to 1. \tag{17}$$

Az utóbbi állítások bizonyítását a nyeregpont-módszer (ill. *Laplace*-módszer) szokásos technikájával végezzük el, éspedig a (16) integrálra, ha α_n felülről, a (17) integrálra, ha alulról korlátos.

Legyen α_n felülről korlátos. Osszuk a (16) integrált három részre:

$$\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}=\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\delta}^{\delta}+\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\delta}^{\pi}+\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{-\delta}=I_1+I_2+I_3,$$

ahol δ tetszőlegesen kicsiny, de rögzített pozitív szám, értékéről később rendelkezünk. Az I_1 integrál, amely a nyeregpont (a $\varphi=0$ pont) közvetlen környezetét tartalmazza, a „lényeges" rész, az I_2 és I_3 az I_1-hez képest kicsiny:

$$I_1\to 1,\quad I_2 \text{ és } I_3=o(1),$$

ugyanis

$$|I_2| \leqq \max_{\delta \leqq \varphi \leqq \pi} \frac{\sqrt{N\pi}}{\sqrt{2}} \left| 1 + \frac{\alpha_n}{b} (e^{-b+be^{i\varphi}} - 1) \right|^n \leqq$$

$$\leqq \max_{\delta \leqq \varphi \leqq \pi} \frac{\sqrt{N\pi}}{\sqrt{2}} e^{-nb(1-\cos\varphi)} \left| 1 + \frac{p\alpha_n}{b} (e^{-be^{i\varphi}} - e^{-b}) \right|^n \leqq$$

$$\leqq \max_{\delta \leqq \varphi \leqq \pi} \frac{\sqrt{N\pi}}{\sqrt{2}} e^{-nb(1-\cos\varphi)+n|p|\alpha_n e^{-b}C},$$

ahol C valamilyen állandó, amely csak b felső korlátjától és δ-tól függ. Ha α_n felülről korlátos, akkor b is és

$$|I_2| \leqq \max_{\delta \leqq \varphi \leqq \pi} \frac{\sqrt{N\pi}}{\sqrt{2}} e^{-nb\left[(1-\cos\varphi) - |p| \cdot C \cdot \frac{\alpha_n}{b} \cdot e^{-\alpha_n \cdot \varphi}\right]} = o(1),$$

hiszen $\alpha_n/b \to 1$ és $|p| \to 0$, $1-\cos\varphi$ pedig alulról korlátos, ha $\varphi \geqq \delta$, míg $bn \sim N$.

Az I_1 integrál integrandusának logaritmusát fejtsük ki φ hatványai szerint φ^3-ig, az eredmény

$$\left[1 + \frac{\alpha_n}{b} (e^{-b+be^{i\varphi}} - 1)\right]^n e^{-iN\varphi} = e^{-n\alpha_n \frac{\varphi^2}{2}(1+b-\alpha) + 0(n\alpha\varphi^3)} \tag{18}$$

és ennélfogva (α_n felülről korlátos lévén)

$$I_1 = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{N\varphi^2}{2}[1+o(1)] + 0(N\varphi^3)} d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{N\varphi^2}{2}[1+o(1)]} d\varphi + 0\left(\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} N\varphi^3 e^{-\frac{N\varphi^2}{2}[1+0(\varphi)]} d\varphi\right) \sim 1 + M,$$

ahol

$$M = 0\left(N^{3/2} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi^3 e^{-\frac{N\varphi^2}{2}[1+o(1)+0(\varphi)]} d\varphi\right) <$$

$$< 0\left(N^{3/2} \int_{-\delta}^{\delta} \varphi^3 e^{-\frac{N\varphi^2}{2}[1-\eta(\delta)]} d\varphi\right) = 0\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right),$$

hiszen δ tetszőlegesen kicsiny lehet, válasszuk tehát olyan kicsinyre, hogy $1-\eta(\delta) > 0$ legyen.

Ha α_n felülről nem, de alulról korlátos, akkor tekintsük (16) helyett (17) integrálját. Mint előbb, bontsuk az integrált három részre

$$\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\delta}^{\delta}+\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\delta}^{\infty}+\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\delta}=I_1+I_2+I_3.$$

Az I_1 lényeges rész integrandusát az előbbi módon sorbafejtve ugyancsak a (18) kifejezésre jutunk, most azonban, mivel felülről nem korlátos, a maradéktag $0(\alpha^3\varphi^3)$ és az $I_1\to 1$ igaz voltát csak abban az esetben tudjuk kimutatni az előbbi módszerrel, ha $\alpha^2\delta\to 0$, vagyis ha $\delta=0(\alpha^{-2})$. Legyen tehát pl. $\delta=0(n^{-1/5})$ — ez elegendő a (4) feltétel szerint, — és akkor $I_1\to 1$, továbbá

$$|I_2|\leq\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}}=\frac{(1+\delta^2)}{(1+\delta^2)^{N/2}}\max_{\delta\leq\varphi<\infty}\left|1+\frac{\alpha_n}{b}(e^{i\varphi}-1)\right|^n\int_0^\infty\frac{d\varphi}{1+\varphi^2},$$

de

$$\left|1+\frac{\alpha_n}{b}(e^{i\varphi}-1)\right|^n\leq\left|1+\frac{2\alpha_n}{b}\right|^n$$

és

$$\alpha_n/b=0(pe^{-\alpha_n})=0(n^{-1/2}e^{-\alpha_n/2})\text{ miatt}$$

$$|I_2|=0(\sqrt{N}e^{-N\delta^2/2+0(\sqrt{n})});$$

továbbá

$$N\delta^2=Nn^{-2/5}=\alpha_n n^{3/5}\to\infty,$$

míg

$$\frac{\sqrt{n}}{N\delta^2}=\frac{1}{\alpha_n^{9/10}N^{1/10}}\to 0$$

és így $|I_2|=o(1)$.

A tétel ezzel bizonyítást nyert. Megjegyzendő, azt, hogy az $\alpha_n\to\infty$ esetben a (16) integrálja 1-hez tart, a (4)-nél enyhébb feltétel mellett $(\alpha_n^2 n^{-1/5}\to 0)$ bizonyítottuk be, tehát még az $e^{\alpha_n}/n\to\gamma>0$ esetben is igaz, hogy

$$\psi_{n,N}(t)\sim F(t).$$

$F(t)$ aszimptotikus értékét erre az esetre kiszámítva

$$\psi_{n,N}(t)\sim F(t)\sim e^{p/\gamma}=e^{1/\gamma(e^t-1)}$$

adódik, és mivel ez a *Poisson*-eloszlás momentum-generáló függvénye, $\xi_{n,N}(t)$ határeloszlása az $1/\gamma$ középértékű *Poisson*-eloszlás, ami az irodalomból jólismert eredmény (lásd pl. [5]).

IRODALOM

[1] I. WEISS, Limiting distribution in some occupancy problems, *Applied Math. and Stat. Laboratory, Stanford University Technical Report*, No. 28, 1955.

[2] A. RÉNYI: Three new proofs and a generalisation of a theorem of Irwing Weiss, *MTA Mat. Kut. Int. Közl., A. sorozat*, sajtó alatt.

[3] P. ERDŐS—A. RÉNYI, On the central limit theorem for samples from a finite population, *MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* 4 (1959) 49—61.

[4] I. H. CURTISS, A note on the theory of moment generating functions, *Ann. Math. Stat.* **13** (1942) 430—433.

[5] W. FELLER, *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. I. 2. ed., 1957, 93—94.

(Beérkezett: 1962. IX. 17)

NÉHÁNY ÚJABB EREDMÉNY AZ ERGOD-ELMÉLETBEN*

Írta: ARATÓ MÁTYÁS

Ergod-elméletnek, vagy más néven a dinamikus rendszerek metrikus elméletének, amint azt a mai orosz nyelvű szakirodalomban nevezik, első igen viharos korszaka a funkcionálanalízis módszereinek a felhasználásával a harmincas és negyvenes években zajlott le. Ennek a korszaknak kiemelkedő egyéniségei közé tartozik a magyar matematikusok közül RIESZ FRIGYES és a magyar származású NEUMANN JÁNOS. Ezen első korszak eredményeinek összefoglalása megtalálható HALMOS [6] könyvében és ROHLIN [5] cikkében. Az említett periódus fő eredményei közé tartoznak a dinamikus rendszerek spektrál invariánsai fogalmának a bevezetése, a spektrum és ergodikusság, valamint a keverés kapcsolatának a tisztázása, tetszőleges dinamikus rendszernek ergodikus komponensekre való felbontása, általános ergodikus tételének bizonyítása. Mivel a funkcionálanalízis módszerei kimerültek és újak nem jelentek meg körülbelül 15 éven át, bizonyos egy helyben topogás jellemezte ezt az igen szép, de nehéz elméletet.

Újabb fellendülés a dinamikus rendszerek elméletében A. N. KOLMOGOROV 1958-ban megjelent munkái [1], [2] után volt tapasztalható, aki a nagy fejlődésnek indult információelmélet segítségével egy sor jelentős új fogalmat vezetett be. Így például a dinamikus rendszer entrópiájának a fogalmát, melynek segítségével sikerült példákat szerkeszteni olyan nem izomorf dinamikus rendszerekre, melyek spektruma megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* típusú. Ide tartozik a kvázireguláris dinamikus rendszerek fogalma, melyeket ROHLIN *Kolmogorov*-féle rendszereknek, míg SZINAJ egyszerűen K-rendszereknek nevez. Ez a fogalom megvilágítja az ergodelmélet és a valószínűségszámítású szoros kapcsolatát is. A továbbiakban hol rendszerről (ezen egy T automorfizmusú dinamikus rendszert értünk), hol pedig egyszerűen automorfizmusról fogunk beszélni.

A K-rendszerek lényegében a reguláris stacionárius folyamatok, azaz információ átadásra képes folyamatok általánosításai. Azonban a K-rendszerek tanulmányozása túlmegy a valószínűségszámítás keretein.

A legújabb eredmények rendszeres tárgyalása megtalálható ROHLIN világos stílusú összefoglaló munkájában, melynek magyar nyelvű fordítása a III. Osztály Közleményeinek ebben a számában található meg. Ez lehetővé teszi, hogy a szükséges fogalmakat és jelöléseket ne magyarázzuk meg külön.

Már az a tény, hogy az Uszpehi Matematicseszkih Naukban összefoglaló cikk jelent meg ezekről a kutatásokról, melyek azóta is elsősorban a Szovjetunióban folynak, elegendő lenne arra, hogy felfigyeljenek ezekre a problémákra nálunk is, ahol ezen a téren komoly hagyományokkal rendelkeznek a magyar matematika művelői. Az a

* Ez a cikk a MTA III. Osztály Közleményei ugyanezen számában A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOM részben megjelent V. A. ROHLIN: Új fejlődés a mértéktartó leképezések elméletében c. cikkhez kíván további adalékokat szolgáltatni.

reakció, mely a Szovjetunión kívül tapasztalható (lásd pl. HALMOS [1*] cikkét), arra enged következtetni, hogy hamarosan más helyeken is bekapcsolódnak az ilyen irányú kutatásokba. ROHLIN összefoglalójának megjelenése óta több olyan cikk is megjelent, melyek részletes bizonyításokat tartalmaznak és ezért különösen ajánlható mindazoknak, akik nemcsak az elért eredményekkel, de a bizonyítási módszerekkel is szeretnének megismerkedni (pl. ROHLIN [16] SZINAJ [5*] ABRAMOV, ROHLIN [7*]). Figyelmemet erre a problémakörre JA. G. SZINAJ hívta fel, aki nagymértékben segítségemre volt az elmélet és annak lényeges problémái megértésében. Ezúton is köszönetemet fejezem ki segítségéért.

Ebben a cikkben azokkal az újabb eredményekkel kívánok foglalkozni, melyeket a legutóbbi időben értek el. ROHLIN cikkének végén felsorolt problémák helyes útmutatóknak bizonyultak, egy részüket már megoldották, másik részüknél pedig komoly előrehaladás mutatkozik. A dinamikus rendszerek elméletéből mind Moszkvában (SZINAJ vezetésével), mind Leningrádban (ROHLIN vezetésével) folyik szeminárium.

1. Az izomorfizmus problémája. Jelenleg a következő metrikus invariánsok ismeretesek: A *Neumann* által bevezetett *spektrál invariáns*, az *entrópia* és végül a *Kolmogorov-féle automorfizmus* vagy *K-rendszer* (KOLMOGOROV „kvázireguláris" automorfizmusnak nevezte őket). Ezek az invariánsok nem függetlenek, mert pl. a K-rendszer megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrummal rendelkezik. A dinamikus rendszerek alapvető problémája az izomorfizmus problémája. ROHLIN cikke óta a következő előrehaladás történt. SZINAJ bevezette a *gyenge izomorfizmus* fogalmát (még nem publikált), melynek segítségével bebizonyította, hogy azonos entrópiájú K-rendszerek a gyenge izomorfizmus értelmében azonos típusúak. Így pl. a *Bernoulli* rendszerek gyengén izomorfak, ha entrópiájuk megegyezik. Ennek megértéséhez szükség van a következő definíciókra.

Az M_1 Lebesgue tér T_1 automorfizmusa *homomorf* az M_2 Lebesgue tér T automorfizmusával, ha az M_1 térnek van oly U homomorfizmusa az M térre, hogy

$$T_1 U = UT.$$

Ha U izomorfizmus, akkor a T és T_1 automorfizmusok izomorfak metrikus értelemben.

A T és T_1 automorfizmusokat *gyengén izomorfaknak* nevezzük, ha T homomorf a T_1 és T_1 homomorf a T automorfizmussal.

Könnyen belátható, hogy diszkrét spektrumú automorfizmusokra a gyenge és erős izomorfizmus fogalma egybeesik.

2. A Kolmogorov-féle automorfizmusok és a teljesen pozitív entrópiájú automorfizmusok. ROHLIN és SZINAJ [6*] bebizonyították, hogy a teljesen pozitív entrópiájú automorfizmusok osztálya megegyezik a K-automorfizmusok osztályával. Ebből következik: K-automorfizmus faktor automorfizmusa szintén K-automorfizmus, K-automorfizmus inverze szintén K-automorfizmus, stacionárius *Gauss* folyamat által származtatott automorfizmus K-automorfizmus, ha a folyamat spektruma abszolút folytonos.

Nem ismeretes azonban, hogy folyamatokra egybeesik-e a két fogalom, tehát a K-folyamat és a teljesen pozitív entrópiájú folyamat fogalma.

3. Kompakt kommutatív csoportok automorfizmusai. ROHLIN [2*] cikkében bebizonyította, hogy nemtriviális kompakt kommutatív csoport tetszőleges ergodikus automorfizmusa pozitív entrópiájú.

GENISZ [4*] bizonyította be, hogy a véges dimenziós tórus ergodikus T automorfizmusának entrópiája

$$h(T) = \sum_{i=1}^{k} \log |\lambda_i|,$$

ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ a T automorfizmust a tórus ciklikus koordinátáiban megadó egész számokból álló mátrix egynél nagyobb abszolút értékű sajátértékei (különböző sajátértékek esetén ezt az összefüggést SZINAJ bizonyította). Innen látható, hogy a tórus ergodikus automorfizmusának entrópiája pozitív.

4. A ferde szorzat entrópiája. A probléma teljes megoldása megtalálható ABRAMOV és ROHLIN közös [7*] cikkében. Bebizonyították, ha U az S bázisú és $T_x (x \in X)$ rétegződésű endomorfizmusok ferde szorzata

$$h(U) = h(S) + h_s(\mathbf{T}),$$

ahol a $h_s(\mathbf{T})$ mennyiséget nevezik a rétegek kevert entrópiájának.

A kevert entrópia értelmezése a következő. Legyen $M = X \times Y$ a μ_X és μ_Y mértékű X és Y terek direkt szorzata. S az X tér endomorfizmusa, $\mathbf{T} = \{T_x, x \in X\}$ az Y tér endomorfizmusainak egy serege. Tetszőleges $\eta \in Z(Y)$ felbontásra legyen

$$\eta_x^n = \prod_{k=0}^{n-1} T_x^{-1} T_{Sx}^{-1} \ldots T_{S^{k-1}x}^{-1} \eta, \quad \eta_x = \prod_{k=0}^{\infty} T_x^{-1} T_{Sx}^{-1} \ldots T_{S^{k-1}x}^{-1} x$$

$$E_n(\eta) = \frac{1}{n} \int_X H(\eta_x^n) d\mu_x, \qquad h_s(\mathbf{T}, \eta) = \inf_n E_n(\eta)$$

és

$$h_s(\mathbf{T}) = \sup h_s(\mathbf{T}, \eta), \qquad (\eta \in Z(Y)).$$

A dinamikus rendszereknek a sztochasztikus folyamatok elméletével való kapcsolata a következőképpen világítható meg. Ismeretes, hogy az $\{S_t\}$ mérhető folyamatot K-folyamatnak nevezik, ha létezik az M Lebesgue-térnek olyan ζ° mérhető felbontása, melyre teljesülnek a következő feltételek:

1. $S_t \xi^0 = \xi^t \geqq \xi^{t_1}$ mod 0 ha $t_1 < t$.

2. $\prod_{-\infty}^{\infty} \xi^t = \varepsilon$ mod 0.

3. $\bigcap_{-\infty}^{\infty} \xi^t = \nu$ mod 0.

A ζ^0 felbontásnak megfelelő σ-algebrát jelöljük $\mathfrak{M}$ (ζ^0)-al. Az 1 – 3. tulajdonságokból következnek ezen σ-algebrák megfelelő tulajdonságai:

1'. $S_t \mathfrak{M}(\xi^0) = \mathfrak{M}(\xi^t) \supseteqq \mathfrak{M}(\xi^{t_1})$, ha $t_1 < t$.

2'. $\bigvee_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}(\xi^t) = \mathfrak{M}$.

3'. $\bigwedge_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}(\xi^t) = \mathfrak{N}$.

Megfordítva, az 1'–3'. tulajdonságokból következnek az 1–3. tulajdonságok. Legyen M az $x(\tau)$ valós, stacionáris, sztochasztikus folyamat t realizációinak a tere és az $\{S_t\}$ csoportot értelmezzük mint eltolást, azaz

$$x'(\tau) = S_t x(\tau) = x(t+\tau).$$

Ha $\mathfrak{M}^0 = \mathfrak{M}(\zeta^0)$ az $\{x(\tau) \in \Gamma\}$ alakú mérhető halmazok által származtatott σ-algebra, ahol Γ átfutja a valós számegyenes összes *Borel*-halmazait, míg τ az összes negatív számokat, akkor $\mathfrak{M}^0$ eleget tesz az 1'. és 2'. feltételeknek. Ha $\mathfrak{M}^0$ eleget tesz 3'.-nek is, a sztochasztikus folyamatot regulárisnak szokás nevezni. Ily módon a K-folyamatok elmélete szoros kapcsolatban van a reguláris stacionárius sztochasztikus folyamatok elméletével.

Ez a magyarázata annak, hogy bizonyos K-folyamatokra igazak a centrális határeloszlástételek. Pontos endomorfizmusok esetén erre igen szép példát nyújt IBRAHIMOV [3*] cikkében, ahol lánctörtekre bizonyít normális eloszláshoz való tartást. Geodétikus folyamatokra SZINAJ bizonyított hasonló tételt disszertációjában (lásd még [8*]). Ezek az eredmények egy olyan kutatási területre vezetnek, melyet szintén a legutóbbi időkben kezdtek el igen aktívan vizsgálni (lásd ROSENBLATT [9*], VOLKONSZKIJ – ROZANOV [10*]). Azokról a kutatásokról van szó, melyeknek célja effektív módszerek keresése a centrális határeloszlástétel érvényességének kiterjesztésére, nem független megfigyelési véletlen valószínűségi változó sorozatok esetére (általánosabban folyamatok esetére).

KIEGÉSZÍTŐ IRODALOM

[1*] P.R. HALMOS: Recent progress in ergodic theory, *Bulletin of the Amer. Math. Soc.*, **67** (1961), 70–80.
Orosz fordítása: Математика, **6** (1962), 17–27.

[2*] В. А. Рохлин: Об энтропии автоморфизма компактной коммутативной группы, Теория вероят. и ее прим. **6** (1961) 351—352.

[3*] И. А. Ибрагимов: Одна теорема из метрической теории цепных дробей, Вестник Л. Г. У. **1** (1961), 13—24.

[4*] А. Л. Генис: Метрические свойства ендоморфизмов n-мерного тора, Д. А. Н. **138** (1961), 991—993.

[5*] Я. Г. Синай: Динамические системы со счетнократным лебеговским спектром, I. Известия А. Н. сер. мат. **25** (1961) 899—924.

[6*] В. А. Рохлин—Я. Г. Синай: Построениеисвойства инвариантных измеримыхразбиения, Д. А. Н. **141** (1961) 1038—1041.

[7*] Л. М., Абрамов—В. А. Рохлин: Энтропия косово произведения преобразований с инвариантной мерой, Вестник Л. Г. У. **7** (1962), 7—13.

[8*] Я. Г. Синай: О предельных теоремах для стационарных процессов, Теория вероятностей и ее применения, **7** (1962) 213—219.

[9*] M. ROSENBLATT: A central limit theorem and a strong mixing condition, *Proc. Nat. Acad. Sci. Wash.* **42** (1956) 43–47.

[10*] В. А. Волконский, Ю. А. Розанов: Некоторые предельные теоремы для случайных функций, Теория вероятностей и ее применения **4** (1959) 186--207.

[11*] Л. М. Абрамов: Метрические автоморфизмы с квазидискретным епектром. Изв А. Н. СССР сер. Мат. **26** (1962) 513—530.

(Beérkezett: 1962. IX. 3)

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

ÚJ FEJLŐDÉS A MÉRTÉKTARTÓ LEKÉPEZÉSEK ELMÉLETÉBEN*

Írta: V. A. ROHLIN

Tartalom:

BEVEZETÉS

A mértéktartó leképezések elmélete (szokás még *ergodikus elméletnek*, vagy *dinamikus rendszerek metrikus elméletének* is nevezni) mint önálló disciplina a harmincas években alakult ki, amikor is bebizonyították az alapvető ergodikus tételeket és erre az új területre behatoltak a spektrál elmélet fogalmai és módszerei. Hamarosan nyilvánvalóvá vált, hogy ez az elmélet nemcsak a dinamikus rendszerek klasszikus elméletével (amelyből keletkezett), hanem a valószínűségszámítás, a számelmélet és funkcionálanalízis különböző problémáival is szoros kapcsolatban áll.

Azonban az új elmélet előtt álló feladatok túlságosan nehezeknek bizonyultak. Ez vonatkozik mind az alkalmazásaira (elsősorban a statisztikus mechanikában), mind a belső, tisztán mértékelméleti feladataira. A nehézségek — melyek az alkalmazásokra vonatkoznak — az ergodikusság effektív kritériumainak hiányában áll egyrészt, másrészt, hogy nem tudjuk kiszámítani dinamikus rendszerek spektrumát. Az elmélet központi belső problémája az *izomorfizmus problémája:* milyen feltételek esetén tartozik két mértéktartó leképezés egy metrikus típusba? Ez a probléma leképezéseknek csak egy igen szűk osztályára — mely lényegében a diszkrét spektrumú leképezésekből áll — van megoldva. Folytonos spektrumú leképezésekre igen keveset csináltak. A legutóbbi időig még az sem volt ismeretes, hogy tisztán folytonos spektrum esetén a metrikus típust meghatározzák-e a leképezés spektrál invariánsai. Ezen kérdés megoldási kísérletei sokáig nem vezettek célhoz és úgy látszott abba is hagyták a kísérletezést.

* Успехи математических наук, Том XV (1960), ыпуск 4, 3—26.

Az újabb fejlődés kezdetét A. N. KOLMOGOROV 1958-ban megjelent munkái [1], [2] jelentik. KOLMOGOROV bebizonyította olyan megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrummal bíró leképezések létezését, amelyek különböző metrikus típusba tartoznak. Az a módszer, amellyel ezt az eredményt kapta, nem kevésbé érdekes, mint maga az eredmény. KOLMOGOROV a mértéktartó leképezéseknek egy új metrikus invariánsát határozta meg — a *leképezés entrópiáját* — felhasználva az információelmélet eszközeit. Ezen invariáns segítségével sikerült felosztania a megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrummal rendelkező leképezések osztályát kontinuum számosságú metrikusan invariáns részosztályra.

KOLMOGOROV munkáit egy sor olyan mű követte, amelyekben az új invariánst tanulmányozták, tökéletesítették és alkalmazták más problémákra. Új fogalmak és új, érdekes problémák vetődtek fel. Ezért úgy látszik lehet beszélni az egész elmélet újabb fejlődéséről.

Ennek az újabb fellendülésnek szenteltem jelen összefoglaló munkámat. Ezt azokból az előadásokból állítottam össze, amelyeket a bakui funkcionálanalízis konferencián (1959. IX. 30) és a moszkvai matematikai társulatban (1959. XI. 17) tartottam. Az összefoglalóban megemlített munkákat KOLMOGOROV [1] dolgozatát kivéve, mind előadták a moszkvai egyetem „dinamikus rendszerek metrikus elmélete" szemináriumán. Jelenleg ezen munkák majdnem kivétel nélkül megjelentek, vagy sajtó alatt vannak. (Az 1958/59-es évről szóló szemináriumi beszámoló megtalálható [3]-ban.) Az olvasó munkájának megkönnyítésére az első paragrafusban az izomorfizmus problémájáról rövid előzetes tájékoztatást nyújtunk. Régi eredményeket irodalmi utalás nélkül közlünk, részletesebb tárgyalásuk megtalálható [4], [5], [6]-ban, összefoglaló tárgyalásuk [7]-ben. Az ezután következő tíz paragrafus teljesen az új eredményeket és az új problémákat tartalmazza.

1. §. AZ IZOMORFIZMUS PROBLÉMÁJA

1. 1. Alapvető meghatározások. Általános értelemben a mértéktartó leképezés egy mértéktérnek egy másik mértéktérre való olyan leképezése, melynél tetszőleges mérhető halmaz ősképe mérhető és mértéke megegyezik a halmaz mértékével. Az ilyen leképezéseket röviden *homomorfizmusnak* nevezzük.

Azt a kölcsönösen egyértelmű homomorfizmust, mely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy az inverz leképezés szintén homomorfizmus, *izomorfizmus*nak nevezzük. Ha a terek megegyeznek, a homomorfizmust *endomorfizmus*nak, az izomorfizmust *automorfizmus*nak nevezzük. Az elmélet első feladata az *automorfizmusok* tárgyalása. Rendszerint erről van szó akkor, amikor mértéktartó leképezésekről beszélnek.

Az izomorf módon egymásra leképezhető mértéktereket *izomorfok*nak nevezzük. Az M tér T automorfizmusa és az M' tér T' automorfizmusa izomorf, ha létezik az M térnek az M' térre való olyan S izomorfizmusa, hogy $T' = STS^{-1}$.

A mértékelmélet egyik legfontosabb elve az, hogy a null mértékű halmazokat el lehet hagyni. Ennek az elvnek megfelelően mind a tereket, mind az automorfizmusokat null mértékű halmazoktól eltekintve kell tanulmányozni, vagy röviden moduló null (mod 0). Például, nem az a fontos, hogy az M és M' terek, vagy a rajtuk értelmezett T és T' automorfizmusok izomorfok-e, hanem az, hogy izomorffá tehetők-e bizonyos M és M'-beli null mértékű halmazok elhagyásával, ha a válasz pozitív, akkor az M és M' tereket vagy a T és T' automorfizmusokat *moduló null izomorfok*nak nevezzük.

A mod 0 izomorf automorfizmusokról azt mondjuk, hogy egy metrikus típusba tartoznak. Az izomorfizmus problémája, melyet ebben a paragrafusban vizsgálunk, az automorfizmusoknak metrikus típus szerinti osztályozásában áll.

1. 2. A Lebesgue-tér. Mérhető felbontások. Természetesen azokra a terekre, amelyekben az automorfizmusok értelmezve vannak, bizonyos korlátozásokat kell tennünk, hogy használható elméletet kapjunk. A kérdés tanulmányozása azt mutatta, hogy amennyiben véges mértékű terekről van szó, célszerű *Lebesgue*-terekre szorítkozni. *Lebesgue*-térnek nevezzük az olyan 1 mértékű teret, amely izomorf mod 0 egy intervallummal a rajta értelmezett *Lebesgue* mértékkel együtt, amely intervallumhoz még véges vagy megszámlálható sok pozitív mértékű pont is hozzátartozhat. Ez elég széles osztálya a tereknek, tartalmazza pl. az összes normált mértékű tereket; csak ez utóbbiak érdekesek a dinamikus rendszerek elméletében.

A *Lebesgue*-terek axiomatikus meghatározása és elmélete [8]-ban van kifejtve. Nekünk itt csak a *mérhető felbontás, a faktor-tér, és a mértékek kanonikus rendszere* alapvető fogalmára van szükségünk. A továbbiakban M mindig Lebesgue-teret jelent.

Az M tér egymást nem metsző nem üres halmazokra történő ζ felbontását *mérhetőnek* nevezzük, ha létezik megszámlálható sok mérhető halmazból álló olyan $\{B_\alpha\}$ a felbontás elemeiből álló halmazrendszer, hogy a felosztás tetszőleges két eleme valamilyen α-ra B_α és $M-B_\alpha$ segítségével szétválasztható. Mérhető felbontásokra példaként szolgálhatnak az M térnek más *Lebesgue*-terekre való homomorf leképezéseinél a pontok őspéldáira való felbontások.

Az M tér ζ felbontásához tartozó *faktor-terének* nevezzük azt a mértékteret, melynek pontjai a ζ felbontás elemei és a μ_ζ mérték a következőképpen van értelmezve: Legyen H az M térnek a ζ felbontás elemeiből álló M/ζ térre történő leképezése oly módon, hogy tetszőleges $x \in M$ pont képe azon felosztásbeli elem legyen, melyhez az adott pont tartozik; a Z halmaz mérhető M/ζ-ban, ha $H^{-1}Z$ mérhető M-ben, és — értelmezés szerint — $\mu_\zeta(Z) = \mu(H^{-1}Z)$. Ha a ζ felosztás mérhető, akkor az M/ζ faktortér Lebesgue-tér. Nyilvánvaló, hogy H az M térnek homomorfizmusa az M/ζ térre.

A ζ felosztáshoz tartozó *kanonikus mértékrendszernek* nevezzük a következő két tulajdonsággal rendelkező μ_C, $C \in M/\zeta$ mértékrendszert: 1. μ_C mérték C-ben, és a C-tér a μ_C mértékkel *Lebesgue*-tér; 2. tetszőleges mérhető $X \subset M$ halmazra az XC halmaz mérhető C-ben majdnem minden $C \in M/\zeta$ pontra, a $\mu_C(XC)$ függvény mérhető M/ζ-án és

$$\mu(X) = \int_{M/\zeta} \mu_C(XC)\, d\mu_\zeta.$$

Tetszőleges mérhető felbontásnak van kanonikus mértékrendszere, és tetszőleges két μ_C és μ_C' kanonikus mértékrendszer, mely egy és ugyanazon ζ felbontáshoz tartozik, azonos mod 0 (azaz $\mu_C = \mu_C'$ majdnem minden $C \in M/\zeta$-ra).

1. 3. Metrikusan tranzitív komponensekre bontás. A T automorfizmust *metrikusan tranzitívnak* nevezzük, ha tetszőleges mérhető, T-re nézve invariáns, azaz $TX = X$ feltételnek eleget tevő, $X \subset M$ halmaznak a mértéke vagy 0, vagy 1. Nyilvánvaló, hogy az olyan tér, melyen metrikusan tranzitív automorfizmus van értelmezve, vagy nem tartalmaz pozitív mértékű pontot, vagy véges sok azonos pozitív mértékű pontból áll mod 0.

Ha a T automorfizmus nem metrikusan tranzitív, akkor felbontható metrikusan tranzitív komponensekre a következő értelemben. Nevezzük a ζ felbontást a T-re nézve *mozdulatlannak*, ha összes elemei invariánsak T-re nézve, és jelöljük T_C-vel azt a leképezést, melyet a T automorfizmus indukál a ζ felbontás C elemén. Ha a ζ felbontás mozdulatlan és mérhető, akkor T_C a C tér automorfizmusa lesz (μ_C mértékkel). Ezt az automorfizmust a T automorfizmus C-n levő komponensének nevezzük. Igaz, hogy az összes mérhető felbontások között, melyek T-re nézve mozdulatlanok, van egy legkisebb felbontás mod 0 és, hogy a T automorfizmusnak ezen felbontás elemein értelmezett komponensei metrikusan tranzitivak. Ezek lesznek a T automorfizmus metrikusan tranzitív komponensei.

Nyilvánvaló, hogy az izomorfizmus problémáját elsősorban a metrikusan tranzitív automorfizmusokra kell tekinteni és hogy éppen itt van az egész probléma súlypontja. A következő tétel az izomorfizmus általános problémáját teljesen visszavezeti erre a speciális esetre. Legyen ζ mozdulatlan felbontás, mely a T automorfizmust T_C komponensekre bontja; ha a T_ζ automorfizmus metrikus típusa ismert mint az M/ζ faktortéren értelmezett függvény, akkor a T automorfizmus metrikus típusa teljesen meg van határozva.

1. 4. Spektrál invariánsok. A metrikusan tranzitív automorfizmusok tanulmányozásának fő eszköze az operátorok spektrál elmélete.

Legyen $L_2(M)$ az M-en abszolút értékben négyzetesen integrálható komplex értékű függvények unitér tere. $L_2(M)$-en minden T automorfizmusnak megfelel egy U_T unitér operátor, mely a következőképpen van értelmezve:

$$U_T f(x) = f(Tx), \quad f \in L_2(M), \ x \in M.$$

Az U_T operátor spektrál invariánsai a T automorfizmus metrikus típusának is invariánsai és ezeket az automorfizmus spektrál invariánsainak nevezzük. Ha a T és T' automorfizmushoz rendelt U_T és $U_{T'}$ operátorok spektrál invariánsai megegyeznek (azaz unitér ekvivalensek), a T és T' automorfizmusokat spektrálisan izomorfnak nevezzük. A T automorfizmus legegyszerűbb spektrál invariánsai az U_T operátor sajátértékei. Az 1 mindig sajátérték: a konstansok mindig a megfelelő sajátfüggvények. Ha az 1 sajátértéknek más sajátfüggvényei nincsenek, a T automorfizmust ergodikusnak nevezzük. Majdnem nyilvánvaló, hogy az ergodikusság ekvivalens a metrikus tranzitivitással, ily módon a metrikus tranzitivitás az automorfizmus spektrál tulajdonsága. Ezzel szemben az automorfizmusnak metrikusan tranzitív komponensekre történő felbontásának invariánsai nem spektrál invariánsok, például ha a T automorfizmus két metrikusan tranzitív automorfizmusra bomlik, úgy azon halmazok mértékeit, melyeken ezek az automorfizmusok értelmezve vannak, nem lehet meghatározni a T automorfizmus spektrál tulajdonságai alapján. Metrikusan tranzitív automorfizmus sajátértékei egyszeresek és multiplikatív csoportot alkotnak.

1. 5. Diszkrét és kvázi diszkrét spektrumú ergodikus automorfizmusok. Diszkrét (azaz tisztán pontokból álló) spektrumú ergodikus automorfizmusok esetén a spektrál invariánsok teljes mértékben megoldják a metrikus osztályozás problémáját: ha a T és T' automorfizmusok ergodikusak és egy és ugyanazon diszkrét spektrummal rendelkeznek, úgy ugyanazon metrikus típushoz tartoznak; az egységkör kerületén levő komplex számoknak tetszőleges, legfeljebb megszámlálható multiplikatív csoportjához létezik olyan diszkrét spektrumú ergodikus automorfizmus, melynek spektruma egybeesik ezzel a csoporttal.

Tetszőleges ergodikus automorfizmus esetén az izomorfizmus problémája nem oldható meg *csak* a spektrál invariánsok segítségével. Hogy erről meggyőződjünk, feltételesen nevezzük az U_T operátor közönséges sajátértékeit és sajátfüggvényeit *elsőrendű kvázisajátértéknek* és *kvázisajátfüggvénynek* és az $n>1$*-rendű kvázisajátértékeket és kvázisajátfüggvényeket* értelmezzük a következőképpen: az $n-1$-edrendű φ kvázisajátfüggvényt nevezzük n-edrendű kvázisajátértéknek, ha létezik olyan $f\in L_2(M)$, $f\neq 0$, hogy

$$U_T f = \varphi \cdot f;$$

ebben az esetben f-et n-edrendű, a φ kvázisajátértékhez tartozó kvázisajátfüggvénynek nevezzük. Ergodikus T automorfizmus esetén az n-edrendű kvázisajátértékek tetszőleges n esetén csoportot alkotnak és ha $n>1$ esetén ezen csoport minden eleméhez hozzárendeljük azt az $n-1$-edrendű kvázisajátértéket, melyhez tartozik, úgy ennek a csoportnak a megelőzőbe való homomorfizmusát kapjuk. Az ily módon nyert növekvő csoportok sorozatának algebrai típusa, ellátva a homomorfizmusokkal, a T automorfizmus metrikus invariánsa. Egyszerű példa mutatja, hogy ez az invariáns nem spektrális.

Ha a kvázisajátfüggvények $L_2(M)$-ben teljes rendszert alkotnak, az automorfizmus — megállapodás szerint — kvázi diszkrét spektrummal rendelkezik. A kvázi diszkrét spektrumú automorfizmusokat nemrég vizsgálta meg L. M. ABRAMOV [9], aki egy teljes klasszifikáló elméletet dolgozott ki azokra. ABRAMOV a feladat egyszerűsítése érdekében vizsgálataiból kizárta azokat az automorfizmusokat, melyeknek sajátértékei között szerepelnek 1 gyökei, kivéve magát 1-et. Kiderült, hogy ezen feltétel esetén két kvázi diszkrét spektrumú ergodikus automorfizmus abban és csak abban az esetben tartozik egy metrikus típusba, ha sajátértékeik megegyeznek és a nekik megfelelő csoportok és homomorfizmusok sorozata megfeleltetésbe hozható egy izomorfizmussal, mely ezeket a sajátértékeket a helyükön hagyja. Érvényes a megfelelő *egzisztencia* tétel is. Mint a közönséges sajátfüggvények, a különböző kvázisajátértékekhez tartozó kvázisajátfüggvények ortogonálisak. Az összes kvázisajátfüggvény abszolút értékben 1-gyel egyenlő.

1. 6. Tisztán folytonos spektrumú automorfizmusok. Így nevezzük azokat az automorfizmusokat, melyeknek a konstanson kívül nincsen más sajátfüggvényük. Ezek tanulmányozása — az egész probléma legmélyebb és legérdekesebb része. Éppen erre vonatkozik az a fejlődés, melynek ezt az összefoglalást is szenteltük.

A legutóbbi időig (azaz KOLMOGOROV [1], [2] dolgozatának megjelenéséig) nem volt ismeretes, hogy léteznek-e spektrálisan izomorf, de különböző metrikus típusba tartozó automorfizmusok tisztán folytonos spektrummal. Ezen problémának negatív megoldása valószínűtlennek tűnt, a pozitív megoldáshoz új, nem spektrális invariánsokra lett volna szükség. Új invariánsokat ajánlottak, de nem spektrál voltuk megállapítása nem járt sikerrel.

Tisztán folytonos spektrumú automorfizmusok legegyszerűbb példáit a valószínűségszámításból vették: ezek a *Bernoulli-féle automorfizmusok:* Legyen X Lebesgue tér és M az X térnek mindkét irányban végtelen önmagával való direkt szorzata. Az M tér pontjaiul a mindkét irányban végtelen $\{x_n\}$, $x_n\in X$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sorozatok szolgálnak. Az X állapothalmazú *Bernoulli*-féle automorfizmus az M térnek a következőképpen értelmezett automorfizmusa lesz

$$T\{x_n\}=\{x_n'\},\ x_n'=x_{n-1}.$$

Ha X nem egyetlen pontból áll mod 0, akkor ez az automorfizmus tisztán folytonos spektrumú, mely a következőképpen írható le: az $L_2(M)$ térnek a konstansra ortogonális függvényekből álló alterében létezik olyan teljes ortonormált függvényrendszer $\{f_{m,n}\}$, $m=1, 2, \ldots; n=0, \pm 1, \ldots$, hogy

$$U_T f_{mn} = f_{m,n+1}.$$

Az ilyen spektrumot megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrumnak nevezzük, az elnevezés azzal magyarázható, hogy konstansokból álló egydimenziós altér ortogonális kiegészítő halmazán értelmezett U_T operátor szétesik megszámlálható sok operátor ortogonális összegére, amelyek unitér ekvivalensek a független változóval való szorzás operátorával az egységkör kerületén abszolút értékben négyzetesen integrálható függvények terében a közönséges *Lebesgue* mértékre nézve. Nyilvánvaló, hogy az összes automorfizmusok megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrum esetén spektrálisan izomorfak egymással.

A *Bernoulli* automorfizmusok csak egyike a valószínűségszámítási automorfizmusok osztályának: minden időben diszkrét stacionárius folyamatnak megfelel egy automorfizmus a folyamat trajektoriáinak terében.

A példák másik fontos osztályát a topologikus algebra szolgáltatja. Legyen M kompakt topologikus csoport megszámlálható topologikus bázissal, μ invariáns mérték M-ben és T az M topologikus csoport automorfizmusa. Az invariáns mérték egyértelműségének értelmében T az M mértéktér (μ a mérték) automorfizmusa az 1. 1 pont értelmében. Ez az automorfizmus abban és csak abban az esetben ergodikus, ha az M csoport karakterjeinek M diszkrét csoportján a T-nek megfelelő T^* automorfizmus aperiódikus (azaz a T^{*n} automorfizmusok egyikének sincs az M^* csoport egységelemén kívül mozdulatlan pontja). Például az r-dimenziós tórus egy automorfizmusa, mely egy a tórus ciklikus koordinátáiban megadott egész számokból álló r-edrendű mátrixszal (± 1 determinánssal) van megadva, akkor és csak akkor ergodikus, ha ennek a mátrixnak karakterisztikus értékei között nem szerepel 1-nek gyöke. Kompakt kommutatív csoport tetszőleges ergodikus automorfizmusa megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrumú.

Bizonyos szempontból azonban a megszámlálható multiplicitású Lebesgue spektrum különleges eset. Jelölje $\mathfrak{A}$ a $[0, 1]$ intervallum összes automorfizmusai csoportját, zérus mértékű halmazoktól eltekintve, és a $T_0 \in \mathfrak{A}$ automorfizmus környezetének tekintsük azon $T \in \mathfrak{A}$ automorfizmusok összességét, melyek eleget tesznek véges sok

$$\mu[(T_0 A \cup TA) - T_0 A \cap TA] < \varepsilon$$

alakú egyenlőtlenségnek, ahol A mérhető halmaz, ε pozitív szám. Ebben az esetben a $\mathfrak{A}$ topologikus csoport lesz megszámlálható topologikus bázissal. A $\mathfrak{A}$ topologikus térben van metrika, melyre nézve a tér teljes, és igaz, hogy a tisztán folytonos spektrummal rendelkező automorfizmusok mindenütt sűrű G_δ, a megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrumú automorfizmusok pedig első kategóriájú halmazt alkotnak.

Nem ismeretes az, hogy általában milyen lehet egy automorfizmus folytonos spektruma. Az egyetlen általános (majdnem triviális) tétel azt mondja ki, hogy a spektrum szimmetrikus a valós tengelyre nézve. Ha 1-től különböző sajátértékek is vannak, akkor a spektrum invariáns ezekkel a sajátértékekkel való szorzásra nézve. Másrészt bármilyen legyen is az egységkör kerületén értelmezett *Lebesgue — Stieltjes* mérték, azon automorfizmusok, melyeknek spektrál típusa alá van rendelve ennek a mértéknek $\mathfrak{A}$-ban első kategóriájú halmazt alkotnak. Nemrég I. V. GIRSZANOV [10] bebizonyította egyszerű tisztán folytonos spektrumú automorfizmusok létezését. Eddig még az sem volt ismeretes, hogy léteznek-e véges multiplicitású folytonos spektrumú automorfizmusok. Máig sem ismeretes, hogy léteznek-e véges multiplicitású *Lebesgue* spektrumú automorfizmusok.

Nem spektrál metrikus invariánsra feltehetőleg példaként szolgálhat a keverés fokszáma. Azt mondjuk, hogy a T automorfizmus r-edfokú keverés, ha mérhető halmazoknak tetszőleges $X_0, X_1, \ldots, X_r$ rendszerére és egészszámok komplexumainak tetszőleges $(k_1^0, k_1^1, \ldots, k_1^r)$, $(k_2^0, k_2^1, \ldots, k_2^r), \ldots$ sorozatára, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} \min\limits_{0\leq i<j\leq r} |k_n^j - k_n^i| = \infty$, fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{i=0}^{r} T^{k_n^i} X_i\right) = \prod_{i=0}^{r} \mu(X_i)$$

összefüggés. Az egyszerű keverés (azaz az elsőfokú keverés) az automorfizmus spektrál tulajdonsága. Az $r > 1$ fokszámú keverés valószínűleg már nem spektrál tulajdonság, de bizonyítani ezt nem sikerült. A *Bernoulli* automorfizmusok és a kompakt kommutatív csoportok ergodikus automorfizmusai tetszőleges fokszámú keverések. Az elsőfokú keverések $\mathfrak{A}$-ban első kategóriájú halmazt alkotnak.

1. 7. Folyamatok. Az $\{S_t\}$, $-\infty < t < \infty$ *folyamat* a *Lebesgue*-tér automorfizmusainak egy egyparaméteres csoportja. A dinamikus rendszerek klasszikus elméletének éppen folyamatokkal (és nem egyes automorfizmusokkal) van dolga. A valószínűségszámításban is állandóan folyamatokkal találkozunk: míg minden időben diszkrét stacionárius sztochasztikus folyamatnak egy automorfizmus felel meg a sztochasztikus folyamat trajektoriáinak terében, addig tetszőleges, időben folytonos stacionárius sztochasztikus folyamatnak megfelel egy folyamat a sztochasztikus folyamat trajektóriájának terében.

Az $\{S_t\}$ folyamatot *mérhetőnek* nevezzük, ha tetszőleges mérhető $X \subset M$ halmazra az M tér és a (t) számegyenes $M \times (t)$ direkt szorzatának terében az (x, t) pontok azon halmaza mérhető lesz $M \times (t)$-ben, melyekre $S_t x \in X$.

Minden folyamatnak nyilvánvaló módon megfelel a valós számok additív csoportjának egy homomorfizmusa az $\mathfrak{A}$ csoportra, és mérhető folyamat esetén ez a homomorfizmus folytonos lesz. A valós számok csoportjának $\mathfrak{A}$-ba való tetszőleges homomorfizmusát *folytonos folyamatnak* nevezzük. Nem ismeretes, hogy tetszőleges folytonos folyamat származtatható-e mérhető folyamat segítségével.

Mivel a T automorfizmus tanulmányozása lényegében ezen automorfizmus által származtatott $\{T^n\}$ ciklikus csoport tanulmányozása, ezért az egyes automorfizmusról a folyamatra való áttérés valójában csak automorfizmusok ciklikus csoportjáról az egy paraméteres csoportra való áttérést jelenti. Ennek megfelelően a folyamatok — mind a mérhetők, mind a folytonosak — elmélete alapjában ugyanúgy épül fel, mint az automorfizmusok elmélete. Többek között lehet beszélni folyamatok izomorfizmusáról, metrikus típusáról, metrikusan tranzitív és metrikusan nem tranzitív folyamatokról, metrikusan tranzitív komponensekre való bontásról, folyamatok spektrál invariánsairól és spektrál izomorfizmusáról, diszkrét és kvázi diszkrét spektrumú folyamatokról, tisztán folytonos spektrumú folyamatokról, megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrumú folyamatokról, ilyen vagy olyan fokú keverésről. A folyamatok izomorfiája ugyanolyan állapotban van, mint az automorfizmusoké: megvan a diszkrét spektrumú ergodikus folyamatok metrikus osztályozása, de tisztán folytonos spektrumú folyamatokról kevés ismeretes.

Mérhető folyamatok tanulmányozásának hatékony eszköze a mérhető folyamatoknak *speciális folyamatok* segítségével történő előállítására vonatkozó tétel. Legyen L Lebesgue tér λ mértékkel, F pozitív integrálható függvény L-en és T az L tér automorfizmusa. Jelöljük M-el az L tér és (u) számegyenes $L\times(u)$ direkt szorzatának azt az alterét, mely azon (x, u) pontokból áll, melyekre $0 \leqq u < F(x)$ és legyen $(x, u) \in M$-re:

$$S_t(x,u)=\begin{cases}(x, u+t) \text{ ha } -u \leqq t < -u+F(x) \\ (T^n x, u+t-F(x)-\cdots-F(T^{n-1}x)) \\ \qquad \text{ha } -u+\sum_{k=0}^{n-1} F(T^k x) \leqq t < u+\sum_{k=0}^{n} F(T^k x), \quad (n=1,2,\ldots) \\ (T^{-n}x, u+t+F(T^{-1}x)+\cdots+F(T^{-n}x) \\ \qquad \text{ha } -u-\sum_{k=1}^{n} F(T^{-k}x) \leqq t < -u-\sum_{k=1}^{n-1} F(T^{-k}x), \quad (n=1,2,\ldots)\end{cases}$$

Ha az M-en levő mértéket $\int_L F d\lambda$-val osztva normáljuk, akkor M *Lebesgue*-tér lesz, míg az $\{S_t\}$ csoport — mérhető folyamat M-ben. Ezt a folyamatot nevezzük a T automorfizmus és az F függvény segítségével felépített *speciális folyamatnak*. Az előállításra vonatkozó tétel legegyszerűbb alakjában azt állítja, hogy tetszőleges, mozdulatlan pont nélküli mérhető folyamat felbontható véges, vagy megszámlálható sok speciális folyamatokkal izomorf (mod 0) komponensekre.

2. §. KOLMOGOROV MUNKÁJA

Mint már említettük, KOLMOGOROV [1], [2] 1958-ban bebizonyította megszámlálható *Lebesgue* spektrumú különböző metrikus típusú automorfizmusok létezését.

Az új metrikus invariáns, melynek segítségével ezt az eredményt kapta, a következőképpen írható le. Az M tér véges vagy megszámlálható sok $A_1, A_2, \ldots$ pozitív mértékű halmazra történő ζ *felbontás entrópiáját* értelmezzük a

$$H(\zeta) = -\sum_k \mu(A_k) \log \mu(A_k)$$

képlettel (a logaritmus 2-es alapú) és jelöljük Z-vel a véges entrópiájú felbontások halmazát. Ha a $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ felbontások Z-be tartoznak, akkor szorzatuk $\prod_{k=1}^{m} \zeta_k$ (azaz a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ felbontások legnagyobb közös részfelbontása) szintén Z-be tartozik. Tetszőleges T automorfizmusra és $\xi \in Z$-re legyen

$$\xi_T = \prod_{k=-\infty}^{\infty} T^k \xi, \quad \xi_T^n = \prod_{k=0}^{n-1} T^k \xi,$$

$$h(T, \xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi_T^N). \tag{1}$$

Általános információelméleti tételekből következik, hogy ez a határérték létezik és nem nagyobb, mint $H(\xi)$ és hogy $h(T, \eta) \leqq h(T, \xi)$, ha $\eta \leqq \xi$ (azaz ξ az η felbontás részfelbontása). KOLMOGOROV megmutatta, hogy sokkal általánosabban $h(T, \eta) \leqq$ $\leqq h(T, \xi)$, ha $\eta \leqq \xi_T$. Speciálisan, ha van olyan $\xi \in Z$ felbontás, hogy $\xi_T = \varepsilon \bmod 0$, ahol ε az M térnek a tér pontjaira való felbontását jelenti, akkor tetszőleges $\eta \in Z$ felbontásra $h(T, \xi) \geqq h(T, \eta)$. Ebben az esetben a $h(T, \xi)$ függvény minden a $\xi_T = \varepsilon$ feltételnek elegettevő $\xi \in Z$ felbontásra ugyanazt az értéket veszi fel. Ily módon ez az érték a T automorfizmus metrikus invariánsa.

Ezt az invariánst KOLMOGOROV $h_1(T)$-vel jelölte, olyan automorfizmusokra pedig, melyre nézve nincs a $\xi_T = \varepsilon \bmod 0$ feltételnek elegettevő $\xi \in Z$ felbontás, legyen $h_1(T) = \infty$. Példaként a *Bernoulli* automorfizmusokat tekintette (lásd 1. 6). Legyen T *Bernoulli* automorfizmus, véges, vagy megszámlálható sok $p_1, p_2, \ldots$ mértékű pontból álló állapottérrel. Legyen az M tér ξ felbontása a következő feltétellel értelmezve: az $\{x_n\}$ és $\{y_n\}$ pontok a felbontás azonos eleméhez tartoznak, ha $x_0 = y_0$. Nyilvánvaló, hogy $\xi_T = \varepsilon$ és

$$H(\xi) = -\sum_k p_k \log p_k. \tag{2}$$

Véges (2) entrópia érték esetén, amint azt egyszerű számítások mutatják, $h(T, \xi) =$ $= H(\xi)$, és így

$$h_1(T) = -\sum_k p_k \log p_k. \tag{3}$$

Nem nehéz megmutatni, hogy ez a formula érvényben marad akkor is, ha a (2) entrópia végtelen. Ily módon már a *Bernoulli* automorfizmusok osztályában is a h_1 invariáns minden pozitív értéket felvesz, a ∞ értéket is beleértve. Következésképp kontinuum sok olyan megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrumú automorfizmus van, melyek különböző metrikus típusba tartoznak.

3. §. AUTOMORFIZMUS ENTRÓPIÁJA

Az M tér tetszőleges

$$\prod_{k=-\infty}^{\infty} T^k \xi = \varepsilon \bmod 0$$

feltételnek eleget tevő, pozitív mértékű halmazokra történő ξ felbontását *kialakítónak* (образуюший) nevezzük a T automorfizmusra nézve. Léteznek kialakító nélküli automorfizmusok, pl. a periódikus automorfizmusok. Nem ismeretes, léteznek-e kialakító nélküli ergodikus automorfizmusok.

Értelmezés szerint $h_1(T) = \infty$ abban és csak abban az esetben, ha a T automorfizmusnak nincs véges entrópiájú kialakítója. Sajnos ez a feltétel nem elég effektív, mivel nem állnak rendelkezésünkre megfelelő eszközök, melyek segítségével meg lehetne állapítani kialakítók létezését vagy nem létezését. Igaz, hogy *Kolmogorov* tétele szerint

$$h_1(T) \geqq \sup h(T, \xi), \qquad \xi \in Z,$$

tehát a $\sup h(T, \xi) = \infty$ egyenlőségből következik a $h_1(T) = \infty$ egyenlőség (így történik a (3) összefüggés bizonyítása, ha a jobb oldal végtelen). De ha, és ez gyakran előfordul, a T automorfizmus ergodikus és $\sup h(T, \zeta) < \infty$ és véges entrópiájú kialakítót nem sikerül találni, akkor $h_1(T)$-t nem tudjuk kiszámítani. Példaként említjük a racionális számok csoportja karaktereinek csoportján értelmezett ergodikus automorfizmusokat (lásd 5. §).

J. G. SZINAJ [11] javasolta a *Kolmogorov*-féle invariáns meghatározásának megváltoztatását; tetszőleges T automorfizmusra legyen

$$h(T) = \sup h(T, \xi), \qquad \xi \in Z.\text{[1]} \tag{4}$$

Nyilvánvaló, hogy $h(T) \leqq h_1(T)$ és $h(T) = h_1(T)$ ha $h_1(T) < \infty$. Ha T periódikus automorfizmus $h(T) = 0$, míg $h_1(T) = \infty$. Nem ismeretes azonban, hogy léteznek-e olyan ergodikus automorfizmusok, melyekre $h(T) < \infty$ és $h_1(T) = \infty$. A $p_1, p_2, \ldots$ számokkal meghatározott *Bernoulli* automorfizmus esetén (lásd 2. §)

$$h(T) = h_1(T) = -\sum_k p_k \log p_k.$$

SZINAJ javaslata igen szerencsésnek bizonyult, $h(T)$-t a T automorfizmus entrópiájának nevezzük.

4. §. AZ ENTRÓPIA TULAJDONSÁGAI

4. 1. $h(T^n) = |n| h(T)$ (n tetszőleges egész)

4. 2. $h(S \times T) = h(S) + h(T)$.

Itt $S \times T$ az S és T automorfizmusok direkt szorzata, azaz azon terek direkt szorzatán értelmezett automorfizmus, melyeken az S és T automorfizmusok értelmezve vannak, a következő összefüggéssel értelmezve $S \times T(x, y) = (Sx, Ty)$.

4. 3. Ha az S automorfizmus a T automorfizmusnak homomorf képe (faktor automorfizmusa), akkor $h(S) \leqq h(T)$. Az L tér S automorfizmusa az M tér T automorfizmusának *homomorf képe*, ha létezik az M térnek az L térre olyan R homomorfizmusa, hogy $RT = SR$. Az M tér T automorfizmusának a ζ T-re invariáns ($T\zeta = \zeta$) mérhető felbontás szerinti *faktor automorfizmusának* nevezzük azt a T_ζ automorfizmust, melyet a T automorfizmus indukál az M/ζ faktortéren. A T_ζ faktor automorfizmus homomorf képe a T automorfizmusnak: az R homomorfizmus az M térnek az M/ζ faktor térre való természetes homomorfizmusa lesz. Fordítva, a T automorfizmus S homomorf képe izomorf a T automorfizmus azon ζ felbontás szerinti faktor automorfizmusával, mely az L tér pontjaira való felbontásának ősképéül szolgál az R homomorfizmus esetén, mely eleget tesz a $RT = SR$ összefüggésnek.

4. 4. Ha az M tér ζ mérhető felbontása mozdulatlan a T automorfizmusra nézve, és T_C a ζ felbontás C elemein a T komponensei (ergodikus vagy nem ergodikus), akkor

$$h(T) = \int_{M/\zeta} h(T_c)\, d\mu_\zeta.$$

[1] Valójában SZINAJ $h(T)$ értékét mint a $h(T, \xi)$ függvény felső határát értelmezte a *véges* mérhető ξ felbontások terén, ami ekvivalens (4)-el.

4. 5. Ha a T' olyan származtatott automorfizmus, melyet az M tér T automorfizmusa indukál, az $A \subset M$ altéren, mely eleget tesz a $\mu\left(\bigcup_{-\infty}^{\infty} T^n A\right) = 1$ feltételnek, akkor $h(T') = \frac{h(T)}{\mu(A)}$.

Az „altér" szó itt azt jelenti, hogy az A halmazt mint önálló teret tekintjük $\mu_A(X) = \frac{\mu(X)}{\mu(A)}$ mértékkel. A T' *származtatott automorfizmus* a

$$T'x = T^{m(x)}x, \; x \in A$$

összefüggéssel van értelmezve, ahol $m(x)$ az a legkisebb természetes l szám, melyre $T^l x \in A$ (ilyen l majdnem minden $x \in A$-ra létezik). Ha a T automorfizmus ergodikus a $\left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} T^n A\right) = 1$ feltétel tetszőleges pozitív mértékű A halmazra teljesül és a T' származtatott automorfizmus szintén ergodikus.

A 4. 1 tétel SZINAJ [11] dolgozatában a 4. 5 tétel ABRAMOV [12],[9] dolgozataiban, a 4. 2, 4. 3 és 4. 4 tételek az én [13] dolgozatomban találhatók. A 4.1, 4. 2 és 4. 3 tételek bizonyítása egyszerű, 4. 4 és 4. 5 mélyebb tételek.

A 4. 5 tétellel szoros kapcsolatban van ABRAMOV egy másik tétele [12], [9], mely szerint ergodikus automorfizmus entrópiája egyenletesen oszlik el a térben. Pontosan megfogalmazva: Legyen tetszőleges pozitív mértékű X halmazra és tetszőleges $A_1, A_2, \ldots$ elemekből álló $\xi \in Z$ felbontásra

$$H(\xi \cap X) = -\sum_k \mu(A_k \cap X) \log \mu(A_k \cap X)$$

($\mu(A_k \cap X) = 0$ esetén az összeg megfelelő tagja zérusnak veendő). Ekkor a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\xi_T^n \cap X)$$

határérték tetszőleges T automorfizmusra létezik és minden ergodikus T automorfizmus esetén $h(T, \xi)\, \mu(X)$ az értéke.

5. §. AZ ENTRÓPIA KISZÁMÍTÁSA

Ha a T automorfizmusnak van $\xi \in Z$ kialakítója, úgy entrópiáját a $h(T) = h(T, \xi)$ összefüggés alapján számíthatjuk ki. Fentebb megmutattuk, hogyan alkalmazható ez a módszer *Bernoulli* automorfizmusokra, ha a (2) összeg véges. Második példaként tekintsük tórusok automorfizmusait. Ha T a kétdimenziós tórus egy ergodikus automorfizmusa, akkor ezt az automorfizmust ciklikus koordinátákban meghatározó egész számokból álló mátrixnak két valós sajátértéke van, melyek közül az egyik — mondjuk λ_1 — abszolút értékben egynél nagyobb, a másik egynél kisebb. Mint SZINAJ megmutatta

$$h(T) = \log |\lambda_1|.$$

Általában, ha T az r-dimenziós tórus egy ergodikus automorfizmusa, melynek mátrixa r különböző valós sajátértékkel rendelkezik és ha $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ az abszolút értékben egynél nagyobbakat jelölik, akkor

$$h(T) = \sum_{i=1}^{p} \log |\lambda_i|.$$

Minden ilyen automorfizmusnak van véges entrópiájú kialakítója (sőt véges kialakítója). $h(T)$ kiszámítása a kialakító célszerű kiválasztásában és a megfelelő $h(T, \xi)$ függvényérték kiszámításában áll.

Az alábbi tételek lehetővé teszik automorfizmusok entrópiájának kiszámítását azokban az esetekben, amikor nincs véges entrópiájú kialakító, vagy ilyen kialakítót nem sikerült találni.

(A) Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots$ olyan Z-beli felbontás sorozat, hogy

$$\xi_1 \leqq \xi_2 \leqq \ldots, \prod_{n=1}^{\infty} \xi_r = \varepsilon \bmod 0,$$

akkor az M tér tetszőleges T automorfizmusára

$$h(T) = \lim_{n\to\infty} h(T_1, \xi_n)$$

(B) Ha T az M tér egy automorfizmusa és $\xi_1, \xi_2, \ldots$ olyan Z-beli felbontás-sorozat, hogy

$$\xi_1 \leqq \xi_2 \leqq \ldots, \prod_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=-\infty}^{\infty} T^k \xi_n \right) = \varepsilon \bmod 0,$$

akkor

$$h(T) = \lim_{n\to\infty} h(T, \xi_n).$$

(C) Legyen T az M tér egy automorfizmusa és $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ a tér mérhető felbontásainak olyan sorozata, hogy

$$T\zeta_n = \zeta_n, \quad \zeta_1 \leqq \zeta_2 \leqq \ldots, \prod_{n=1}^{\infty} \zeta_n = \varepsilon \bmod 0.$$

Ha T_n a T automorfizmus ζ_n szerinti faktor automorfizmusa, akkor

$$h(T) = \lim_{n\to\infty} h(T_n).$$

Az (A) tétel a [13], a (B) tétel SZINAJ [14], a (C) tétel pedig ABRAMOV [15] dolgozatában található meg. A (B) tétel tekinthető a (C) tétel speciális esetének (legyen $\zeta_n = \prod_{k=-\infty}^{\infty} T^k \xi_n$ és alkalmazzuk KOLMOGOROV 2. §-beli tételét), míg (A) a (B) speciális esetének tekinthető. Az (A) tétel főként elméleti jelentőségű és olyan esetekben alkalmazzuk, amikor automorfizmusok egy egész seregének egyidejűleg kell kiszámítani az entrópiáját. Ezen a tételen alapul a 4. 4 és sok más tétel bizonyítása. Konkrét számításokra a (B) és (C) tételek alkalmasabbak.

Példaként tekintsük a racionális számok additív R csoportja — vagy tetszőleges R' alcsoportja — karakterei csoportján értelmezett tetszőleges T automorfizmust. A T konjugált automorfizmusa, mint az R' alcsoport bármely automorfizmusa, valamilyen r racionális számmal való szorzás műveletét jelenti, és $r \neq \pm 1$ esetén a T automorfizmus ergodikus. Legyen $r = \frac{m}{n}$, ahol m és n relatív prímek. Ha R' az mn-es számrendszer racionális számaiból álló csoport, akkor a T automorfizmusnak van véges kialakítója, de komplikáltabb esetekben, speciálisan $R' = R$ esetén kialakitót nem sikerült találni és az entrópia kiszámítására a (B) vagy (C) tételt kell használni. Mint ABRAMOV [15] megmutatta, minden esetben

$$h(T) = \log \max (|m|, |n|).$$

6. §. NULL ENTRÓPIÁJÚ AUTOMORFIZMUSOK

Amint [13] dolgozatomban megmutattam, a null entrópiájú automorfizmusok $\mathfrak{A}$-ban (lásd 1. 6) egy mindenütt sűrű G_δ halmazt alkotnak. Más szavakkal: egy automorfizmus „törvényszerűen" (rendszerint) null entrópiájú.

A null entrópiájú automorfizmusok osztályát le lehet írni az entrópia fogalmának felhasználása nélkül is: a T automorfizmus entrópiája abban és csak abban az esetben egyenlő nullával, ha az M tér tetszőleges mérhető ζ felbontása, amely eleget tesz a $T\zeta \geqq \zeta$ feltételnek, eleget tesz a $T\zeta = \zeta$ mod 0 feltételnek is. Hogy jobban megértsük ezt a tételt, megjegyezzük, hogy a T automorfizmus az M tér tetszőleges mérhető ζ felbontás szerinti faktor terében egy a $T\zeta \geqq \zeta$ feltételnek elegettevő T_ζ *endomorfizmust* indukál, mely abban és csak abban az esetben lesz automorfizmus, ha $T\zeta = \zeta$. Ily módon a T automorfizmusnak abban és csak abban az esetben lesz null entrópiája, ha az összes faktor endomorfizmusai automorfizmusok mod 0.

Ugyanezen tétel harmadik megfogalmazását kapjuk, ha mérhető felbontásokról a megfelelő *mérhető halmazok algebráira* térünk át. Minden mérhető ζ felbontásnak megfelel az M összes mérhető halmazaiból álló $\mathfrak{M}$ algebra egy részalgebrája, mely a ζ felbontás elemeinek összegeiből áll. Az $\mathfrak{M}$ *algebra részalgebrájának* nevezzük tetszőleges mérhető halmazokból álló összességet, mely tartalmazza M-et, és zárt a kivonás, megszámlálható összeadás és megszámlálható metszetképzés műveleteire, a halmazokat null mértékű halmazoktól eltekintve tekintjük. A mod 0 különböző mérhető felbontásoknak az $\mathfrak{M}$ algebra különböző részalgebrái felelnek meg és minden részalgebra valamilyen mérhető felbontásnak felel meg. Ily módon a T automorfizmus entrópiája akkor és csak akkor lesz nulla, ha az $\mathfrak{M}$ algebra tetszőleges $\mathfrak{S}$ olyan részalgebrájára, melyre $T\mathfrak{S} \supseteqq \mathfrak{S}$, teljesül a $T\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$ feltétel is.

7. §. ENTRÓPIA ÉS SPEKTRUM

A következő (ugyancsak [13]-ban szereplő) tétel az entrópia és spektrum közötti kapcsolatra mutat rá: pozitív entrópiájú T automorfizmus esetén az $L_2(M)$ térnek van olyan invariáns altere, melyben az U_T operátor spektruma megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* típusú. Speciálisan: diszkrét spektrumú automorfizmusok null entrópiával bírnak; szinguláris spektrumú automorfizmus entrópiája nullával egyenlő; megszámlálható spektrumú automorfizmusok entrópiája szintén nullával egyenlő.

A tétel megfordítása nem igaz: null entrópiájú automorfizmus spektrumának szintén lehet megszámlálható multiplicitású, *Lebesgue* típusú komponense. Példa a tetszőleges kvázidiszkrét, de nem diszkrét spektrumú ergodikus automorfizmus, melynek sajátértékei között nem szerepel 1-nek a gyöke, kivéve magát az 1-et. Ilyen automorfizmus entrópiája nullával egyenlő és a hozzárendelt U_T operátornak a sajátfüggvények által kifeszített altere $L_2(M)$-beli ortogonális kiegészítő terében megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektruma van (ABRAMOV [9]).

Még többet is lehet állítani: léteznek null entrópiájú megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrumu automorfizmusok. Ilyen példát GIRSZANOV szerkesztett (nem publikálta). GIRSZANOV automorfizmusa minden fokon keverés.

8. §. KOLMOGOROV-FÉLE AUTOMORFIZMUSOK ÉS TELJESEN POZITÍV ENTRÓPIÁJÚ AUTOMORFIZMUSOK

A T automorfizmust *Kolmogorov-féle automorfizmusnak* nevezzük, ha az $\mathfrak{M}$ algebrának létezik olyan $\mathfrak{S}$ részalgebrája, hogy

$$T\mathfrak{S} \supset \mathfrak{S}, \quad \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^n\mathfrak{S} = \mathfrak{M}, \quad \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} T^n\mathfrak{S} = \mathfrak{N}, \tag{5}$$

ahol $\mathfrak{N}$ az $\mathfrak{M}$ algebrának két elemből — M-ből és az üres halmazból — álló részalgebrája. $\bigvee_\alpha \mathfrak{S}_\alpha$ jelöli az $\mathfrak{M}$ algebra legkisebb, az összes $\mathfrak{S}_\alpha$-át tartalmazó részalgebráját.

Automorfizmusoknak ezt az osztályát KOLMOGOROV vezette be [1] dolgozatában. Ott „kvázireguláris" automorfizmusoknak nevezte őket.

Kolmogorov automorfizmusra példa a *Bernoulli* automorfizmusok osztálya. Az (5) feltételnek eleget tevő $\mathfrak{S}$ algebraként a $\prod_{n=-\infty}^{0} T^n\xi$ felbontásnak megfelelő részalgebra szolgál, ahol ξ a 2. §-ban mutatott kialakító.

A *Kolmogorov* automorfizmusok spektrumát [1]-ben vizsgálták meg. Kitűnt, hogy az mindig megszámlálható multiplicitású, *Lebesgue* típusú. Mint [16] munkámban megmutattam, tetszőleges *Kolmogorov* automorfizmus keverés minden fokon.

A 6. §-ban mondottakból következik, hogy a *Kolmogorov* automorfizmus entrópiája pozitív. Egy PINSZKER [17] által bebizonyított mélyebb tétel szerint a *Kolmogorov* automorfizmusnak megfelelő $h(T, \xi)$ függvény szigorúan pozitív. Ez utóbbi azt jelenti, hogy tetszőleges, a triviális mod 0 ν felbontástól — mely az egyetlen M elemből áll — eltekintve, $\xi \in Z$ felbontásra $h(T, \xi) > 0$. PINSZKER tételét még a következőképpen is meg lehet fogalmazni: *Kolmogorov* automorfizmus tetszőleges faktor automorfizmusának pozitív az entrópiája.

PINSZKER hipotézise az, hogy igaz a tétel megfordítása is: ha a $h(T, \xi)$ függvény szigorúan pozitív, akkor T Kolmogorov automorfizmus. Ezzel kapcsolatban megjegyzem, hogy szigorúan pozitív $h(T, \xi)$ függvényű automorfizmus spektruma megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* típusú és minden fokon keverés.

Szigorúan pozitív $h(T, \xi)$ függvényű automorfizmusokat röviden *teljesen pozitív entrópiájú automorfizmusoknak* fogjuk nevezni (PINSZKER „gyengén regulárisaknak" nevezte őket). Tanulmányozásuk bizonyos értelemben egyszerűbb, mint a *Kolmogorov* automorfizmusoké. Nyilvánvaló például, hogy teljesen pozitív entrópiájú automorfizmus inverze teljesen pozitív entrópiájú és hogy teljesen pozitív entrópiájú automorfizmus faktor automorfizmusa szintén teljesen pozitív entrópiájú automorfizmus, ugyanakkor *Kolmogorov* automorfizmusokra hasonló tételeket sem bizonyítani, sem cáfolni nem sikerült.

PINSZKER érdekes eredményeket kapott tetszőleges automorfizmusokra nézve is. Bebizonyította, hogy tetszőleges T automorfizmus null entrópiájú faktor automorfizmusai között van legnagyobb faktor automorfizmus, azaz olyan T_{ζ_0} faktor automorfizmus, hogy tetszőleges null entrópiájú T_ζ faktor automorfizmusra fennáll a $\zeta \leqq \zeta_0$ mod 0 összefüggés. Ezen legnagyobb null entrópiájú faktor automorfizmusnak megfelelő ζ_0 felbontás a neki megfelelő $\mathfrak{S}_0$ részalgebra segítségével a következőképpen írható le: $\mathfrak{S}_0$ az $\mathfrak{M}$ algebra azon legkisebb részalgebrája, mely tartalmazza az összes

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \bigvee_{k=-\infty}^{n} T^k\mathfrak{S}$$

részalgebrákat, ahol $\mathfrak{S}$ tetszőleges részalgebrája az $\mathfrak{M}$ algebrának. Emellett tetszőleges invariáns és mérhető ζ felbontás, melynek a T_ζ *teljesen pozitív entrópiájú* faktor automorfizmus felel meg, független ζ_0-tól; ez utóbbi azt jelenti, hogy tetszőleges a ζ_0 felbontás elemeiből álló, A_0 mérhető halmaz és tetszőleges, a ζ felbontás elemeiből álló mérhető A halmaz esetén igaz a $\mu(A_0 \cap A) = \mu(A_0)\,\mu(A)$ összefüggés.

Ezzel a tétellel kapcsolatban PINSZKER megkérdezte, hogy lehetséges-e tetszőleges ergodikus automorfizmust teljesen pozitív entrópiájú és null entrópiájú automorfizmus direkt szorzatára bontani? Ez a hatásos sejtése azonban nincs sem bizonyítva, sem cáfolva. Innen következne, hogy tetszőleges pozitív entrópiájú ergodikus automorfizmusnak van teljesen pozitív entrópiájú faktor automorfizmusa, ami sokkal szerényebb állítás és ugyancsak nincs bizonyítva vagy cáfolva.

9.§. PONTOS ENDOMORFIZMUSOK

A *Kolmogorov*-féle automorfizmusokkal szorosan összefüggnek a *pontos endomorfizmusok*, melyeket [16] dolgozatomban részletesen tanulmányoztam. Az M tér T endomorfizmusát pontosnak nevezzük, ha

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M} = \mathfrak{N}.$$

Ez a feltétel ekvivalens a

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^nX) = 1$$

összefüggéssel, ahol X tetszőleges pozitív mértékű halmaz mérhető $TX, T^2X, \dots$ képekkel. Az olyan tér, melyen pontos endomorfizmus van értelmezve, vagy nem tartalmaz pozitív mértékű pontot, vagy egyetlen pontból áll mod 0.

A pontos endomorfizmusok alapvető tulajdonságainak felsorolásához szükség van az 1. § bizonyos meghatározásainak endomorfizmusokra való kiterjesztésére. A T endomorfizmus metrikusan tranzitív, ha tetszőleges a $T^{-1}X = X$ feltételnek eleget tevő halmaz 0, vagy 1 mértékű. Az U_T operátor endomorfizmusra ugyanúgy van értelmezve, mint automorfizmusra, de ha T nem automorfizmus, vagy mod 0 sem automorfizmus, akkor U_T nem unitér, hanem csak félunitér operátor, azaz az $L_2(M)$ térnek lineáris izometrikus leképezése egy valódi részébe. Hogy a keverés fokszámának endomorfizmusokra alkalmas értelmezését kapjuk, az 1. 6-ban szereplő értelmezésben a $T^{k_n^i}X_i$ halmazok helyett $T^{-k_n^i}X_i$ halmazokat kell venni. A mod 0 nem egyetlen pontból álló *Lebesgue*-tér tetszőleges pontos endomorfizmusa metrikusan tranzitív, minden fokban keverés és a következő módon leírható spektrummal rendelkezik: a konstansok terének ortogonális kiegészítésében létezik olyan teljes ortonormált $\{f_{m,n}\}$, $m=1, 2, \ldots; n=0, 1, 2, \ldots$ függvényrendszer, hogy

$$U_T f_{m,n} = f_{m,n+1}.$$

A következő konstrukció az M tér tetszőlegesen megadott T endomorfizmusát egy automorfizmussá alakítja. Legyen M' olyan halmaza az $\{x_n\}$ sorozatoknak (ahol $x_n \in M$ $(n=1, 2, \ldots)$), hogy $Tx_{n+1}=x_n$. Jelöljük megadott $X \subset M$ halmaz esetén X'_p-vel azon $\{x_n\} \in M'$ sorozatok halmazát, melyekre $x_p \in X$ és K_p-vel az összes lehetséges $X \subset M$ mérhető halmazoknak megfelelő X'_p halmazok összességét. Nyilvánvaló, hogy a $K_0, K_1, \ldots$ sorozat növekvő, és hogy $K = \bigcup_{p=0}^{\infty} K_p$ halmaztest. Legyen a μ' függvény K-n a $\mu'(X'_p) = \mu(X)$ összefüggéssel értelmezve és terjesszük ki ezt a függvényt *Lebesgue* mértékké. M' akkor *Lebesgue*-tér lesz, míg a T' leképezés, mely a

$$T\{x_n\}=\{x'_n\}, \quad x'_n = x_{n+1}$$

összefüggéssel van értelmezve az M' térnek automorfizmusa lesz. Ezt az automorfizmust nevezzük a T endomorfizmus *természetes kiterjesztésének.*

Egy endomorfizmus és természetes kiterjesztése egyidejűleg metrikusan tranzitívek vagy nem, és ugyanolyan fokon lesznek keverések. A *Kolmogorov* automorfizmusok és pontos endomorfizmusok közötti kapcsolat abban áll, hogy egy pontos endomorfizmus természetes kiterjesztése *Kolmogorov* automorfizmus és tetszőleges *Kolmogorov* automorfizmus (mod 0 izomorfizmus pontossággal) természetes kiterjesztése valamely pontos endomorfizmusnak. Hogy ilyen endomorfizmust kapjunk, a *Kolmogorov* automorfizmust fel kell bontani az (5) tulajdonsággal rendelkező $\mathfrak{S}$ algebrának megfelelő mérhető felbontás szerint.

A $h(T, \xi)$ függvény és $h(T)$ entrópia endomorfizmusra ugyanúgy az (1) és (4) képletekkel van értelmezve, mint automorfizmusra, csak ξ_T^n felbontáson a $\prod_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi$ felbontást kell érteni. Valódi endomorfizmus entrópiája mindig pozitív: $h(T)=0$ esetén T vagy automorfizmus, vagy automorfizmus mod 0. Ha T pontos endomorfizmus, a $h(T, \xi)$ függvény szigorúan pozitív. Endomorfizmus entrópiája egyenlő természetes kiterjesztésének entrópiájával.

Endomorfizmusokra legegyszerűbb példák a *Bernoulli endomorfizmusok.* Ugyanúgy vannak értelmezve, mint a *Bernoulli* automorfizmusok, csak az M tér az egy irányban végtelen $\{x_n\}$ sorozatokból áll. *Bernoulli* endomorfizmus természetes kiterjesztése *Bernoulli* automorfizmus lesz ugyanazon állapottérrel.

Másik példa a kétdimenziós tórus endomorfizmusai. Legyen ν az endomorfizmust ciklikus koordinátákban megadó egész számokból álló másodrendű mátrix determinánsa. Ha $|\nu| > 1$, az endomorfizmus pontos és entrópiája $\log|\nu|$ lesz.[2]

[2] Feltételezve, hogy mindkét sajátérték abszolút értékben nagyobb 1-nél. *(A fordító megjegyzése.)*

Harmadik példaként tekintsük a *számelméleti Gauss-féle endomorfizmust.* Legyen M a $[0, 1]$ intervallum irracionális számainak

$$\mu(X) = \frac{1}{\ln 2} \int\limits_X \frac{dx}{1+x}$$

mértékkel ellátott tere és T M-nek önmagára való a $Tx = \left(\frac{1}{x}\right)$ képlettel értelmezett leképezése, ahol (c) a c szám törtrésze. Ismeretes [18], hogy T metrikusan tranzitív endomorfizmusa az M térnek. Ha minden $x \in M$ számot lánctört előállításával helyettesítünk, az M tér átalakul a természetes számokból álló $(a_1, a_2, \ldots)$ sorozatok terévé, míg T eltolássá alakul át, mely az $(a_1, a_2, \ldots)$ sorozatot az $(a_2, a_3, \ldots)$ sorozatba viszi át. A mértéket, természetesen át kell vinni M sorozatainak a terébe. Hogy megkapjuk a T endomorfizmus természetes kiterjesztését, az egyoldalú $(a_1, a_2, \ldots)$ sorozatot kétoldalú $(\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$ sorozattal kell felcserélni. T pontos endomorfizmusnak bizonyul és entrópiája

$$h(T) = \frac{\pi^2}{6(\ln 2)^2}$$

lesz. Ez az összefüggés szoros kapcsolatban van a lánctörtek elméletében ismert azon tétellel, mely szerint az x szám n-edik közelítésében szereplő $q_n(x)$ nevezőre majdnem mindenütt igaz a

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{q_n(x)} = e^{\frac{\pi^2}{12 \ln 2}}$$

összefüggés.

10. §. FOLYAMATOK

Nyilvánvaló, hogy a folytonos $\{S_t\}$ folyamatot előállító S_t automorfizmusok bármelyikének $h(S_t)$ entrópiája metrikus invariánsa lesz a $\{S_t\}$ folyamatnak. Mi a kapcsolat ezen invariánsok között? Hogyan kell értelmezni magának az $\{S_t\}$ folyamatnak az entrópiáját?

Természetes az a feltevés, hogy a 4. 1 tétellel analóg

$$h(S_t) = |t| h(S_1) \tag{6}$$

összefüggés fennáll. Ha t racionális, ez az összefüggés a 4. 1 tételnek egyenesen következménye. Azonban irracionális t esetén a kérdés nem olyan egyszerű. KOLMOGOROV, aki először foglalkozott ezzel a problémával, a probléma megoldásáig az $\{S_t\}$ folyamat entrópiáját a következő képlettel értelmezte

$$h(\{S_t\}) = \sup \frac{h(S_t)}{t}, t > 0.$$

Bizonyos idő múlva ABRAMOV [19] bebizonyította, hogy a (6) összefüggés tetszőleges mérhető $\{S_t\}$ folyamatra igaz, tehát $h(\{S_t\}) = h(S_1)$. Azután PINSZKER bebizonyította a (6) összefüggést tetszőleges folytonos folyamatra (nem publikálta).

PINSZKER bizonyítása konstruktív, ABRAMOV bizonyítása a speciális folyamatok tanulmányozásának egyik részeredménye. ABRAMOV alapvető eredménye abban áll, hogy ha az $\{S_t\}$ speciális folyamat a T automorfizmus és az F függvény (1. 7 pont) alapján lett felépítve, akkor

$$h(S_t) = |t| \frac{h(T)}{\int\limits_L F d\lambda}.$$

Ennek a formulának sok alkalmazása van. Speciálisan belőle következik a (6) összefüggés először csak speciális folyamatokra, azután a mérhető folyamatoknak speciális folyamatokkal történő előállítására vonatkozó tétel (1. 7 pont) és a 4. 4 tétel alapján mérhető folyamatokra.

Tisztán folytonos spektrum esetén folyamatokra, ugyanúgy, mint automorfizmusokra, a spektrál izomorfiából nem következik az egy metrikus típushoz való tartozás: tetszőleges pozitív h-ra, $h=\infty$ értéket is beleértve, létezik olyan megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* spektrumú mérhető folyamat, melynek entrópiája h. A megfelelő példák már KOLMOGOROV első dolgozatában [1] szerepelnek. Ezek a példák elméleti valószínűségszámítási módszerekkel készültek, de lehetséges egyszerű izomorf előállításuk speciális folyamatokkal (minden esetben a T bázisautomorfizmus, *Bernoulli* automorfizmus, míg az F függvény konstans a 2. §-ban leírt ξ felbontás elemein). Entrópiájuk kiszámítását KOLMOGOROV kezdte el és SZINAJ fejezte be [14]. A *Kolmogorov—Szinaj*-féle összefüggések az ABRAMOV által később talált általános [7] formulának részei.

A folytonos $\{S_t\}$ folyamatot *Kolmogorov folyamatnak* („kvázireguláris" folyamatnak a *Kolmogorov*-féle terminológiában [1]) nevezzük, ha létezik az $\mathfrak{M}$ algebrának olyan $\mathfrak{S}$ részalgebrája, hogy

$$S_t\mathfrak{S} \subset S_{t'}\mathfrak{S} \text{ ha } t<t', \quad \bigvee_{-\infty<t<\infty} S_t\mathfrak{S} = \mathfrak{M}, \quad \bigcap_{-\infty<t<\infty} S_t\mathfrak{S} = \mathfrak{N}.$$

KOLMOGOROV [1] bebizonyította, hogy tetszőleges ilyen folyamat spektruma homogén *Lebesgue* típusú. SZINAJ [20] bebizonyította, hogy tetszőleges mérhető KOLMOGOROV folyamat spektruma megszámlálható multiplicitású. SZINAJ bizonyítása felhasználja mérhető folyamatoknak speciális folyamatokkal történő előállítását; folytonos folyamatokra nem alkalmas. *Kolmogorov* folyamat minden fokon keverés.

Bár a kváziregularitás fogalma a valószínűségszámításban vetődött fel, a *Kolmogorov*-féle automorfizmusok és folyamatok a topológikus algebrában és a dinamikus rendszerek klasszikus elméletében is előfordulnak. A legérdekesebb példa erre a *geodétikus folyamatok*. Legyen V^n teljes *Riemann* felület (a felső indexek a dimenziószámot jelölik) és M^{2n-1} a lineáris elemek halmaza, azaz az (a, e) pároké, ahol $a \in V^n$ míg e V^n a pontbeli érintőjének egységvektora. Minden (a, e) lineáris elemnek megfelel egy geodetikus vonal, mely V^n-en az a ponton keresztül e irányba halad és M^{2n-1}-ben a geodetikus folyamat az

$$S_t(a, e) = (a_t, e_t)$$

formulával van értelmezve, ahol (a_t, e_t) az a lineáris elem, mely (a, e)-ből adódik, ha egységnyi sebességgel mozgunk ezen geodetikus vonal mentén t ideig. M^{2n-1}-ben a μ invariáns mérték $d\mu = dm\,d\omega$ összefüggéssel van értelmezve, ahol dm a V^n-beli

n-dimenziós térfogatelem, míg $d\omega$ az $n-1$ dimenziós térfogatelem az érintővektorok egységgömbjén az adott pontban. A geodétikus folyamatok jelentősége abban áll, hogy tanulmányozásukhoz vezet a mechanika problémáinak széles osztálya. Spektrál tulajdonságaikat csak a legegyszerűbb esetben, negatív állandó görbületű V^n felületek esetén vizsgálták. HEDLUND [21] és HOPF [22] megmutatták, hogy negatív állandó görbületű kompakt felületeken a geodetikus folyamat ergodikus és elsőfokon keverés. GELFAND és FOMIN [23] bebizonyították, hogy spektruma *Lebesgue* típusú és hogy $n=2$ esetén ez a spektrum megszámlálható multiplicitású. (Ezeket az eredményeket 1951-ben kapták csoport reprezentációs módszerekkel.) SZINAJ [24] nemrég bebizonyította, hogy negatív állandó görbületű kompakt felületen tetszőleges geodétikus folyamat *Kolmogorov* folyamat, speciálisan spektruma megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* típusú és minden fokon keverés. Ugyanebben a [24] munkában kiszámítja ilyen folyamat entrópiáját. Következik a változó negatív görbületű kompakt felületeken a geodétikus folyamatok tanulmányozása. Nincs kizárva, hogy szintén *Kolmogorov* folyamatoknak bizonyulnak és hogy ily módon megkezdődik a klasszikus dinamikus rendszerek spektrálelméletének kialakítása. Mindeddig csupán az volt ismeretes, hogy a mindenütt negatív görbületű kompakt felület ($n=2$) geodétikus folyamata ergodikus (HOPF [22]). SZINAJ nemrég bebizonyította (nem publikálta), hogy ilyen folyamat spektrumának van megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* komponense.

11. §. ÚJ PROBLÉMÁK

11. 1. Az izomorfizmus problémája. Legyenek T és T' teljesen pozitív entrópiájú automorfizmusok; egy metrikus típusba tartoznak-e, ha $h(T) = h(T')$?

A kérdés még szűkebb értelemben is feltehető, például *Kolmogorov* automorfizmusokra Z-beli kialakítóval. De lehet, hogy kezdetben helyes teljesen speciális esetben, a *Bernoulli* automorfizmusokra felvetni. Itt bizonyos eredmények ismeretesek: L. D. MESALKIN [25] bebizonyította, hogy ha a T és T' automorfizmusok olyan $p_1, p_2, \ldots, p_r$ és $p_1', p_2', \ldots, p_r'$ számokkal vannak értelmezve (lásd 2. §), melyek egy és ugyanazon természetes szám negatív egész hatványai és $h(T) = h(T')$, akkor T és T' egy metrikus típusba tartoznak. Például az $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ és $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$ számokkal meghatározott *Bernoulli* automorfizmusok azonos metrikus típusba tartoznak.

11. 2. Bernoulli automorfizmusok. Bebizonyítható (nem publikált), hogy a véges entrópiájú T automorfizmus abban és csak abban az esetben *Bernoulli* automorfizmus, ha van oly $\xi \in Z$ kialakítója, melyre $H(\xi) = h(T)$.

Nincs kizárva, hogy tetszőleges *Kolmogorov* automorfizmus egyben *Bernoulli* automorfizmus. Igaz-e, hogy $\xi \in Z$ kialakító létezése esetén fennáll az

$$\inf H(\xi) = h(T)$$

egyenlőség, ahol az infimum az összes $\xi \in Z$ kialakítókra vonatkozik?

11. 3. Kialakítók (vö. 3. §). Van-e minden ergodikus automorfizmusnak kialakítója? Minden véges entrópiájú ergodikus automorfizmusnak van-e véges entrópiájú kialakítója? Hogyan lehet ezeket a problémákat *Kolmogorov* automorfizmusokra megoldani? Létezik-e $h(T) < \infty$ esetén legalább olyan $\xi \in Z$ felbontás, hogy $h(T, \xi) = h(T)$?

11. 4. Kolmogorov automorfizmusok és teljesen pozitív entrópiájú automorfizmusok (vö. 8. §). Tetszőleges, teljesen pozitív entrópiájú automorfizmus *Kolmogorov* automorfizmus-e? Egy *Kolmogorov* automorfizmus tetszőleges faktor automorfizmusa *Kolmogorov* automorfizmus-e? *Kolmogorov* automorfizmus inverze *Kolmogorov* automorfizmus-e?

Minden pozitív entrópiájú ergodikus automorfizmusnak van-e teljesen pozitív entrópiájú faktor automorfizmusa? Szétesik-e minden ergodikus automorfizmus egy teljes pozitív entrópiájú és egy null entrópiájú automorfizmus direkt szorzatára?

11. 5. Kompakt kommutatív csoportok automorfizmusai. Egy kompakt kommutatív csoport ergodikus automorfizmusa *Kolmogorov* automorfizmus-e? Teljesen pozitív entrópiájú-e? Vagy pozitív entrópiájú?

Részeredmények, természetesen vannak. Például SZINAJ bebizonyította (nem publikált), hogy a kétdimenziós tórus ergodikus automorfizmusa *Kolmogorov* automorfizmus.

Helyes lenne a véges dimenziós tórus ergodikus automorfizmusainak és endomorfizmusainak entrópiáját teljesen meghatározni (lásd 5. és 9. §§). Másik, reálisnak látszó feladat a kétdimenziós tórus ergodikus automorfizmusainak teljes metrikus osztályozásában áll. Az entrópia lesz-e itt az egyetlen invariáns? Ezek az automorfizmusok *Bernoulli* automorfizmusok lesznek-e?

11. 6. Megszámlálható multiplicitású Lebesgue spektrumú automorfizmusok tere. Jelölje $\mathfrak{L}$ a $[0, 1]$ intervallum azon automorfizmusainak terét, melyek spektruma megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* típusú, és vezessük be $\mathfrak{L}$-ben a

$$\varrho(S, T) = \inf \sigma(V) \tag{8}$$

metrikát, ahol az infimum az $L_2(M)$-en értelmezett összes V az $U_T = VU_sV^{-1}$ feltételnek elegettevő unitér operátorokra terjesztendő ki, miközben a σ függvény értelmezése

$$\sigma(V) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|Vf_k - f_k\|}{2^{k+1}},$$

ahol $f_1, f_2, \ldots$ valamilyen teljes, normált rendszer $L_2(M)$-ben. Ezen metrikában az $\mathfrak{L}$ tér teljes és szeparábilis.

Érdekes lenne megvizsgálni a null entrópiájú és a másodfokon keverő automorfizmusok osztályainak elhelyezkedését $\mathfrak{L}$-ben. Az első osztály, ezt nem nehéz megmutatni, G_δ. Mindenütt sűrű lesz-e? A második osztály első kategóriájú lesz-e?

A (8) metrika felhasználható tetszőleges spektrál típusú automorfizmusok tanulmányozására.

11. 7. A ferde szorzat entrópiája. Legyenek L és L' *Lebesgue* terek, S az L tér automorfizmusa és $\{S'_x\}$, $x \in L$ az L' tér automorfizmusainak egy mérhető serege (a mérhetőség azt jelenti, hogy az L térnek az $x \to S'_x$ leképezéssel az L' tér automorfizmusainak terébe történő leképezésénél a nyílt halmazok őspképei mérhetők). Az L és L' terek $M = L \times L'$ direkt szorzatán a T leképezést értelmezzük a

$$T(x, y) = (Sx, S'_x y)$$

összefüggéssel. Nem nehéz megmutatni, hogy T az M térnek automorfizmusa, vagy legalábbis automorfizmussá válik az S'_x automorfizmusok mindegyikének egy null mértékű halmazon (a neki megfelelő) való megfelelő megváltoztatásával. Ez az automorfizmus mod 0 egyértelműen meg van határozva és *S bázisú S'_x rétegződésű ferde szorzatnak* nevezzük.

A probléma a ferde szorzat entrópiájának a bázis és a réteg karakterisztikái alapján történő kiszámításában áll. Egyszerű példákon látható, hogy $h(T)$ értékét a $h(S)$ és $h(S'_x)$ értékek nem határozzák meg. Részeredmények ismeretesek: ha egyenes szorzatról van szó (azaz S'_x nem függ x-től), a 4. 2 tétel érvényes; ha S az azonosság leképezése, a 4. 4 tétel érvényes; ha az összes S'_x automorfizmusok eltolások a kör kerületén vagy valamilyen más kompakt kommutatív csoporton, akkor $h(T)=h(S)$ (ABRAMOV [19], [9]). Az általános esetben érdekes becslések adódnak (ABRAMOV [9]), de pontos formula még nem ismeretes.[1]

Bár mostanáig a ferde szorzatokat főleg példák készítésére használták, ennél nagyobb jelentőségűek bizonyos értelemben: bármilyen legyen is az ergodikus T automorfizmus és bármilyen legyen a T-re nézve invariáns ζ felbontás, a T automorfizmus felbontható ferde szorzat alakba, melynek bázisául a T_ξ faktorautomorfizmus szolgál (lásd 4. §). Hogy ilyen felbontást kapjunk, az M teret az M/ζ faktortér és valamilyen L' *Lebesgue* tér direkt szorzataként kell előállítani és legyen

$$L=M/\xi, \quad S=T_\xi, \quad S'_x=P_{Sx}TP_x^{-1} \quad (x\in L),$$

ahol P_x az $x\times L'$ rétegnek a $P_x(x, y)=y$ által meghatározott természetes vetülete L'-re. Az $M=M/\zeta\times L'$ felbontás létezése következik a mérhető felbontások elméleten ismert a független kiegészítő létezésére vonatkozó általános tételből (lásd [8], hogy ennek a tételnek a feltételei teljesülnek, következik a ζ felbontás invariáns voltából és a T automorfizmus ergodikusságából). Ily módon a ferde szorzat entrópiájának kiszámítására szolgáló formula a 4. 3 tétel élesítése lenne.

11. 9. Egy egyenlőtlenség. Igaz-e, felcserélhető T, S automorfizmusokra a $h(ST)= = h(S)+h(T)$ egyenlőtlenség?

Hasonló egyenlőtlenség nem lehet igaz *tetszőleges* S, T automorfizmusokra. Valóban, mivel a null entrópiájú automorfizmusok $\mathfrak{A}$-ban egy mindenütt sűrű G_δ-át alkotnak, tetszőleges automorfizmus két null entrópiájú automorfizmus szorzata.

11. 9. Folyamat entrópiája és spektruma. Kívánatos lenne olyan direkt bizonyítást találni a *Kolmogorov* folyamat spektrumának megszámlálható multiplicitására, mely használható folytonos folyamatokra is (lásd 10. §).

Ezzel kapcsolatos egy másik probléma: van-e minden pozitív entrópiájú folyamatnak a spektrumában megszámlálható multiplicitású *Lebesgue* komponens?

11. 10. Speciális folyamatok. Konkrét speciális folyamatok tulajdonságainak a tanulmányozása jelentős nehézségekkel jár. Ezért kívánatos lenne olyan eléggé tág feltételeket találni, melyeket a T automorfizmustól és az F függvénytől kell megkövetelni, hogy az általunk szerkesztett speciális folyamat *Kolmogorov* folyamat legyen.

[1] *Megjegyzés a korrektúránál.* Jelenleg ez a probléma teljesen megoldott.

AZ IDÉZETT IRODALOM

[1] А. Н. Колмогоров, Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространства Лебега, Д.А.Н. **119** (1958), 861—864.

[2] А. Н. Колмогоров, Об энтропии на единицу времени; как метрическом инварианте автоморфизмов, У.А.Н. **124** (1959), 754—755.

[3] Л. М. Абрамов и Я. Г. Синай, О семинаре В. А. Рохлина по метрической теории динамических систем, У.М.Н. **14**, вып. 6 (1959), 223—225.

[4] E. Hopf, *Ergodentheorie*, Berlin, 1937.

[5] В. А. Рохлин, Избранные вопросы метрической теории динамических систем, У.М.Н. **4**, вып. 2 (1949), 57—128.

[6] P. R. Halmos, *Lectureson ergodic theory*, Tokyo, 1956.

[7] В. А. Рохлин и С. В. Фомин, Спектральная теория динамических систем, Труды третьего всесоюзного математического съезда, том 3, М., 1958, 284—292.

[8] В. А. Рохлин, Об основных понятиях теории меры, Матем. сб. **25** (**67**): 1 (1949) 107—150.

[9] Л. М. Абрамов, Некоторые вопросы метрической теории динамических систем (диссертация) М.Г.У. (1960).

[10] И. В. Гирсанов, О спектрах динамических систем, порождаемых стационарными гауссовскими процессами, Д.А.Н. **119** (1958), 851—853.

[11] Я. Г. Синай, О понятии энтропии динамической системы, Д.А.Н. **124** (1959), 768—771.

[12] Л. М. Абрамов, Энтропия производного автоморфизма, Д.А.Н. **124** (1959), 647—650.

[13] В. А. Рохлин, Об энтропии метрического автоморфизма, Д.А.Н. **124** (1959), 980—983.

[14] Я. Г. Синай, О потоках с конечной энтропией, Д.А.Н. **125** (1959), 1200—1202.

[15] Л. М. Абрамов, Энтропия автоморфизма соленоидальной группы, Теория вероятн. и её прим., **4** (1959), 249—254.

[16] В. А. Рохлин, Точные ендоморфизмы пространства Лебега, Изв. Ан (1960).

[17] М. С. Пинскер, Понятие регулярности случайных процессов, Теория вероятн. и её прим., **4** (1959), 475—476.

[18] Ryll—Nardsewski, On the ergodic theorems, II., *Studia Math.* **12** (1951), 74—79.

[19] Л. М. Абрамов, Об энтропии потока, Д.А.Н, **128** (1959), 873—876.

[20] Я. Г. Синай, Динамические системы и стационарные процессы, Теория вероятн. и её прим., **5** (1960).

[21] G. A. Hedlung, The dynamics of geodesic flows, *Bull. Amer. Math. Soc.* **45** (1939), 241—246.

[22] E. Hopf, Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung, *Ber. Verh. Säch. Akad. Wiss.*, Leipzig, **91** (1939), 261—304.

[23] И. М. Гельфанд и С. В. Фомин, Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны, У.М.Н. **7**, вып. 1 (1952), 118—137.

[24] Я. Г. Синай, Геодезические потоки на многообразиях отрицательной постоянной кривизны, Д.А.Н. (1960).

[25] Л. Д. Мешалкин, Один случай изоморфизма схем Бернулли, Д.А.Н. **128** (1959), 41—44.

Fordította: Arató Mátyás

KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEKRŐL (I)*

Írta: A. SZ. KRONROD

Bevezetés

A két- és többváltozós valós függvények elméletének elég kiterjedt irodalma van. Véleményem szerint azonban az ebben az irányban elért nagyszámú és gyakran igen mély eredmény mégsem képez természetes elméletet. A jelen cikk egy a kétváltozós valós függvények geometriai elméletébe való bevezetés vázlata.

Vizsgálatunk tárgyai a kétváltozós függvények, de éppen nem mint *két* változó, x és y, függvényei, hanem mint valamely kétdimenziós tartomány pontjaiban megadott függvények. Ezzel kapcsolatban a bevezetendő fogalmaknak — lineáris és síkbeli variáció, lineáris integrál, a monotonitás fogalma stb. — úgy kell felépülniük, hogy ne függjenek a koordinátarendszer véletlen megválasztásától.

A tanulmányozás során kiderül, hogy a kétváltozós függvények tulajdonságai élesen széthasadnak. Közülük egyesek kisebb-nagyobb mértékben invariánsnak bizonyulnak az értelmezési tartomány önmagába való homeomorf transzformációival szemben; ezek a tulajdonságok közel állnak az egyváltozós függvények tulajdonságaihoz. Különösen világosan mutatkozik meg a kétváltozós függvények bizonyos tulajdonságainak „egydimenzióssága" azokban az eredményekben, amelyeket az I. fejezet 2. §-ában ismertetünk. Kiderül, hogy minden függvénnyel kapcsolatban van egy egydimenziós kontinuum, a függvény egydimenziós fája. A függvény számos tulajdonságának vizsgálata visszavezethető az egydimenziós fán értelmezett megfelelő függvény tulajdonságainak vizsgálatára.

A kétváltozós függvények más tulajdonságai, ellenkezőleg, határozottan „kétdimenziósak". Lényegében ilyen tulajdonságokat tanulmányozunk a III. fejezetben. Végül kiderül, hogy vannak olyan fogalmak is, amelyek a függvények „egydimenziós" és „kétdimenziós" tulajdonságaitól is függnek. Ilyen például az a tétel, amely a korlátos síkbeli és lineáris variációjú függvények teljes differenciáljának majdnem mindenütt való létezéséről szól. Bizonyos mértékig ilyen közbenső helyzetet foglalnak el a IV. fejezet eredményei is.

Az első fejezet — „Nívóhalmazok" — célja annak az apparátusnak a megalkotása, amelynek segítségével a kétváltozós függvényeket tanulmányozni fogjuk.

A második fejezetet — „Lineáris variáció" — a kétváltozós függvények „egydimenziós" tulajdonságainak szenteljük; a lineáris variáció itt megalkotott fogalma majdnem azonos az egyváltozós függvény — pontosabban az egydimenziós kontinuumon értelmezett függvény — variációjának fogalmával.

* Успехи математических наук, Том V, выпуск 1 (35), 24—134. A magyar nyelvű fordítás több részletben jelenik meg. Ez az (I) rész az eredeti cikk I. fejezete 1—2. §-át, valamint a FÜGGELÉK-et és az irodalomjegyzéket tartalmazza.

A harmadik fejezetben — „Síkbeli variáció" — a függvények „kétdimenziós" tulajdonságait tanulmányozzuk. Itt megalkotjuk a kétdimenziós tartományon értelmezett $F(\eta)$ függvény síkbeli $W(F)$ variációjának fogalmát. A síkbeli variáció korlátossága ekvivalensnek bizonyul az ismert *Tonelli-féle variáció* korlátosságával. Az utóbbi variáció-fogalom azonban nem tesz eleget annak a legfontosabb követelménynek, amely nézetem szerint a geometriában minden fogalommal szemben természetes módon támasztható: a Tonelli-féle variáció *lényegesen függ* a derékszögű koordinátarendszer megválasztásától. Éppen ezért a *Tonelli-féle* variációra elvileg nem nyerhetők olyanfajta tételek, mint a síkbeli variáció egyenlősége a gradiens abszolút értékének integráljával (abszolút folytonos függvényeknél).

A *Tonelli-féle* variáció-fogalom nem-geometriai voltának egy mélyebb következménye abban áll, hogy nem alkalmazható felületi függvényekre, ahol a síkbeli variáció alkalmas segédeszköz például a felszín fogalmának vizsgálatára. Az alkalmazások szempontjából valószínűleg a III. fejezet a legfontosabb.

A negyedik fejezet — „Lineáris integrál" — kissé különleges helyzetet foglal el. Itt vezetjük be kétváltozós függvény deriváltjának, primitív függvényének és „ponttól pontig vett" integráljának fogalmát. E fogalmak bevezetését a szerző szükségesnek véli és a kapott eredmények ezt bizonyos mértékben igazolják. De míg a síkbeli és a lineáris variáció konstrukciója számos okból véglegesnek látszik, a lineáris integrál konstrukciójával a dolog másként áll. Mégis az a körülmény, hogy ennek a nem tökéletes konstrukciónak a segítségével néhány természetes és eddig fel nem fedezett összefüggést lehetett kapni, arra késztetett, hogy bevegyem ezt a fejezetet, igaz, kissé vázlatos formában.

A szerző seholsem törekedett maximális általánosságra, feláldozva azt a szemléletesség érdekében. A figyelmes olvasó a cikk majdnem minden eredményét át fogja tudni vinni olyan függvényekre, amelyek például egy irányítható, folytonosan differenciálható, nem határolt kétdimenziós sokaságon vannak értelmezve (az I., II. és III. fejezet eredményeit pedig határolt sokaságok esetére is). Továbbá az eredmények nagyrésze automatikusan átvihető n-változós függvények esetére is. Itt azonban $n>2$ esetén természetes és szükségszerű módon fellépnek a „k-dimenziós" karakterisztikák ($k=1, 2, \dots, n$), amelyeket $k\neq 1$; n mellett én nem tudok eléggé geometriai módon megszerkeszteni, és ezért az $n=2$ esetre szorítkoztam.

A nívóhalmaznak mint a függvényvizsgálat eszközének fogalma felhasználásra került már G. M. Adelszon—Velszkijjel közösen írt [1] munkáinkban, amelyek a monogén függvények analitikus voltának *direkt* bizonyításával foglalkoznak. (Az utóbbi problémát N. N. Luzin vetette fel.) Éppen ezek a munkák vezettek el engem a többváltozós függvények önmagukban való tanulmányozásához. A többváltozós függvények elmélete terén végzett munkásságomra, amely ennek a cikknek a megírására vezetett, sokan gyakoroltak hatást. Bár nincs lehetőségem arra, hogy mindnyájukat felsoroljam, mégis felhasználom az alkalmat és mély hálámat fejezem ki N. N. Luzinnak, A. N. Kolmogorovnak, Sz. L. Szoboljevnek, I. M. Gelfandnak és D. E. Menysovnak értékes tanácsaikért és útmutatásaikért. Továbbá őszintén hálás vagyok a többváltozós függvények tanával foglalkozó szeminárium résztvevőinek, különösen E. V. Glivenkónak, R. Sz. Gutyernak, A. Ja. Dubovickijnek, Sz. A. Plotnyikovajának, A. F. Filippovnak és Sz. V. Jablonszkijnak, akikkel folytatott beszélgetéseim lényeges haszonnal jártak számomra.

Végül egészen külön kell rámutatnom E. M. Langyisz szerepére. E. M. Langyisz, aki állandóan figyelemmel kísérte munkám minden részletét, az egész idő

alatt jelentős befolyást gyakorolt magára a mű irányára is tanácsaival, felfogásával és elképzeléseivel.

A cikkben felhasználásra kerül az elemi topológia számos fogalma. Az olvasó ezeket megismerheti P. Sz. ALEKSZANDROV [2] és HAUSDORFF [3] könyvéből. A szükséges topológiai fogalmak és eredmények összeállítása megtalálható a jelen bevezetést követő Függelékben*, magában a szövegben pedig hivatkozunk erre a függelékre. (A Függelék definíciói és tételei latin, a segédtételek görög betükkel vannak jelölve.)

Az egész cikk folyamán (az I. fejezet 2. §-a kivételével) az egyedüli előforduló ponthalmazok a négyzet vagy a kétdimenziós gömbfelület pontjaiból álló halmazok. A továbbiakban gyakran nem fogjuk külön megemlíteni ezt a körülményt. A zárt négyzetet vagy a kétdimenziós gömbfelületet mindig J-vel fogjuk jelölni. Két ponthalmaz, M és N egymástól való távolságát mindenütt $\varrho(M, N)$ vagy $|M, N|$ jelöli. Speciálisan ha ξ és ζ két pont, akkor $\varrho(\xi, \zeta) = |\xi, \zeta|$ a köztük mért távolságot jelenti. Az E halmaz kiegészítő halmazát CE-vel, E lezárását pedig $\bar{E}$-sal jelöljük. $[\xi, \zeta]$ a ξ, ζ pontokat összekötő zárt egyenesszakasz, illetve főkörív aszerint, amint J négyzet vagy gömbfelület.

$\overline{lt}_n E_n$ és $\underline{lt}_n E_n$ az $\{E_n\}$ halmazsorozat topológiai limes superiorát és limes inferiorát jelenti (lásd az F definíciót a Függelékben).

FÜGGELÉK*

Néhány topológiai segédeszköz

A továbbiakban, mint mindig, J a kétdimenziós gömbfelületet vagy az egységnégyzetet jelöli. Ha a definíciókban, segédtételekben és tételekben a tér jellegéről nincs említés, akkor kompaktumokról van szó.

A definíció. Az R tér E halmazát *összefüggőnek* nevezzük, ha nem bontható fel két olyan E_1, E_2 halmazra, hogy

$$\bar{E}_1 \cap E_2 = 0 \quad \text{és} \quad E_1 \cap \bar{E}_2 = 0.$$

B definíció. Összefüggő kompaktum neve *kontinuum.*

C definíció. Nyílt összefüggő halmaz neve *tartomány.*

α SEGÉDTÉTEL. *Összefüggő halmaz lezárása összefüggő.*

β SEGÉDTÉTEL. *Ha valamely összefüggő halmaz mindegyik pontját befedi egy tartomány, akkor e tartományok összege összefüggő.*

D definíció. Az E halmaz a pontot tartalmazó *komponensének* nevezzük az a pontot tartalmazó *legnagyobb összefüggő* $\mathscr{E}_a \subset E$ *részhalmazt.*

γ SEGÉDTÉTEL. *Bármely E halmaz és $a \in E$ pont esetén található az a pontot tartalmazó $\mathscr{E}_a \subset E$ komponens. Az $\mathscr{E}_a$ komponens egyenlő az E halmaz a pontot tartalmazó összes összefüggő részhalmazainak egyesítésével.*

* Az eredeti cikktől eltérően, a FÜGGELÉK-et a BEVEZETÉS után közöljük. *(Szerk.)*

δ SEGÉDTÉTEL. *Zárt halmaz komponense zárt halmaz.*

E definíció. Az E halmaz *elválasztja* az A, B halmazokat (speciálisan: az a, b pontokat), ha tetszés szerinti, az A, B halmazokat metsző K kontinuumra az $E \cap K$ metszet nem üres.

ε SEGÉDTÉTEL. *Ha az $E \subset J$ zárt halmaz nem választja el az a, b pontokat, akkor található az a pontot b-vel összekötő és az E halmazt nem metsző poligon* (gömbfelület esetén a „poligon" főkörívekből áll).

F definíció. Legyen $\{E_n\}$ halmazokból álló sorozat. A sorozat *topológiai limes inferiorának* nevezzük és az $\underline{\mathrm{lt}}_n E_n$ jellel jelöljük azon a pontok halmazát, amelyeknek bármely $U \ni a$ környezete minden E_n halmazt metsz, kivéve legfeljebb véges számút. A sorozat *topológiai limes superiorának* nevezzük és az $\overline{\mathrm{lt}}_n E_n$ jellel jelöljük azon pontok halmazát, amelyeknek bármely környezete végtelen sok E_n halmazt metsz.

ζ SEGÉDTÉTEL. *Bármely halmazsorozat topológiai limes superiora és limes inferiora zárt halmaz.*

A TÉTEL (ZORETTI). *Ha egy J-beli összefüggő halmazokból álló $\{E_n\}$ sorozat $\underline{\mathrm{lt}}_n E_n$ topológiai limes inferiora nem üres, akkor az $\overline{\mathrm{lt}}_n E_n$ topológiai limes superior összefüggő.*

B TÉTEL (JANISZEWSKI). *Legyen G valamely tartomány és K olyan kontinuum, amely G-t is, CG-t is metszi. Akkor a $K \cap G$ metszet mindegyik komponensének a lezárása metszi G határát.*

C TÉTEL. *Ha $G \subset J$ egy tartomány és $a \notin G$ valamely pont J-ben, akkor G határának van olyan L komponense, amely elválasztja a-t és a G halmaz tetszés szerinti pontját. Ez az L komponens egyértelműen meghatározott.*

Megjegyezzük, hogy a C tétel már a tóruszon nem igaz.

B′ TÉTEL. *Legyen $G \subset J$ olyan tartomány, amely elválasztja a CG halmaz a és b pontját, L_a és L_b pedig G határának olyan komponensei, amelyek G-t elválasztják az a, illetve a b ponttól. Legyen K az a, b pontokat tartalmazó kontinuum. Akkor $K \cap G$ tartalmaz legalább egy komponenst, amelynek lezárása L_a-t is, L_b-t is metszi.*

D TÉTEL. *Ha a $\{K_n\}$ sorozat mindegyik tagja olyan J-beli halmaz, amely elválasztja az a, b pontokat, akkor a $K = \overline{\mathrm{lt}}_n K_n$ halmaz is elválasztja a-t és b-t.*

E TÉTEL. *Ha az $F \subset J$ zárt halmaz elválasztja az a, b pontokat, akkor F-nek van olyan F_1 komponense, amely szintén elválasztja a-t és b-t.*

Nyilvánvaló, hogy ez a tétel sem igaz már a tóruszon sem.
Szükségünk lesz az E tételt általánosító F tételre.

F TÉTEL. *Legyen $E \subset J$ zárt halmaz és K, L ennek két különböző komponense. Akkor vagy $E - K - L$ nem választja el a K, L komponenseket, vagy található az E halmaznak K-tól és L-től különböző és őket elválasztó S komponense.*

BIZONYÍTÁS: 1°. Legyen F zárt halmaz és K az F halmaz valamely komponense. Tetszés szerinti $\delta > 0$ számhoz található olyan $\delta_1 > 0$, hogy az F halmaz δ_1-környezetének K-t tartalmazó komponense a K halmaz δ-környezetében fekszik. Ez az A tételből következik.

2°. Most legyen K és L az E halmaz két olyan komponense, amelyet E-nek egyetlen, K-tól és L-től különböző komponense sem választ el. Legyen $\delta_1 > \delta_2 > \ldots$, $\lim_n \delta_n = 0$ és $\delta_1 < \frac{1}{2}\varrho(K, L)$. Legyenek a $\delta_1' > \delta_2' > \ldots$ számok olyanok, hogy U_n, ill. V_n — az E halmaz δ_n'-környezetének K-t, ill. L-et tartalmazó komponense — K, ill. L δ_n-környezetében fekszik. Legyen B_n és C_n $(n=2, 3, \ldots)$ rendre U_n és V_n határának az U_n halmazt B_{n-1}-től, illetve a V_n halmazt C_{n-1}-től elválasztó komponense, és $C_1 = B_1$ az U_1 halmaz határának U_2-t L-től elválasztó komponense. Akkor $B_n \cap E = 0$ és $C_n \cap E = 0$. Ha E elválasztja a B_n, B_{n+1}, vagy a C_n, C_{n+1} halmazokat, akkor E valamelyik, K-tól és L-től különböző komponense az E tétel szerint elválasztja az U_{n+1}, V_{n+1} halmazokat és ennélfogva elválasztja K-t és L-et is. Ellenkező esetben találhatók a B_n halmazt B_{n+1}-gyel, illetve a C_n halmazt C_{n+1}-gyel összekötő L_n, L_n' poligonok, amelyekre $L_n \cap E = 0$, $L_n' \cap E = 0$. Legyen L_n^* az L_n poligonnak a B_n halmazzal való utolsó metszésponttól a B_{n+1} halmazzal való első metszéspontig terjedő szakasza. Az $L_n'^*$ szakaszokat analóg módon képezzük. Akkor az $R = \sum_n L_n^* + \sum_n L_n'^* + \sum_n B_n + \sum_n C_n + K + L$ halmaz kontinuum; $R \cap (E - K - L) = 0$; és $R \supset K + L$.

G TÉTEL. *Tegyük fel, hogy az egymást nem metsző K, L kontinuumok elválasztják a J-beli a és b pontot. Akkor vagy K elválasztja az a pontot L minden pontjától, vagy K elválasztja a b pontot L minden pontjától. Az első esetben L elválasztja b-t K minden pontjától és $\varrho(a, K) < \varrho(a, L)$, a másodikban pedig a-t választja el K minden pontjától és $\varrho(b, K) < \varrho(b, L)$.*

H TÉTEL. *Ha a K kontinuum nem választja szét J-t, akkor bármely $U(K)$ környezetéhez található olyan $V(K)$ környezet, hogy $\overline{V(K)} \subset U(K)$ és $\overline{V(K)}$ szintén nem választja szét J-t.*

J TÉTEL. *Legyen $U \subset J$ valamely tartomány, ξ és λ pedig U határának két pontja. Ha ξ és λ az U halmaz kiegészítő halmazának ugyanahhoz a komponenséhez tartozik, akkor ξ és λ az U halmaz határának is ugyanahhoz a komponenséhez tartozik.*

J definíció. Szakasz homeomorf képét egyszerű ívnek nevezzük.

K definíció. A K kontinuum α pontját lokális összefüggési pontnak nevezzük, ha bármely $U(\alpha)$ környezetéhez található olyan $V(\alpha)$ környezet, hogy $\overline{V(\alpha)} \cap K$ az $U(\alpha) \cap K$ metszet egyetlen komponensében fekszik. Ellenkező esetben α lokális össze nem függési pont. Ha egy kontinuum csupa lokális összefüggési pontból áll, akkor lokálisan összefüggőnek nevezzük.

K TÉTEL. *Folytonos leképezésnél zárt (nyílt) halmaz teljes inverz képe zárt (nyílt) halmaz.*

L TÉTEL. *Lokálisan összefüggő kontinuum folytonos képe lokálisan összefüggő kontinuum.*

M TÉTEL. *Legyen τ az S kompaktumnak a T kontinuumra való folytonos leképezése. Ha mindegyik $l \in T$ pont teljes inverz képe összefüggő, akkor S kontinuum.*

I. fejezet

NÍVÓHALMAZOK

1. §. Folytonos függvény nívóhalmazainak szerkezete

A függvény *nívóhalmazának* fogalma egész ismertetésünk során alapvető szerepet játszik. Éppen ezért a folytonos függvények nívóhalmazai szerkezetének részletes tanulmányozásával kezdjük. Ebben az irányban az alapvető eredményeket az 1 – 3. tételekben mondjuk ki. Helyénvalónak találtuk azonban, hogy néhány segédtételt (például a 9 – 12. segédtételeket) is felvegyünk ebbe a paragrafusba, minthogy kisegítő jellegük ellenére a nívóhalmazok általános tulajdonságaival foglalkoznak. Mint már említettük, a függvények értelmezési tartományának a kétdimenziós gömbfelületet vagy a négyzetet választottuk. Megjegyezzük, hogy ez az erős megszorítás nem lényeges és csak az előadásmód egyszerűsége kedvéért vezettük be.

1. definíció. Legyen $F(\eta)$ a J tartományban értelmezett függvény. Az $F(\eta)$ függvény E_t *nívóhalmazának* nevezzük mindazon $\xi \in J$ pontok halmazát, amelyekben $F(\xi)=t$.

Az „E_t nívóhalmaz” szavak helyett rövidség kedvéért néha a „t nívó” kifejezést fogjuk használni.

Az E_t nívóhalmaz K komponense a topológiában szokásos módon értendő (lásd a D definíciót). Néha rövidség kedvéért „az E_t nívóhalmaz komponense” helyett azt fogjuk írni, hogy „a t nívó komponense”, vagy egyszerűen azt, hogy „komponens”.

Ha $F(\eta)$ folytonos függvény, akkor a hozzá tartozó E_t nívóhalmazok (és egyúttal a δ segédtétel szerint a nívóhalmazok komponensei is) páronkint közös pont nélküli zárt halmazok.

Nem tudunk megadni semmi más tulajdonságot, amellyel minden folytonos függvény valamennyi nívóhalmaza rendelkezne, a zártságon kívül. Valóban, bármely $D \subset J$ zárt halmazhoz minden különösebb fáradság nélkül szerkeszthető olyan folytonos $F(\eta)$ függvény, amelynek D az egyik nívóhalmaza. Megfelel például az $F(\eta) = \varrho(\eta, D)$ választás.

Találhatunk azonban olyan tulajdonságokat, amelyek igazak, mondjuk, megszámlálhatóan sok t érték kivételével vagy nulla mértékű halmazt alkotó t értékek kivételével minden E_t nívóhalmazra. Ilyenkor azt fogjuk mondani, hogy az adott tulajdonság fennáll megszámlálhatóan sok kivétellel minden nívóra, illetve majdnem minden nívóra. Az ilyen tulajdonságokat *tipikusaknak* fogjuk mondani.

2. definíció. Az E_t nívóhalmaz K komponensét *regulárisnak* nevezzük, ha a J értelmezési tartományt két részre választja szét.

Következésképpen valamely nem reguláris komponens vagy kettőnél több részre választja szét, vagy egyáltalán nem választja szét J-t.

1. SEGÉDTÉTEL. *Tegyük fel, hogy a $\{K_\alpha\}$ rendszerben szereplő mindegyik kontinuum legalább három tartományra választja szét a J négyzetet. Ha a K_α kontinuumok páronkint nem metszik egymást, akkor legfeljebb megszámlálhatóan sokan lehetnek.*

BIZONYÍTÁS: Rendeljünk hozzá mindegyik K_α-hoz egy csupa racionális koordinátákkal rendelkező pontokból álló a, b, c ponthármast, amelynek elemeit K_α páronkint elválasztja J-ben. Ha a K_α kontinuumok rendszere nem lenne megszámlálható, akkor található lenne két kontinuum, $K = K_\alpha$ és $L = K_\beta$, amelyekhez ugyanazt az a, b, c ponthármast rendeltük (megszámlálhatónál több ilyen kontinuum is található lenne). Megmutatjuk, hogy K és L metszi egymást. Valóban, jelentse a', b' és c' a $K+L$ összeg azon pontjait, amelyek a-hoz, b-hez és c-hez rendre a legközelebb vannak. (Ha ilyen pontokból nem egy van, válasszuk bármelyiket.) Az a', b', c' pontok közül valamelyik kettő K-hoz tartozik, vagy valamelyik kettő L-hez tartozik. Meghatározottság kedvéért legyen $a' \in K$ és $b' \in K$. Ekkor az az R kontinuum, amely K-ból és az $[a, a']$, $[b, b']$ szakaszokból áll, nyilvánvalóan tartalmazza az a, b pontokat és ezért metszi L-et, minthogy L szétválasztja a-t és b-t. De az $[a, a']$, $[b, b']$ szakaszok nem metszik az L kontinuumot, tehát K és L metszi egymást. A segédtételt bebizonyítottuk.

Abban az esetben, amikor J gömb, a bizonyítás analóg módon történik.

Az 1. segédtétel értelmében az összes nívóhalmaz összes olyan komponenseinek, amelyek J-t kettőnél több tartományra választják szét, száma legfeljebb megszámlálhatóan végtelen (ugyanis magától értetődik, hogy ugyanazon nívó komponensei, és még inkább a különböző nívóhalmazok komponensei nem metszik egymást). Ebből következik, hogy annál inkább legfeljebb megszámlálhatóan végtelen azoknak a nívóknak az összessége, amelyeknek van ilyen „nyolcas típusú" komponensük. Ily módon *a tipikus nem reguláris komponensek nem választják szét a J értelmezési tartományt.* Viszont vannak olyan folytonos függvények, amelyek mindegyik nívón tartalmaznak szét nem választó komponenst.

Osztályozni fogjuk a nívóhalmazok nem szétválasztó komponenseit. Ehhez szükségünk lesz a következő segédtételre.

2. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény és K az E_t nívóhalmaz egyik komponense. Legyen U a K komponens valamely környezete. A K komponensnek található olyan V környezete, hogy bármely nívóhalmaznak bármely olyan komponense, amely metszi $\overline{V}$-t, teljesen benne van U-ban.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy van olyan a $\{t_n\}$ nívósorozathoz tartozó $\{K_n\}$ komponens-sorozat, amelyre $\varrho(K, K_n) \to 0$ ha $n \to \infty$ és $K_n \cap CU \neq 0$. J kompaktsága miatt kiválasztható a komponensek olyan K_{s_n} részsorozata, amelyre $\underline{\mathrm{lt}}_n K_{s_n} \neq 0$. Ekkor az A tétel szerint az $M = \overline{\mathrm{lt}}_n K_{s_n}$ halmaz kontinuum. Nyilvánvaló, hogy $M \cap K \neq 0$ és $M \cap CU \neq 0$. Végül az $F(\eta)$ függvény M mindegyik pontjában t-vel egyenlő, mert folytonos. Tehát az M kontinuum teljesen benne van E_t-ben, és így az M-et tartalmazó komponens K. De $M \cap CU \neq 0$, következésképpen $K \cap CU \neq 0$, ez pedig ellentmond annak a feltevésnek, hogy U a K környezete.

3. definíció. Legyen $K \subset E_t$ az E_t nívóhalmaz olyan komponense, amely nem választja szét J-t. Akkor:

1. Tegyük fel, hogy a K komponens bármely U környezetéhez található a t nívónak olyan K' komponense, amely U-ban fekszik és K-t CU minden pontjától elválasztja. Ebben az esetben a K komponenst *koncentrikus szingularitású* komponensnek nevezzük.

2. Tegyük fel, hogy van olyan L kontinuum, amely metszi K-t, de nem metszi az $E_t - K$ halmazt, továbbá L nincs benne teljesen K-ban. Ekkor azt mondjuk, hogy K *fél-extrémumot szolgáltató* komponens, mégpedig:

a) Ha $\eta \in L$ esetén $F(\eta) \geqq t$, akkor K *félminimumot szolgáltató* komponens.

b) Ha $\eta \in L$ esetén $F(\eta) \leqq t$, akkor K *félmaximumot szolgáltató* komponens.

1. TÉTEL. *Minden nem szétválasztó komponens vagy* 1. *konventrikus szingularitású, vagy* 2. *félmaximumot szolgáltató, vagy* 3. *félminimumot szolgáltató komponens, és az* 1, 2, 3. *esetek kölcsönösen kizárják egymást.*

BIZONYÍTÁS: Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy az 1. és 2. eset kölcsönösen kizárja egymást. Valóban, legyen K fél-extrémumot szolgáltató komponens és L az a kontinuum, amelyről a 3. definícióban szó van. Minthogy L nem tartozik teljesen K-hoz, van olyan a pont, amelyre $a \in L \cap CK$. K zárt halmaz, így $\varrho(a, K) > \delta > 0$. Tekintsük a K komponens δ-környezetét, U-t. Legyen $K' \subset U$ a t nívó olyan komponense, amely K-t elválasztja CU-tól. De $a \in CU$ és L kontinuum. Ezért a B' tétel szerint $L \cap K' \neq 0$ szemben a feltevéssel. Tehát 1. és 2. (és hasonlóan 1. és 3.) kizárja egymást. Megmutatjuk, hogy a 2, 3. esetek szintén kölcsönösen kizárják egymást. Valóban, tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben található két kontinuum, L_1 és L_2, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a) L_1 és L_2 metszi a J-t nem szétválasztó $K \subset E_t$ komponenst;

b) egyikük sem fekszik teljesen K-ban;

c) sem L_1, sem L_2 nem metszi az $E_t - K$ halmazt, és végül

d) $F(\eta) \geqq t$, ha $\eta \in L_1$, $F(\eta) \leqq t$, ha $\eta \in L_2$.

Feltételeinkből következik, hogy találhatók olyan ξ_1, ξ_2 pontok, amelyekre $\xi_1 \in L_1 - K$, $\xi_2 \in L_2 - K$, és így $F(\xi_1) > t$, $F(\xi_2) < t$. A ξ_1, ξ_2 pontokat az E_t zárt halmaz, tehát (lásd az E tételt) E_t valamely komponense is elválasztja. De ez a komponens csak K lehet, mert az $L_1 + L_2 + K$ kontinuum E_t egyetlen más komponensét sem metszi és tartalmazza a ξ_1, ξ_2 pontokat. Ilyen módon ellentmondásra jutottunk, ugyanis K nem szétválasztó komponens.

Tehát az 1., 2., 3. esetek kölcsönösen kizárják egymást. Megmutatjuk, hogy a lehetőségek ezzel kimerülnek. Legyen K a t nívó valamely nem szétválasztó és nem koncentrikus szingularitású komponense, U pedig K-nak oly kicsiny környezete, hogy nincs olyan $K' \subset E_t$ komponens, amely U-ban fekszik és elválasztja K-t és CU-t. Legyen $V \subset U$ K-nak olyan környezete, amelyre CV összefüggő halmaz. A H tétel értelmében ilyen környezet létezik. Legyen $D = E_t + CV$. Jelentse K^* és R a zárt D halmaz K-t, illetve CV-t tartalmazó komponensét. $K^* \neq R$, mert ellenkező esetben JANISZEWSKI tétele (B tétel) szerint a $K^* \cap V$ metszet K-t tartalmazó komponensének, K^{**}-nak lennének torlódási pontjai V határán, ez pedig lehetetlen, mert $K^{**} \subset E_t$ és így $K^{**} = K = K^*$. Továbbá az U-ra vonatkozó feltevés szerint nincs olyan $K' \subset D$ komponens, amely különbözik R-től és K^*-tól és elválasztja K^*-ot és R-et, mert ebben az esetben K' elválasztaná a $K = K^*$ és $CU \subset CV$ halmazokat és $K' \subset D - R \subset E_t$. Tehát az F tétel értelmében van olyan L kontinuum, amelyre: 1. $L \cap K \neq 0$; 2. $L \cap R \neq 0$; 3. $L \cap (D - K - R) = 0$. Legyen W a K komponens olyan környezete, hogy $\overline{W} \subset V$, és hogy abból, hogy $\tilde{K}$ az E_t halmaz komponense és $\tilde{K} \cap \overline{W} \neq 0$, következék a $\tilde{K} \subset V$ összefüggés.

Ilyen környezet a 2. segédtétel szerint létezik.

Megemlítjük, hogy $R \cap \overline{W} = 0$. Valóban, ellenkező esetben esetben az $R \cap V$ metszetnek az $a \in R \cap \overline{W}$ pontot tartalmazó Q komponense a B tétel szerint rendelkeznék torlódási pontokkal V határán, következésképpen a $\overline{Q} \subset E_t$ halmaz teljesen benne feküdnék E_t-nek valamely, CV-t és $\overline{W}$-t metsző komponensében, ami W választása folytán lehetetlen.

Legyen L' az $L \cap W$ metszet olyan komponense, amely tartalmaz K-beli pontokat. Akkor $\overline{L}'$ nem metszi R-et, tehát $\overline{L}_1 \cap (E_t - K) = 0$, ugyanis $\overline{L}' \subset L$ és $L \cap (E_t - K - R) = 0$.

Másrészt a B tétel szerint $\overline{L}' \cap CW \neq 0$. De ha ez így van, akkor $\overline{L}'$-nak található olyan b pontja, amely nem tartozik E_t-hez, mert ellenkező esetben $\overline{L}' \subset K$ és $K \cap CW \neq 0$ lenne. A b pontban $F(b) \neq t$, és így K fél-extrémumot szolgáltató komponens: valóban, $\overline{L}'$-nak vannak K-hoz nem tartozó pontjai, az $\overline{L}'$ kontinuum nem metszi az $E_t - K$ halmazt, következésképpen vagy $\overline{L}' - K$ minden pontjában $F(\eta) > t$, vagy mindezekben a pontokban $F(\eta) < t$. Az az eset, amikor $\overline{L}'$ bizonyos pontjaiban $F(\eta) > t$, más pontjaiban pedig $F(\eta) < t$, ki van zárva, ugyanis két ilyen a, c pontot a t nívó, és így ennek a nívónak valamely K' komponense is elválasztana. De $K' \neq K$ (mert K nem szétválasztó komponens) és $(\overline{L}' + K) \cap K' = 0$, tehát K' nem választja el a-t és c-t, minthogy ezek mindketten az $\overline{L}' + K$ kontinuumhoz tartoznak.

Ily módon K fél-extrémumot szolgáltató komponens, és az 1. tételt bebizonyítottuk.

Az 1. tétel osztályozza a nem szétválasztó komponenseket. Mi azonban nem három, hanem öt esetet fogunk megkülönböztetni. Nevezetesen, a félmaximumot szolgáltató komponensek közül különválasztjuk a *maximumot szolgáltató* komponenseket, vagyis azokat a K komponenseket, amelyeknek minden $a \in K$ pontja közönséges lokális maximum-hely a tágabb értelemben, azaz a valamely $V(a)$ környezetében az $F(\eta)$ függvény nem haladja meg az $F(a)$ értéket. Analóg módon a félminimumot szolgáltató komponensek közül különválasztjuk a *minimumot szolgáltatókat.*

Az 1. tétel segítségével bizonyos értelemben osztályozni tudjuk a reguláris komponenseket. A komponenseknek ezt az osztályozását azonban valamely rögzített ξ pontra vonatkozóan fogjuk elvégezni.

Bevezetünk néhány jelölést.

Legyen ξ rögzített pont és K valamely nívóhalmaznak egy ξ-t nem tartalmazó, reguláris komponense. Akkor K a J értelmezési tartományt két J_1, J_2 tartományra $(J_1 \ni \xi)$ osztja.

4. definíció. Nevezzük: a) a $K \subset E_t$ komponens K^* *belső karakterisztikájának* a $K^* = J_1 + K$ zárt halmazt, b) a K komponens K^{**} *külső karakterisztikájának* a $K^{**} = J_2 + K$ zárt halmazt. Értelmezzük az $F^*(\eta)$, $F^{**}(\eta)$ függvényeket a következőképpen:

$$F^*(\eta) = \begin{cases} F(\eta), & \text{ha} \quad \eta \in J_2, \\ t, & \text{ha} \quad \eta \in K^*; \end{cases}$$

$$F^{**}(\eta) = \begin{cases} F(\eta), & \text{ha} \quad \eta \in J_1, \\ t, & \text{ha} \quad \eta \in K^{**}. \end{cases}$$

A belső és külső karakterisztika az F^* illetve F^{**} függvény t nívójának egy-egy komponense, mégpedig nem szétválasztó komponense. Így az 1. tétel értelmében mindegyikük a következő öt típus valamelyikéhez tartozik: maximumot szolgáltató, félmaximumot (de nem maximumot) szolgáltató, minimumot szolgáltató, félminimumot (de nem minimumot) szolgáltató és koncentrikus szingularitású komponens. Ennek megfelelően a ξ pontot nem tartalmazó és reguláris K komponenst azon 25 típus valamelyikéhez fogjuk sorolni, amelyeket úgy nyerünk, hogy a K^* számára fennálló öt lehetőséget kombináljuk a K^{**} számára fennálló öt lehetőséggel.

Ily módon a következőt kapjuk:

2. TÉTEL. *Valamely nívóhalmaznak a ξ pontot nem tartalmazó és reguláris K komponense az* 1. *ábrán feltüntetett* 25 *típus valamelyikéhez tartozik.*

Könnyen látható (1. ábra), hogy a reguláris komponenseknek mind a 25 típusa megvalósul.

5. definíció. A reguláris komponenst (a ξ pontra nézve) *növekedési komponensnek* nevezzük, ha belső karakterisztikája minimumot vagy félminimumot szolgáltató, külső karakterisztikája pedig maximumot vagy félmaximumot szolgáltató komponens.

A reguláris komponenst *fogyási komponensnek* nevezzük (a ξ pontra vonatkozólag), ha belső karakterisztikája maximumot vagy félmaximumot szolgáltató, külső karakterisztikája pedig minimumot vagy félminimumot szolgáltató komponens.

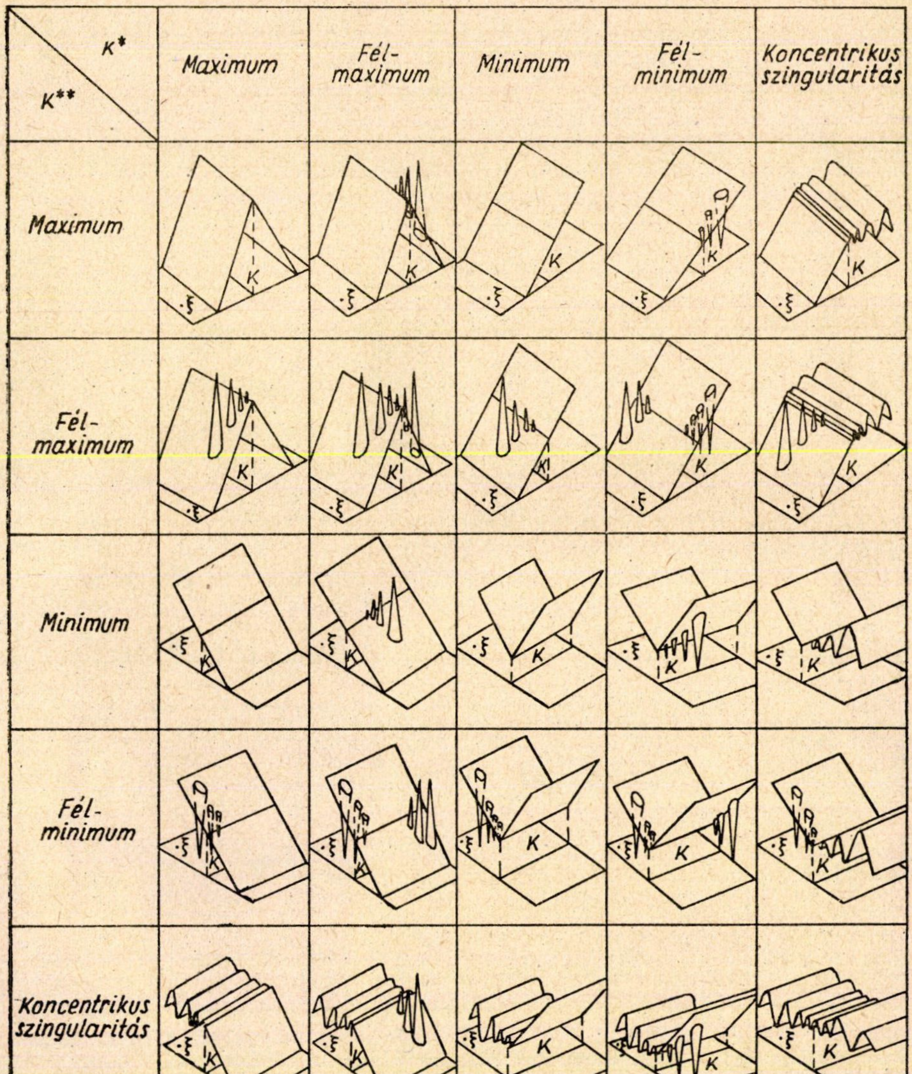
6. definíció. Legyen K az $F(\eta)$ folytonos függvény t nívójának valamely reguláris komponense. Tegyük fel, hogy a K komponens J-t a J_1, J_2 tartományokra osztja. K-t *kvázi-extrémális* komponensnek nevezzük, ha található két olyan R_1, R_2 kontinuum, amely metszi K-t és a J_1, J_2 tartományok közül a megfelelőt, továbbá amelyekre vagy $F(\eta) \leqq t$ minden $\eta \in R_1 + R_2$ pontban, vagy $F(\eta) \geqq t$ minden ilyen pontban.

3. SEGÉDTÉTEL. *Minden $F(\eta)$ folytonos függvény legfeljebb megszámlálhatóan sok nívón tartalmaz kvázi-extrémális komponenst.*

BIZONYÍTÁS. Legyen K a t nívó kvázi-extrémális komponense, R_1 és R_2 pedig azok a kontinuumok, amelyekről a kvázi-extrémális komponens definíciójában szó volt. Legyen az $a_1 \in R_1 \cap J_1$, $a_2 \in R_2 \cap J_2$ pontokban $F(a_1) \neq t$, $F(a_2) \neq t$. Ekkor az a_1, a_2 pontok elég kicsiny, köralakú U_1, ill. U_2 környezetét véve $F(\eta) \neq t$, ha $\eta \in U_1 + U_2$. Válasszunk U_1-ben és U_2-ben egy-egy racionális koordinátájú b_1, b_2 pontot, és egészítsük ki az R_1 kontinuumot az $[a_1, b_1]$, az R_2 kontinuumot az $[a_2, b_2]$ szakasszal. Minthogy sem $[a_1, b_1]$, sem $[a_2, b_2]$ nem tartalmaz E_t-beli pontokat, az így kiegészített kontinuumok ugyanazokkal a 6. definícióban posztulált tulajdonságokkal rendelkeznek, mint az R_1, R_2 kontinuumok, ezért feltehetjük, hogy már maguk az R_1, R_2 kontinuumok tartalmaznak egy-egy racionális koordinátájú pontot és ezekre az $a_1 \in J_1, a_2 \in J_2$ pontokra vagy $F(a_1) < t$ és $F(a_2) < t$, vagy $F(a_1) > t$ és $F(a_2) > t$. Meghatározottság kedvéért feltehetjük, hogy $F(a_1) < t$, $F(a_2) < t$, mert az ellentétes eset visszavezethető erre a $-F(\eta)$ függvényre való áttérés segítségével.

Legyen tehát azon nívók halmaza, amelyeknek van kvázi-extrémális $(F(a_1) < t$, $F(a_2) < t$ tulajdonságú$)$ komponensük, nem megszámlálható. Ekkor tekintettel arra, hogy a racionális koordinátájú pontokból álló párok halmaza megszámlálható, található két *különböző* t és t' nívóhoz tartozó K és K' kvázi-extrémális komponens, amelyre az a_1, a_1' és a_2, a_2' pontok páronkint egybeesnek: $a_1 = a_1'$, $a_2 = a_2'$ és $F(a_1) < t$, $F(a_1') < t'$, $F(a_2) < t$, $F(a_2') < t'$.

Meghatározottság kedvéért legyen $t < t'$. Legyen R_1 és R_2 két, a_1-et és a_2-t rendre tartalmazó és K-t metsző kontinuum; akkor a $D = R_1 + K + R_2$ halmaz kontinuum, amely tartalmazza a_1-et és a_2-t. Minthogy K' elválasztja az $a_1 = a_1' \in J_1'$



1. ábra

és az $a_2 = a_2' \in J_2'$ pontot, a K' kontinuum metszi D-t. Ez azonban lehetetlen, mert egyrészt feltevés szerint a D halmazon $F(\eta)$ seholsem haladja meg a $t < t'$ értéket, másrészt viszont K'-n az $F(\eta)$ függvény t'-vel egyenlő. A kapott ellentmondás bizonyítja a segédtétel helyességét.

4. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ tetszés szerinti függvény. A maximum-helyet (minimum-helyet) tartalmazó nívók halmaza legfeljebb megszámlálható.*

BIZONYÍTÁS: Meghatározottság kedvéért tegyük fel, hogy a maximum-helyet tartalmazó nívók halmaza nem megszámlálható. Minden a maximum-helyhez rendeljünk hozzá egy a középpontú és olyan kicsiny racionális sugarú kört, hogy a körben mindenütt fennálljon az $F(\eta) \leqq F(a)$ egyenlőtlenség. Ha a maximum-helyet tartalmazó nívók halmaza nem megszámlálható, valamely racionális r-hez megszámlálhatónál több olyan, különböző nívókhoz tartozó maximum-hely található, amelyhez r sugarú kört rendeltünk. Ebből következik, hogy található két olyan, *különböző* nívóhoz tartozó a, a' maximum-hely, amelyek r-nél közelebb vannak egymáshoz és amelyekhez r sugarú köröket rendeltünk. De akkor $F(a) \leqq F(a')$ és $F(a') \leqq F(a)$, amiből $F(a) = F(a')$ következik, ellentétben feltevésünkkel. A nyert ellentmondás igazolja segédtételünket.

5. SEGÉDTÉTEL. *Legyen az $F(\eta)$ függvény folytonos és K a t nívó olyan nem szétválasztó komponense, amelynek legalább egy pontja nem extrémum-hely. Akkor a t nívónak végtelen sok szétválasztó komponense van.*

BIZONYÍTÁS: Valóban, ellenkező esetben található volna olyan $\delta > 0$ szám, hogy a K kontinuum δ-környezete nem tartalmazza ezen szétválasztó komponensek egyetlen pontját sem. Tegyük fel, hogy az $a \in K$ pont nem extrémum-hely, b és c pedig az a hely δ-környezetének két olyan pontja, amelyekre $F(b) < F(a)$ és $F(c) > F(a)$. A b, c pontokat az E_t halmaz és így ennek valamely K' komponense is elválasztja, ennélfogva K' δ-nál kisebb távolságra van K-tól (ugyanis K' metszi a $[bc]$ szakaszt), ez viszont ellentmond kiindulásunknak és ezáltal bizonyítja, hogy az E_t halmaznak végtelen sok szétválasztó komponense van.

7. definíció. Legyen K a t nívó reguláris komponense, amely a J értelmezési tartományt a J_1, J_2 tartományokra osztja fel. A K komponenst *teljesen regulárisnak* nevezzük, ha $K = \bar{J}_1 - J_1 = \bar{J}_2 - J_2$.

6. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $\{K_\alpha\}$ a J-ben fekvő kontinuumok olyan rendszere, amelyre*

a) *mindegyik K_α kontinuum a J tartományt $J_\alpha^{(1)}$, $J_\alpha^{(2)}$ tartományokra választja szét:*

b) $K_\alpha \cap K_\beta = 0$;

c) $K_\alpha - (\bar{J}_\alpha^{(1)} - J_\alpha^{(1)}) \neq 0$.

Akkor a $\{K_\alpha\}$ rendszer legfeljebb megszámlálható.

BIZONYÍTÁS: Legyen $\tilde{\xi}_\alpha \in K_\alpha - (\bar{J}_\alpha^{(1)} - J_\alpha^{(1)})$. Akkor $\varrho(\tilde{\xi}_\alpha, \bar{J}_\alpha^{(1)}) > \delta_\alpha > 0$, ahol δ_α racionális szám. Legyen ξ_α olyan racionális koordinátájú pont, hogy $\varrho(\xi_\alpha, \tilde{\xi}_\alpha) < \frac{\delta_\alpha}{4}$. Legyen $\eta_\alpha \in J_\alpha^{(1)}$ racionális koordinátájú pont. Mindegyik K_α kontinuumhoz rendeljük hozzá a $(\xi_\alpha, \eta_\alpha)$ pontpárt. Ha a segédtétel állításával ellentétben a K_α kontinuumok rendszere nem lenne megszámlálható, akkor található lenne két olyan K_α, K_β kontinuum, hogy $\xi_\alpha = \xi_\beta, \eta_\alpha = \eta_\beta$ és $\delta_\alpha = \delta_\beta$. Legyen c a $[\xi_\alpha, \eta_\alpha]$ szakasznak η_α-tól ξ_α felé haladva az első metszéspontja a $K_\alpha + K_\beta$ összeggel. Meghatározottság kedvéért tegyük fel, hogy $c \in K_\alpha$. Akkor $\bar{J}_\beta^{(1)} - J_\beta^{(1)}$ nem választja el c-t és η_α-t, de elválasztja ξ_α-t és η_α-t, ennélfogva elválasztja c-t és ξ_α-t. Másrészt azonban a $K_\alpha + O_\alpha$ kontinuum, ahol O_α a ξ_α középpontú, $\frac{\delta_\alpha}{2}$ sugarú zárt körlemez, tartalmazza a c, ξ_α pontokat és nyilván nem metszi a $\bar{J}_\beta^{(1)} - J_\beta^{(1)}$ halmazt. A nyert ellentmondásból következik segédtételünk helyessége.

A 6. segédtételből adódik, hogy *reguláris, de nem teljesen reguláris komponens legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok lehet.* Annál inkább legfeljebb megszámlálható azoknak a nívóknak az összessége, amelyek tartalmaznak ilyen komponenseket.

7. SEGÉDTÉTEL. *Egymást páronkint nem metsző, a síkot szétválasztó és az adott J zárt négyzetben fekvő kontinuumok közül legfeljebb megszámlálhatóan sok olyan lehet, amely tartalmaz J határán fekvő pontot.*

BIZONYÍTÁS: Valóban, ha a szóban forgó kontinuumok rendszere nem megszámlálható, akkor a J négyzetnek van olyan oldala, amelyet megszámlálhatónál több ilyen kontinuum metsz. Tükrözzünk minden ilyen L kontinuumot erre az oldalra nézve. Legyen L tükörképe L'. Ekkor az $L + L'$ halmaz kontinuum, amely a síkot legalább három részre választja szét. Ha továbbá L nem metszi M-et, akkor $L + L'$ nem metszi az $M + M'$ kontinuumot. Ily módon az 1. segédtétel ellenére megszámlálhatónál több olyan egymást nem metsző kontinuumot kapnánk, amelyek közül mindegyik a síkot kettőnél több részre választja szét. Ez az ellentmondás bizonyítja a segédtételt.

A 7. segédtételből speciálisan következik, hogy a J négyzetben értelmezett $F(\eta)$ folytonos függvénynek legfeljebb megszámlálhatóan sok nívója tartalmaz a síkot szétválasztó és J határát metsző komponenst.

8. definíció. A K kontinuum α pontját *elágazási pontnak* nevezzük, ha K-nak van három olyan részkontinuuma, amelyek közül egyik sem áll egyedül az α pontból és amelyeknek páronkint α az egyetlen közös pontjuk.

8. SEGÉDTÉTEL (V. M. KOMAREVSZKIJ [4]). *Elágazási pontot tartalmazó és egymást páronkint nem metsző síkbeli kontinuumok bármely rendszere legfeljebb megszámlálható.*

BIZONYÍTÁS. Legyen K valamely kontinuum, α ennek egy elágazási pontja, K_1, K_2 és K_3 pedig K olyan részkontinuumai, amilyenekről a 8. definícióban szó van. Legyen továbbá Ω az α pontot tartalmazó nyílt körlemez; K_1', K_2' és K_3' a $K_1 \cap \Omega$, $K_2 \cap \Omega$, $K_3 \cap \Omega$ halmazoknak az α pontot tartalmazó komponensei, S az Ω halmaz határa, végül $a_1 \in \bar{K}_1' \cap S$, $a_2 \in \bar{K}_2' \cap S$, $a_3 \in \bar{K}_3' \cap S$. Akkor a $K' = \bar{K}_1' + \bar{K}_2' + \bar{K}_3'$ kontinuum az Ω halmazt legalább három tartományra választja szét. Valóban, az S körvonal $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{a_2 a_3}$, $\overline{a_3 a_1}$ íveinek mindegyikén található a CK' halmaznak egy-egy pontja, mert ellenkező esetben a $\bar{K}_1'$, $\bar{K}_2'$, $\bar{K}_3'$ kontinuumok közül valamelyik kettőnek lenne közös pontja S-en. Legyen $b_1 \in \overline{a_2 a_3} \cap CK'$, $b_2 \in \overline{a_3 a_1} \cap CK'$ és $b_3 \in \overline{a_1 a_2} \cap CK'$. Megmutatjuk, hogy a b_1, b_2, b_3 pontokat a K' kontinuum páronkint elválasztja Ω-ban. Csakugyan, tegyük fel, hogy például b_1 és b_2 nincs elválasztva. Akkor található olyan L egyszerű ív, amely összeköti b_1-et és b_2-t, teljesen $\bar{\Omega}$-ban fekszik és nem metszi a K' kontinuumot. Jelentse S' az S-sel koncentrikus és kétszer akkora sugarú körvonalat. Legyen b_1' és b_2' a b_1-nek és b_2-nek megfelelő két pont az S' körvonalon. Akkor L a $[b_1, b_1']$, $[b_2, b_2']$ szakaszokkal és az S' körvonal $\widetilde{b_1'b_2'}$ ívével együtt egy M topológikus kört képez, amely a síkot Jordan tétele szerint szétválasztja és amely nem metszi a K' kontinuumot. M elválasztja az a_3, a_1 pontokat, mert M az a_3 pontot elválasztja a végtelentől, az a_1 pontot pedig nem. Ez azonban nem lehetséges,minthogy a_1 és a_3 a K' kontinuumhoz tartozik. Tehát K' az Ω halmazt valóban legalább három tartományra választja szét.

Legyen most η a K_α kontinuum elágazási pontja. Legyen δ a K_1, K_2, K_3 részkontinuumok átmérői közül a legkisebb, η' pedig racionális koordinátákkal rendelkező és η-tól legfeljebb $\frac{\delta}{4}$ távolságra levő pont. Legyen Ω_α η' középpontú és $r_\alpha < \frac{\delta}{4}$ sugarú kör, ahol r_α racionális szám. Akkor, amint megmutattuk, van olyan $K_\alpha' \subset K_\alpha$ részkontinuum, amely az Ω_α kört legalább három tartományra választja szét. Az 1. segédtétel értelmében ugyanaz az Ω kör legfeljebb megszámlálhatóan sok K_α kontinuumnak felelhet meg. Minthogy azonban mindazoknak a köröknek a halmaza, amelyeknek sugara és középpontjuk mindkét koordinátája racionális, legfeljebb megszámlálható, az összes K_α kontinuumok rendszere szintén legfeljebb megszámlálható.

Gömbfelületen elhelyezkedő kontinuumok esetére a bizonyítás automatikusan átvihető.

A 8. segédtételből következik, hogy a nívóhalmazok elágazási pontokkal rendelkező komponensei legfeljebb megszámlálható halmazt alkotnak, és még inkább legfeljebb megszámlálható azoknak a nívóknak a halmaza, amelyeknek van ilyen komponensük.

Összefoglalva az összes előző eredményeket, a nívóhalmazok tipikus szerkezetéről kimondhatjuk a következő tételt:

3. TÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ a J négyzetben (illetve gömbfelületen) értelmezett folytonos függvény. Akkor:*

1. *Legfeljebb megszámlálhatóan sok nívó tartalmaz extrémum-helyet és reguláris kvázi-extrémális komponenst.*

2. *Legfeljebb megszámlálhatóan sok nívó tartalmaz a J tartományt kettőnél több részre osztó komponenst, elágazási ponttal rendelkező komponenst és reguláris, de nem teljesen reguláris komponenst. Ha J négyzet, akkor a síkot szétválasztó és J határát metsző komponensek is legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok nívóhalmazban lépnek fel.*

3. *Minden egyéb nívó vagy csupa reguláris komponensből áll, vagy egy a J tartományt szét nem választó komponenssel együtt végtelen sok reguláris komponenst tartalmaz.*

4. *A J tartományt szét nem választó komponensek és a reguláris komponensek típusokba sorolhatók az 1. és 2. tételnek megfelelően.*

E paragrafus befejezéseként bebizonyítunk három segédtételt, amelyet többször is fel fogunk használni.

9. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény, ξ és ζ pedig J tetszés szerinti pontjai. Ha a t nívó elválasztja a ξ, ζ pontokat, akkor e nívó komponensei közt található ξ-hez legközelebb fekvő, a ξ, ζ pontokat elválasztó komponens.*

BIZONYÍTÁS. A G. tétel szerint a ξ, ζ pontokat elválasztó összes komponensek rendezettek, vagyis bármely kettő közül az egyik közelebb van ξ-hez, mint a másik, és az utóbbit elválasztja ξ-től. Legyen $\{K_n\}$ a t nívó ξ, ζ pontokat elválasztó komponenseinek olyan sorozata, hogy K_n-nek ξ-től mért távolsága az alsó határhoz tart, ha $n \to \infty$. Akkor J kompaktsága következtében e komponensek valamely részsorozatának topológiai limes inferiora nem üres. Feltehetjük, hogy maga a $\{K_n\}$ sorozat már így van megválasztva. Akkor a $K = \underline{\mathrm{lt}}_n K_n$ halmaz kontinuum, továbbá ($F(\eta)$ folytonossága miatt) az egész K egy nívóhoz tartozik. Következésképpen a K kontinuum az E_t nívóhalmaz valamelyik $\tilde{K}$ komponenséhez tartozik (bár lehetséges, hogy nem azonos az egész komponenssel). Az A és D tétel értelmében a K kontinuum és annál inkább a $\tilde{K} \supset K$ komponens elválasztja a ξ, ζ pontokat. A $\tilde{K}$ komponens a legközelebb van ξ-hez, mert ha a t nívó egy másik K' komponense a $\tilde{K}$ komponenst elválasztja ξ-től, akkor $\varrho(\xi, K') < \varrho(\xi, K)$ és így $\varrho(\xi, K_n)$ nem tartana az alsó határhoz n növekedésével, ugyanis $\varrho(\xi, K) \leqq \underline{\lim}_n \varrho(\xi, K_n)$.

Megjegyezzük még, hogy ha $\tilde{F}(\xi) \neq t$, akkor a K komponens nem tartalmazza a ξ pontot. Ellenkező esetben $\tilde{K} \ni \xi$.

10. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény és ξ, ζ a J tartomány tetszés szerinti pontjai. Legyen K valamely $t \neq F(\xi)$ nívónak a ξ, ζ pontokat elválasztó komponensei közül a ζ-hoz legközelebb fekvő, és legyen K reguláris komponens. Ebben az esetben ha $t < F(\zeta)$, akkor a K^* belső karakterisztika félminimumot szolgáltató komponens, ha pedig $t > F(\zeta)$, akkor K^* félmaximumot szolgáltató komponens (mindig a ξ pontra vonatkozólag).*

Analóg módon, ha K' a t nívó ξ, ζ pontokat elválasztó komponensei közül a ξ-hez legközelebbi, akkor attól függően, hogy $t < F(\xi)$ vagy $t > F(\xi)$, a K^{**} külső karakterisztika félminimumot, illetve félmaximumot szolgáltató komponens lesz (ξ-re vonatkozólag).

BIZONYÍTÁS: Legyen K a t nívónak a ζ ponthoz legközelebb fekvő komponense és $t < F(\zeta)$ (a 9. segédtétel értelmében található ilyen komponens). Legyen a K komponens reguláris és tegyük fel, hogy a segédtétel állításával ellentétben a K^* karakterisztika nem félminimumot szolgáltató komponens. Ekkor két eset lehetséges:

a) K^* koncentrikus szingularitású komponens. Ez lehetetlen, mert akkor a t nívónak volna olyan K' komponense, amely elválasztja K^*-ot és az $U \supset K^*$ környezet kiegészítő halmazát. De ha az U környezet elég kicsiny, úgyhogy $\zeta \in CU$, akkor K' elválasztja a K^* komponenst a ζ ponttól, ugyanis K' elválasztja K^*-ot CU-tól. Ez nem lehetséges, mert K a t nívónak a ζ ponthoz legközelebb fekvő komponense.

b) K^* félmaximumot szolgáltató komponens. Legyen R olyan kontinuum, amely metszi K^*-ot, nem metszi az $E_t - K^*$ halmazt és tartalmaz egy a pontot, amelyre $F^*(a) < t$. Akkor az a, ζ pontokat a t nívó elválasztja (ugyanis $t < F^*(\zeta) = F(\zeta)$). Az E tétel értelmében található az a, ζ pontokat elválasztó $K' \subset E_t$ komponens. De akkor tekintettel arra, hogy K' elválasztja az a, ζ pontokat, K' különbözik K^*-tól, mert K^* szét nem választó komponens. $K' \cap R = 0$, így K' nem választja el a K^* komponenst és az a pontot. De akkor K' elválasztja a ζ pontot és K^*-ot, mert különben K' nem választhatná el az a, ζ pontokat. Következésképpen K' elválasztja a ξ, ζ pontokat és közelebb fekszik ζ-hoz, mint K, ez pedig lehetetlen.

Tehát K^* félminimumot szolgáltató komponens.

A 10. segédtétel fennmaradt három esete analóg módon bizonyítható be.

11. SEGÉDTÉTEL. *Legyen K_1 és K_2 az $F(\eta)$ folytonos függvény valamely t nívójának két komponense. Akkor található egy maximális $\delta_0 > 0$ szám, amelyre vagy a $t+\delta_0$, vagy a $t-\delta_0$ nívó elválasztja a K_1, K_2 komponenseket. Ha a $t \pm \delta$ nívó elválasztja K_1-et és K_2-t, akkor bármely δ' számra $(0 < \delta' < \delta)$ a $t \pm \delta'$ nívó elválasztja a K_1, K_2 komponenseket.*

BIZONYÍTÁS: Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy ha a $t \pm \delta$ nívó elválasztja a K_1, K_2 komponenseket, akkor a $t \pm \delta'$ nívó is elválasztja K_1-et és K_2-t minden $0 < \delta' < \delta$ mellett. Valóban, az E tétel szerint található a K_1, K_2 komponenseket elválasztó $L \subset E_{t \pm \delta'}$ komponens. Ekkor $E_{t \pm \delta'}$ elválasztja egyrészt K_1-et L-től, másrészt K_2-t L-től, és az $E_{t \pm \delta'}$ halmaznak van legalább két olyan komponense, amely elválasztja K_1-et és L-et, illetve K_2-t és L-et és egyúttal elválasztja K_1-et és K_2-t.

Most tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben semmilyen $\delta > 0$ szám mellett a $t+\delta$, $t-\delta$ nívók nem választják el a K_1, K_2 komponenseket. Akkor található olyan, kontinuumokból álló $\{R_s\}$ sorozat, amelynek minden tagja metszi K_1-et is, K_2-t is, és amelyre $R_s \cap \left(E_{t+\frac{1}{s}} + E_{t-\frac{1}{s}}\right) = 0$.

Ebből következik, hogy az R_s halmazon $t - \dfrac{1}{s} < F(\eta) < t + \dfrac{1}{s}$. Szokásos módon az $\{R_s\}$ sorozatból válasszunk ki egy olyan részsorozatot, amelynek topológiai limes inferiora nem üres. Tegyük fel, hogy maga az $\{R_s\}$ sorozat már ilyen. Akkor az $R = \underline{\mathrm{lt}}_s\, R_s$ halmaz kontinuum, és R metszi K_1-et is, K_2-t is. Az R kontinuumon $F(\eta) \equiv t$, vagyis $R \subset E_t$, és így a K_1, K_2 komponensek azonosak. Tehát van olyan $\delta > 0$, hogy $E_{t \pm \delta}$ elválasztja a K_1, K_2 komponenseket. Egy maximális δ_0 szám létezése J kompaktságából és az A, D tételekből következik.

2. §. Kétváltozós függvény komponens-tere (egydimenziós fája)

A többváltozós függvények sok tulajdonsága teljesen analóg az egyváltozós függvények, vagy pontosabban, az egydimenziós kontinuumon értelmezett függvények tulajdonságaival. Kiderül, hogy maga a függvény szolgáltat nekünk ilyen egydimenziós kontinuumot: ilyen a függvény „*egydimenziós fája*", vagyis a függvény nívóhalmazainak komponenseiből alkotott tér a természetes topológiával. Ebben a paragrafusban többváltozós függvények egydimenziós fájának megszerkesztésével és tanulmányozásával foglalkozunk. A 2. § anyaga valamivel elvontabb, mint az összes többié. Bár az e paragrafusban kapott eredményeket később felhasználjuk, szükség esetén az egész 2. § elhagyható lenne, igaz, egyes bizonyítások meghosszabbodása árán. A kétváltozós függvények tulajdonságainak „egydimenziósakra" és „kétdimenziósakra" való elkülönülése azonban szememben elvi jelentőségű ténynek látszik. Ebből a szempontból az egydimenziós fa bevezetése éppen hogy lényeges: segítségével a függvények egydimenziós tulajdonságai különösen világosan választhatók ki.

Legyen tehát $F(\eta)$ kétváltozós, vagy ha úgy tetszik, a kétdimenziós gömbfelületen értelmezett folytonos függvény. Rögtön megjegyezzük, hogy az egész paragrafus folyamán nem lesz fontos számunkra a függvény J értelmezési tartományának nemcsak a pontos alakja, hanem még a dimenziója sem, úgyhogy az olvasó, ha akarja, az $F(\eta)$ függvényt képzelheti az n-dimenziós kockán, az n-dimenziós gömbfelületen stb. értelmezett folytonos függvénynek.

Minden $F(\eta)$ függvénynek meg fogunk feleltetni egy T_F topológikus teret, amelyet az $F(\eta)$ függvény egydimenziós fájának fogunk elnevezni (később kiderül, hogy T_F egydimenziós kontinuum). Pontoknak az $F(\eta)$ függvény E_t nívóhalmazainak komponenseit vesszük. T_F-en a topológiát a következőképpen adjuk meg: legyen $U(K) \subset J$ olyan nyílt halmaz, amely tartalmazza az E_t nívóhalmaz K komponensét. A teljesen $U(K)$-ban fekvő és a T_F tér pontjainak tekintett komponensek halmazát a T_F tér K pontja környezetének fogjuk tekinteni. A topológiát egy környezetrendszer megadása segítségével vezettük be. Meg kell mutatni, hogy a bevezetett topológia eleget tesz a topológikus tér axiómáinak. Két ilyen axióma van:

1. Bármely adott $p \in T_F$ pont tetszés szerinti két környezetének metszete tartalmazza a p pont valamely környezetét.

2. Ha a q pont a p pont $U(p)$ környezetéhez tartozik, akkor q-nak van olyan $U(q)$ környezete, amely $U(p)$-ben fekszik.

Ennek a két axiómának a T_F térben való teljesülése könnyen következik abból, hogy J-ben két nyílt halmaz metszete nyílt halmaz, és a 2. segédtételből.

Tehát minden J-n értelmezett $F(\eta)$ folytonos függvénynek megfeleltettünk egy T_F topológikus teret. Ennek kapcsán a J térnek a T_F térre való τ_F természetes leképezését nyerjük. Ha ξ a J tér valamely pontja, akkor legyen definíció szerint $\tau_F(\xi) = K$, ahol K egy nívóhalmaz valamely komponense *mint a T_F tér pontja.* Ha M a J tér valamely halmaza, akkor $\tau_F(M)$ jelenti M képét a T_F térben. Ha L a T_F térben fekvő halmaz, akkor szokásos módon $\tau_F^{-1}(L)$ jelöli L teljes inverz képét J-ben. Azonkívül gyakran az l_ξ jelölést fogjuk használni $\tau_F(\xi)$-re, vagyis a $K \ni \xi$ komponensre mint a T_F tér pontjára, továbbá a K_ξ jelölést ugyanarra a K komponensre, de most a J tér ponthalmazának tekintve.

12. SEGÉDTÉTEL. *A τ_F leképezés folytonos.*

BIZONYÍTÁS: Legyen l a T_F tér valamely pontja, $K = \tau_F^{-1}(l)$ és $\xi \in K$. Legyen $U(l)$ az l pont tetszés szerinti környezete T_F-ben, $U(K)$ pedig K-nak az $U(l)$ halmazt generáló környezete J-ben. Akkor $U(K) \supset K \ni \xi$, és a 2. segédtétel szerint található olyan $V(\xi) \subset U(K)$ környezet, hogy minden a $V(\xi)$ környezetet metsző K' komponens teljesen $U(K)$-ban fekszik. De akkor $\eta \in V(\xi)$ esetén $\tau_F(\eta) \subset U(l)$, ami $U(l)$ önkényes megválasztása folytán éppen azt jelenti, hogy a τ_F leképezés folytonos.

Minthogy J lokálisan összefüggő kontinuum (lásd a K definíciót), az L tételből rögtön kevetkezik az alábbi tétel:

4. TÉTEL. *A J halmazon értelmezett $F(\eta)$ folytonos függvény T_F egydimenziós fája lokálisan összefüggő kontinuum.*

13. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény, T_F az $F(\eta)$ függvény egydimenziós fája, l_0 és l_1 pedig T_F tetszés szerinti pontjai. Legyen R mindazon komponensek összege J-ben, amelyek elválasztják a $K_0 = \tau_F^{-1}(l_0)$, $K_1 = \tau_F^{-1}(l_1)$ komponenseket. Akkor $\sigma = \tau_F(R)$ az egyetlen olyan egyszerű ív T_F-ben, amelynek l_0 és l_1 a két végpontja. A σ ív maximális, vagyis teljesen benne van bármely az l_0, l_1 pontokat tartalmazó $L \in T_F$ kontinuumban.*

BIZONYÍTÁS: A G tétel szerint a σ halmaz rendezett, ha a rendezést úgy értelmezzük, hogy $l, \tilde{l} \in \sigma$ esetén $l < \tilde{l}$ azt jelenti, hogy $\tau_F^{-1}(l)$ a $\tau_F^{-1}(\tilde{l})$ komponenst elválasztja K_0-tól. Megmutatjuk, hogy ilyen rendezés mellett σ hasonló egy szakaszhoz. Ehhez elég belátni, hogy σ rendelkezik a következő négy tulajdonsággal:

1. Van olyan l^0, hogy tetszés szerinti $l \in \sigma - l^0$ pontra $l^0 \prec l$.

2. σ elemeinek bármely $l^{(1)} \prec l^{(2)} \prec \ldots$ monoton sorozatához található limeszelem, vagyis olyan σ-beli l elem, hogy $l^{(s)} \prec l$ $(s=1, 2, \ldots)$ és hogy bármely $l' \in \sigma$ elemre $l' \prec l$ esetén elég nagy s értékekre $l' \prec l^{(s)}$.

3. σ szeparábilis halmaz, vagyis van olyan megszámlálható $\{l_s\}$ halmaz, hogy l^0 kivételével bármely $l \in \sigma$ elemhez található olyan monoton $\{l_{s_n}\}$ részsorozat, amelynek l limesz-eleme.

4. σ bármely l és $l' \succ l$ eleméhez található olyan l'', amelyre $l \prec l'' \prec l'$.

Az 1. tulajdonság magától teljesül: az l^0 első elem szerepét l_0 játssza.

A 2. tulajdonság könnyen következik az A, D tételekből és J kompaktságából. Valóban, legyen $l^{(1)} \prec l^{(2)} \prec \ldots$; legyen $K^{(s)} = \tau_F^{-1}(l^{(s)})$ és legyen az $\{l^{(s)}\}$ sorozat olyan ritka, hogy $\underset{s}{\underline{\mathrm{lt}}}\, K^{(s)} \neq 0$. Legyen $\tilde{K} = \underset{s}{\overline{\mathrm{lt}}}\, K_s$, a megfelelő komponens $K \supset \tilde{K}$, továbbá legyen $l = \tau_F(\tilde{K})$. Nyilvánvaló, hogy $\tau_F(K^{(s)}) \prec l$ minden s-re. Azonkívül ha $l' \prec l$ és minden s-re $l' \succ l^{(s)}$, akkor az $L = \tau_F^{-1}(l')$ és a K_0 halmazt mindegyik $K^{(s)}$ és ezzel együtt topológiai limes superioruk is elválasztja, így a $K \supset \underset{s}{\overline{\mathrm{lt}}}\, K_s$ komponens még inkább elválasztja őket. De akkor K elválasztja L-et K_0-tól és $\tau_F(K) \prec \tau_F(L)$ ellentétben a feltevéssel. Tehát az 1. és 2. tulajdonságot bebizonyítottuk.

Most bizonyítsuk be a 3. tulajdonságot. A G tétel szerint két különböző és R-hez tartozó K, L komponens különböző távolságra van K_0-tól. Legyen D az a valós számokból álló halmaz, amelynek elemei K_0-nak az R-beli komponensektől mért távolságai. Legyen $D^* \subset D$ megszámlálható és D-ben mindenütt sűrű halmaz. Legyen $\{K_n\}$ azoknak az R-hez tartozó komponenseknek a halmaza, amelyeknek K_0-tól mért távolságai D^*-beli számok. Megmutatjuk, hogy $\{\tau_F(K_n)\}$ a keresett megszámlálható és mindenütt sűrű halmaz. Legyen $l \in \sigma$. Legyen $\xi \in K_0$ és $\eta \in L = \tau_F^{-1}(l)$ két olyan pont, amelyre $\varrho(\xi, \eta) = \varrho(K_0, L)$. Legyen továbbá $d_1 < d_2 < \ldots$ a D^* halmaz elemeiből álló és a $\varrho(K_0, L)$ számhoz tartó sorozat. Válasszuk ki az R-hez tartozó komponenseknek egy $K_1^*, \ldots, K_n^*, \ldots$ sorozatát, amelyre $\varrho(K_0, K_n^*) = d_n$. Legyen η_n a K_n^* komponens η-hoz legközelebbi metszéspontja a $[\xi, \eta]$ szakasszal. Ilyen van, mert K_n^* elválasztja a K_0, L komponenseket. Nyilván $d_n \leqq \varrho(\xi, \eta_n)$, és így $\lim\limits_n \varrho(\eta_n, \eta) = 0$. Következésképpen $\eta \in \underset{n}{\underline{\mathrm{lt}}}\, K_n^*$, tehát $L \ni \underset{n}{\overline{\mathrm{lt}}}\, K_n^*$. De ebből következik, hogy az l elem a $\{\tau_F(K_n^*)\}$ sorozatnak limesze.

Végül a 4. tulajdonság a 11. segédtétel miatt teljesül.

Most legyen θ a σ halmaznak a $[0,1]$ szakaszra való hasonló leképezése, vagyis $\theta(l)$ a σ halmazon értelmezett függvény, amelyre $\theta(l_0) = 0$, $\theta(l_1) = 1$, amelyre továbbá $\theta(l) < \theta(l')$ ha $l \prec l'$. Megmutatjuk, hogy a θ függvény a T_F tér σ halmazának a $[0, 1]$ szakaszra való *homeomorf* leképezését valósítja meg. Valóban, legyen $l \in \sigma$ és $\varepsilon > 0$ előre megadott szám. Legyenek $l' \in \sigma$, $l'' \in \sigma$ olyan komponensek, amelyekre $\theta(l') = \theta(l) - \varepsilon$, $\theta(l'') = \theta(l) + \varepsilon$. Legyen U a J térnek a $\tau_F^{-1}(l')$, $\tau_F^{-1}(l'')$ komponensek által határolt tartománya. Akkor U a T_F térben egy $\tilde{U}$ tartományt generál, amelynek σ-val való metszete az $l' \prec \tilde{l} \prec l''$ összefüggésnek eleget tevő $\tilde{l}$ pontokból áll és így $\tilde{l} \in \tilde{U} \cap \sigma$ esetén $|\theta(\tilde{l}) - \theta(l)| < \varepsilon$. Ezzel bebizonyítottuk $\theta(l)$ folytonosságát. Megmutatjuk, hogy az inverz leképezés folytonossága is fennáll. A 2. segédtétel értelmében elég megmutatni, hogy $\theta(l_n) \to \theta(l)$ esetén $\varrho(K_n, K) \to 0$, ahol $K = \tau_F^{-1}(l)$, $K_n = \tau_F^{-1}(l_n)$. Legyen a feltevéssel ellentétben $\varrho(K, K_n) > \delta > 0$. A $\{K_n\}$ sorozatot tekinthetjük olyan ritkának, hogy $\underset{n}{\underline{\mathrm{lt}}} K_n \neq 0$. Legyen $\tilde{K}$ a $\underset{n}{\overline{\mathrm{lt}}} K_n$ halmazt tartalmazó komponens. Akkor vagy $\varrho(K, \tilde{K}) > 0$, vagy $K = \tilde{K}$. Az utóbbi ellentmond a $\varrho(K, K_n) > \delta$ feltételnek. Legyen $\varrho(K, \tilde{K}) = \delta_1 > 0$. Akkor $\theta(K) = \theta(\tilde{K})$, ami lehetetlen, mert $K \neq \tilde{K}$ és vagy $K \prec \tilde{K}$, vagy $\tilde{K} \prec K$. A 13. segédtétel első felét bebizonyítottuk: σ egyszerű ív.

Most legyen $L \subset T_F$ olyan kontinuum, amely tartalmazza az l_0, l_1 pontokat. Akkor az $S = \tau_F^{-1}(L)$ halmaz a K és az M tétel szerint kontinuum J-ben és $S \supset K_0 + K_1$. De akkor S metszi a K_0, K_1 komponenseket elválasztó bármelyik komponenst, és így $L = \tau_F(S) \supset \sigma = \tau_F(R)$, ugyanis R az összes ilyen komponensek összege. Tehát $L \supset \sigma$, vagyis a σ egyszerű ív minimális. Most legyen $\sigma' \subset T_F$ olyan egyszerű ív, amelynek végpontjai l_0 és l_1. Akkor $\sigma' \supset \sigma$. Legyen $l \in \sigma' - \sigma$. Legyen σ'' a σ' ív l-től l_1-ig terjedő része, és l_2 a σ'' és σ' ív első közös pontja l-től l_1 felé haladva. Akkor az $l_0 l_2$, $l l_2$, $l_2 l_1$ íveknek l_2 az egyetlen közös pontjuk, vagyis l_2 elágazási pont és σ' nem egyszerű ív.

A 13. segédtételt teljesen bebizonyítottuk.

A topológiából ismeretes, hogy azok a lokálisan összefüggő kontinuumok, amelyek nem tartalmaznak topológikus kört, egydimenziósak, T_F pedig a 13. segédtétel értelmében nyilvánvalóan nem tartalmaz topológikus kört. Ez igazolja az „egydimenziós fa" elnevezés jogosságát. Az is ismeretes, hogy minden lokálisan összefüggő és topológikus kört nem tartalmazó kontinuum homeomorf módon leképezhető egy síkbeli kontinuumra. Ezeket a tényeket nem fogjuk felhasználni és bizonyításukat elhagyjuk.

9. definíció. Legyen K valamely kontinuum és a ennek egy pontja. Az *a pont indexének* nevezzük *azoknak az n számoknak a felső határát, amelyekre található K-nak n számú olyan, több pontból álló részkontinuuma, hogy bármelyik kettőnek a az egyetlen közös pontja.*

10. definíció. A K kontinuum $n \geqq 3$ indexű pontját *elágazási pontnak*, 1 indexű pontját pedig *végpontnak* nevezzük (vö. 8. definíció).

5. TÉTEL. *Az $F(\eta)$ folytonos függvény nem reguláris komponenseinek a függvény T_F egydimenziós fáján a következők felelnek meg:*

a) *az értelmezési tartományt $n \geqq 3$ részre szétválasztó komponenseknek elágazási pontok ugyanazzal az n indexszel, és megfordítva;*

b) *az értelmezési tartományt szét nem választó komponenseknek a fa végpontjai, és megfordítva.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy az E_t nívóhalmaz K komponense a J tartományaz n számú $G_1, G_2, \ldots, G_n$ tartományra választja szét (lehet $n = \infty$ is). Be kell bizonyíttanunk, hogy K-nak mint a T_F kontinuum pontjának indexe szintén n.

A $G_s + K$ zárt halmazok mindegyike bármely pontjával együtt e pont egész komponensét is tartalmazza. Ezeknek a halmazoknak a metszete K. A T_F térben mindegyik $G_s + K$ halmaznak megfelel egy nem egyetlen pontból álló kontinuum, és a K komponens mint a T_F tér pontja e kontinuumok egyetlen metszéspontja. Tehát K indexe T_F-ben legalább n.

Bizonyítsuk be állításunk második felét. Legyen l elágazási pont a T_F térben, és $K = \tau_F^{-1}(l)$. Legyenek $L_1, L_2, \ldots, L_n$ egynél több pontból álló, egymást páronkint

l-ben és csak l-ben metsző kontinuumok a T_F térben. Bebizonyítjuk, hogy a K komponens a J tartományt legalább n részre osztja. Valóban, legyen $D_s = \tau_F^{-1}(L_s)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$. Megmutatjuk, hogy $r \neq s$ esetén K elválasztja a $D_r - K$, $D_s - K$ halmazokat. Legyen $\alpha \in D_r - K$, $\beta \in D_s - K$ és R olyan kontinuum, amely tartalmazza az α, β pontokat, de nem metszi a K komponenst. Legyen $M = \tau_F(R)$. Nyilvánvaló, hogy M az l pontot nem tartalmazó kontinuum. Ez azonban azt jelenti, hogy az l_α, l_β pontok T_F-ben összeköthetők az l pontot nem tartalmazó M kontinuummal. A 13. segédtétel értelmében található az l_α, l_β pontokat tartalmazó minimális σ egyszerű ív. Akkor $\sigma \subset M$ nem tartalmazza l-et, mert M nem tartalmazza l-et. Másrészt $L_r + L_s$ tartalmazza a σ ívet, tehát $\sigma \ni l$, mert ha $\sigma \not\ni l$, akkor egy elég kicsiny $U(l)$ környezet sem metszi a σ ívet, akkor pedig $L_r - U(l)$ és $L_s - U(l)$ egymást nem metsző zárt halmazok (mivel feltevés szerint L_r és L_s egyetlen metszéspontja l), vagyis az $l_\alpha \in L_r - U(l)$, $l_\beta \in L_s - U(l)$ pontok nem köthetők össze a $\sigma \subset L_r + L_s - U(l)$ egyszerű ívvel.

Tehát ha K indexe a T_F térben n, akkor a K komponens a J tartományt legalább n részre osztja. Megmutattuk, hogy a K komponensnek mint a T_F tér pontjának indexe egyenlő azoknak a tartományoknak a számával, amelyekre K felosztja a J halmazt. Ebből következik a bebizonyítandó tétel a) és b) állítása.

14. SEGÉDTÉTEL: *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény a szokásos J értelmezési tartományon és K e függvény valamelyik E_t nívóhalmazának egy szétválasztó komponense. Legyen J_1 azok közül a tartományok közül az egyik, amelyekre K felosztja J-t. Akkor J_1-ben található szét nem választó komponens.*

BIZONYÍTÁS: Indirekt bizonyítást fogunk végezni. Rendezzük közönséges $\{r_s\}$ sorozatba J mindazon pontjait, amelyeknek mindkét koordinátájuk racionális. Legyen $\xi \notin J_1$. Legyen $K_1 = K$. Tegyük fel, hogy a $K_1, K_2, \ldots, K_n$ komponensek és a $J_1, J_2, \ldots, J_n$ tartományok már értelmezve vannak oly módon, hogy K_s elválasztja a J_s tartományt K_{s-1}-től, továbbá $K_s \subset J_{s-1}$. Az $r_s \in J_n$ pontok közül jelöljük meg azokat, amelyeket legalább egy $\tilde{K} \subset J_n$ komponens nem választ el K_n-től. Rögzítsük közülük a legkisebb indexű $r_s(n)$ pontot és válasszunk K_{n+1}-nek egy J_n-ben fekvő és az $r_s(n)$ pontot a K_n komponenstől el nem választó komponenst, J_{n+1}-nek pedig egy olyan tartományt, amelyet K_{n+1} elválaszt K_n-től. Folytassuk eljárásunkat minden n természetes számra. Most legyen a $\{K_{n_m}\}$ részsorozat olyan ritka, hogy $\underline{\mathrm{lt}}_m K_{n_m} \neq 0$. Legyen $K' = \overline{\mathrm{lt}}_m K_{n_m}$, továbbá $\tilde{K} \supset K'$ egy nívóhalmaz komponense. Nyilvánvaló, hogy $\tilde{K} \subset \prod_n J_n$, és $\tilde{K}$ nem választja szét J-t; valóban, ellenkező esetben legyen J_0 olyan tartomány, amelyet $\tilde{K}$ elválaszt mindegyik K_n-től. Legyen $\tilde{\tilde{K}} \subset J_0$ tetszés szerinti komponens. Található olyan $r_s \subset J_0$ pont, amelyet $\tilde{\tilde{K}}$ nem választ el $\tilde{K}$-tól és egyúttal az összes K_n komponenstől sem. Ez azonban azt jelenti, hogy $r_s(n)$ indexe valamely n-re nem volt minimális.

15. SEGÉDTÉTEL: *Folytonos függvény egydimenziós fája a végpontok halmazából és legfeljebb megszámlálhatóan sok olyan egyszerű ívből áll, amelyek egymást páronkint legfeljebb egy pontban, méghozzá elágazási pontban metszik.*

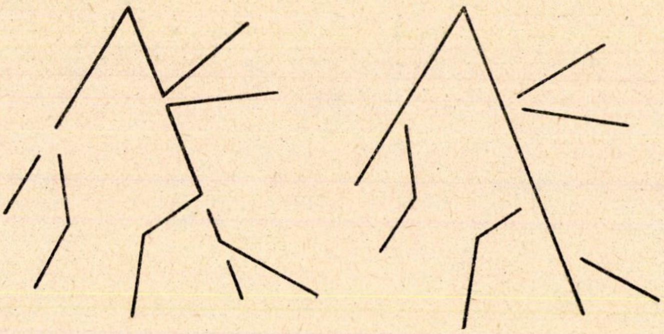
BIZONYÍTÁS: Rendezzük közönséges sorozatba a J tartomány racionális koordinátájú pontjaiból képezhető összes párokat. Összesen megszámlálhatóan sok ilyen pár van. Minden olyan párnak, amelynek elemei nem tartoznak ugyanahhoz a komponenshez, feleltessük meg az $F(\eta)$ függvény valamely nívóhalmazának a pontpárt elválasztó egyik komponensét. Legyenek ezek a megjelölt komponensek $K_1, ..., K_n, ...$, K_0 pedig egy, a J tartományt szét nem választó komponens. Legyen $l_0 = \tau_F(K_0)$. A K_s komponens szétválasztja J-t. Legyen J_s azon tartományok egyike, amelyeket K_s elválaszt K_0-tól. Akkor J_s-ben található a J tartományt szét nem választó L_s komponens. Képezzük most az említett megszámlálhatóan sok T_F-beli egyszerű ívet a következőképpen. Legyen $l_s = \tau_F(K_s)$. Legyen σ_s^0 az l_0 és l_s pontot összekötő minimális egyszerű ív T_F-ben. Továbbá legyen $\sigma_1 = \sigma_1^0$, és σ_s az az egyszerű ív, amely az l_s pontot a σ_s^0 és $\sum_{k=1}^{s-1} \sigma_k$ halmaz l_s-től számított első metszéspontjával köti össze. Azt állítom, hogy az egész T_F tér a végpontok és a σ_s egyszerű ívek összege. Valóban, tegyük fel, hogy az $l \in T_F$ pont nem végpont és $K = \tau_F^{-1}(l)$. Akkor nyilván létezik olyan *megjelölt* K_s komponens, amelyet K elválaszt K_0-tól. Legyen L_s a K_s-nek megfelelő szét nem választó komponens. Nyilvánvaló, hogy $\sigma_s^0 \ni l$, mert σ_s^0 tartalmazza T_F *mindazon* pontjait, amelyek a ξ pontot és az L_s komponenst elválasztó komponenseknek felelnek meg. Tehát $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^0$ tartalmazza T_F minden olyan pontját, amely nem végpont. Világos azonban, hogy $\sigma_s^0 \subset \sum_{k=1}^{s-1} \sigma_k + \sigma_s$, ugyanis a $\sum_{k=1}^{s-1} \sigma_k + \sigma_s$ kontinuum tartalmazza az l_0, l_s pontokat, és így tartalmazza az e pontokat összekötő minimális egyszerű íveit is.

Azt kell még megmutatni, hogy a σ_s, σ_m ívek közös pontjai elágazási pontok. σ_s is, σ_m is tartalmaz egy l_s ill. l_m végpontot. Legyen $l \in \sigma_s \cap \sigma_m$. Szerkesztés szerint l az egyetlen közös pontjuk. Ha l az egynél több pontból álló σ_s, σ_m ívek közül valamelyiknek nem végpontja, akkor l nyilván elágazási pont. Ha viszont l a σ_s és σ_m ívnek is végpontja, akkor l különbözik az l_0, l_s, l_m pontoktól, mert ellenkező esetben a T_F kontinuum l végpontján *két*, nem az l pontra összehúzódó és egyetlen közös ponttal rendelkező kontinuum haladna át, ez pedig ellentmond a végpont definíciójának. Tehát $l \neq l_s, l_m, l_0$. Legyen $s < m$. Akkor az l pont mint a σ_s ív végpontja biztosan hozzá tartozik a $\sum_{k=1}^{s-1} \sigma_k$ halmazhoz, és így $l \in \sigma_r$ $(r < s < m)$.

Tehát l hozzá tartozik *három* különböző, egynél több pontból álló l_r, l_s, l_m kontinuumhoz és $\sigma_r \cap \sigma_s = \sigma_s \cap \sigma_m = \sigma_r \cap \sigma_m = l$, vagyis l elágazási pont. A 15. segédtételt bebizonyítottuk.

A 15. segédtétel lehetővé teszi, hogy a T_F fát előállíthassuk megszámlálhatóan sok, végpontokat elágazási pontokkal összekötő egyszerű ívnek és a végpontok halmazának összegeként, ahol az egyszerű ívek páronkint vagy nem metszik egymást, vagy egyetlen közös pontban, amely egyúttal elágazási pont, metszik egynást. Az ilyen felbontás nyilván nem egyértelmű (lásd a 2. ábrát, amelyen ugyanazon fa felbontásának több változata szerepel). Azonkívül az egyszerű ívekhez nem tartozó végpontok halmaza lehet lényegesen nem üres. Erre példa az ismert „vasút" kontinuum, amelynek szerkezete a 3. ábrából világosan látható. A „vasút" végpontjainak halmaza nyilván kontinuum számosságú, viszont megszámlálhatóan sok egyszerű ívnek csak megszámlálhatóan sok végpontja van.

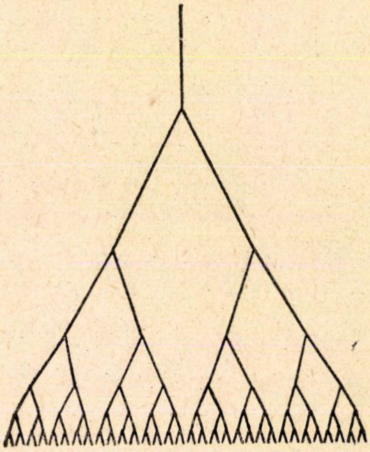
Egy fa bármelyik olyan felbontását, amely megfelel a 15. segédtétel feltételeinek, *szabályos felbontásnak* nevezzük. Jegyezzük meg, hogy topológialilag egyforma fája eléggé különböző függvényeknek is lehet. Így a kétváltozós függvények közül az összes „forgási függvény" egydimenziós fája egyszerű ív. Ezért képezhetünk olyan függvényosztályokat, hogy ugyanabba az osztályba tartozó függvények egymásra vonatkozó viselkedése nagyon hasonlítson az egyváltozós függvények viselkedéséhez.



2. ábra

11. definíció. Legyen $F(\eta)$ folytonos és egyetlen gömbben sem állandó függvény. E függvény értelmezési tartományának nívóhalmazok komponenseire való felbontását az $F(\eta)$ függvénynek megfelelő *teljes felbontásnak* fogjuk nevezni. A $\varphi(\eta)$ függvény *az $F(\eta)$ függvény lineáris típusához tartozik*, ha az értelmezési tartomány neki megfelelő felbontása az $F(\eta)$-nak megfelelő felbontásból összeragasztással keletkezik, vagyis ha abból, hogy a $\varphi(\eta)$ függvény valamely nívóhalmazának valamelyik komponense metszi az $F(\eta)$ függvény valamely nívóhalmazának egyik komponensét, következik, hogy teljesen tartalmazza azt.

Nyilvánvaló, hogy ha $F(\eta)$ teljes felbontást létesít, és a $\varphi(\eta)$ függvény $F(\eta)$ lineáris típusához tartozik, akkor a T_F egydimenziós fát le lehet képezni a T_φ egydimenziós fába folytonosan és úgy, hogy T_F minden olyan részkontinuuma, amely T_φ-nek egy pontjába megy át, a J térben ugyanazt a halmazt értelmezze, mint T_φ-nek ez a pontja. Azokat az $F(\eta)$ függvényeket, amelyek egyetlen gömbben sem állandók és ennélfogva teljes felbontást létesítenek, rövidség kedvéért elemieknek fogjuk nevezni.



3. ábra

Ha $F(\eta)$ elemi függvény, akkor az $F(\eta)$ lineáris típusához tartozó összes függvények együtt gyűrűt alkotnak, vagyis két, $F(\eta)$ lineáris típusához tartozó függvény összege, különbsége és szorzata ismét ugyanehhez a lineáris típushoz tartozik.

Valóban, legyen $F(\eta)$ elemi függvény, és az $F_1(\eta)$, $F_2(\eta)$ függvények tartozzanak $F(\eta)$ lineáris típusához. Legyen $\varphi(\eta) = F_1(\eta) \pm F_2(\eta)$ és $\psi(\eta) = F_1(\eta) \cdot F_2(\eta)$. A $\varphi(\eta)$, $\psi(\eta)$ függvények folytonosak. Legyen továbbá K az $F(\eta)$ függvény valamely nívóhalmazának tetszés szerinti komponense. Akkor feltevés szerint a K halmazon az $F_1(\eta)$, $F_2(\eta)$ függvények és velük együtt összegük, különbségük és szorzatuk is állandó. Ez pedig azt jelenti, hogy $\varphi(\eta)$ és $\psi(\eta)$ az $F(\eta)$ függvény lineáris típusához tartozik.

Tegyük fel továbbá, hogy az $F(\eta)$ lineáris típusához tartozó függvények valamely $\{F_n(\eta)\}$ sorozata egyenletesen tart $F_0(\eta)$-hoz. Akkor, minthogy mindegyik $F_n(\eta)$ függvény állandó a K halmazon, limeszük — az $F_0(\eta)$ folytonos függvény — szintén állandó a K komponensen és így $F(\eta)$ lineáris típusához tartozik. Végül a $\varphi(\eta)\equiv\text{const}$ függvény nívóhalmaza J, tehát $\varphi(\eta)\equiv\text{const}$ bármely elemi függvény lineáris típusához hozzá tartozik.

6. TÉTEL: *Legyen $F(\eta)$ elemi függvény. Az $F(\eta)$ lineáris típusához tartozó folytonos függvények olyan $\mathcal{K}_F$ gyűrűt alkotnak, amely tartalmazza a konstans függvényt és amely az egyenletes konvergenciára nézve zárt.*

A $\mathcal{K}_F$ gyűrű izomorf az $F(\eta)$ függvény T_F egydimenziós fáján értelmezett összes folytonos függvények $\mathcal{K}_{F^*}$ gyűrűjével.

BIZONYÍTÁS: Csak az említett gyűrűk izomorf voltát kell belátnunk, a többit már bebizonyítottuk. A $\mathcal{K}_F$ gyűrűbeli $\varphi(\eta)$ függvényeket megfeleltetjük a $\mathcal{K}_{F^*}$ gyűrűhöz tartozó $\varphi^*(\eta)$ függvényeknek a $\varphi^*[\tau_F(\eta)] = \varphi(\eta)$ képlet segítségével. Mivel $\varphi(\eta)$ folytonos függvény, $\varphi^*(l)$ is folytonos; valóban, legyen $\varepsilon>0$. Válasszuk ki a K komponensnek egy olyan kis $U(K)$ környezetét, amelyben $\varphi(\eta)$ ingadozása nem haladja meg az ε értéket. Akkor nyilvánvaló, hogy $U(K)$ a T_F térben egy $U(l)$ környezetet generál, és $\varphi^*(l)$ ingadozása $U(l)$-ben szintén legfeljebb ε. Fordítva, legyen $\varphi^*(l)$ a T_F fán értelmezett tetszés szerinti folytonos függvény. Megmutatjuk, hogy $\varphi(\eta)=\varphi^*[\tau_F(\eta)]$ az $F(\eta)$ lineáris típusához tartozó folytonos függvény. Legyen $\varepsilon>0$ és legyen ξ_0 a $K=\tau_F^{-1}(l_0)$ komponens egyik pontja. Akkor a T_F térben az $l_0\equiv l_{\xi_0}$ pontnak van olyan kicsiny $U(l_0)$ környezete, amelyben $\varphi^*(l)$ ingadozása nem nagyobb ε-nál.

Legyen $U(K)$ a K komponensnek az $U(l_0)$ környezetet generáló környezete a J térben. Legyen $V(K)$ a K komponens olyan környezete, hogy $F(\eta)$ bármely nívóhalmazának a $V(K)$ környezetet metsző bármely K' komponense benne van $U(K)$-ban. $U(K)$ létezése a 2. segédtételből következik. Nyilvánvaló, hogy a $V(K)$ halmazon a $\varphi(\eta)$ függvény ingadozása legfeljebb ε, és ez $\varphi(\eta)$ folytonosságát bizonyítja.

Magából a $\varphi(\eta)$ függvény értelmezéséből folyik, hogy $\varphi(\eta)$ állandó $F(\eta)$ bármely nívóhalmazának tetszés szerinti K komponensén, ami éppen azt jelenti, hogy $\varphi(\eta)$ az $F(\eta)$ függvény lineáris típusához tartozik.

Tehát kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítettünk a $\mathcal{K}_F$ és a $\mathcal{K}_{F^*}$ gyűrű között. Megmutatjuk, hogy ez a megfeleltetés izomorfizmus.

Legyen $\varphi_1(\eta)\in\mathcal{K}_F$, $\varphi_2(\eta)\in\mathcal{K}_F$ és $\varphi_1^*(l)$, $\varphi_2^*(l)$ a megfelelő függvények $\mathcal{K}_{F^*}$-ban. Legyen továbbá $\varphi(\eta)=\varphi_1(\eta)\pm\varphi_2(\eta)$ és $\psi(\eta) = \varphi_1(\eta)\cdot\varphi_2(\eta)$. Legyenek $\varphi^*(l)$ és $\psi^*(l)$ a megfelelő függvények $\mathcal{K}_{F^*}$-ban. Akkor

$$\varphi^*[\tau_F(\eta)] = \varphi(\eta) = \varphi_1(\eta)\pm\varphi_2(\eta) = \varphi_1^*[\tau_F(\eta)]\pm\varphi_2^*[\tau_F(\eta)]$$

és

$$\psi^*[\tau_F(\eta)] = \psi(\eta) = \varphi_1(\eta)\cdot\varphi_2(\eta) = \varphi_1^*[\tau_F(\eta)]\cdot\varphi_2^*[\tau_F(\eta)].$$

Ezzel a $\mathcal{K}_F$, $\mathcal{K}_{F^*}$ gyűrűk izomorf voltát és egyben a 6. tételt bebizonyítottuk.

A 6. tétel azzal, hogy *kétváltozós függvények olyan gyűrűit* választja ki, *amelyek izomorfok bizonyos egydimenziós halmazon értelmezett függvényekből álló gyűrűkkel*, éppen a kétváltozós függvények egyes tulajdonságainak „lineárisságát" mutatja.

Az egydimenziós fa segítségével a kétváltozós függvények sok tulajdonságának vizsgálatát vissza lehet vezetni egydimenziós alakzatokon értelmezett függvények tulajdonságainak tanulmányozására. Ebből a célból *a J tartományon értelmezett minden folytonos $F(\eta)$ függvénynek megfeleltetünk egy, az $F(\eta)$ függvény T_F egydimenziós fáján értelmezett $F^*(l)$ függvényt az $F^*[\tau_F(\eta)] = F(\eta)$ képlet útján.*

Mindjárt jegyezzük meg, hogy $F^*(l)$ nem állandó egyetlen, egynél több pontból álló $\sigma \subset T_F$ egyszerű íven sem. Valóban, tegyük fel, hogy a $\sigma \subset T_F$ íven az $F^*(l)$ függvény állandó. Az $R = \tau_F^{-1}(\sigma)$ halmaz a K, M tételek értelmében kontinuum. Az R kontinuumon $F(\eta)$ állandó, tehát R egy nívóhalmaz valamelyik komponensének részhalmaza, ebből viszont következik, hogy a σ ív egyetlen pontból áll.

Most megvizsgáljuk, hogyan lehet a fa fogalmának segítségével átfogalmazni a nívóhalmazok komponenseinek általunk megadott osztályozását.

Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény, T_F e függvény egydimenziós fája, $F^*(l)$ az $F(\eta)$-nak megfelelő függvény T_F-en, $\xi \in J$ rögzített pont, $l_\xi = \tau_F(\xi)$ pedig T_F megfelelő pontja. Ha az $F(\eta)$ függvény E_t nívóhalmazának K komponense nem választja szét a J tartományt, akkor, mint az 5. tételben megmutattuk, a T_F fa e komponensnek megfelelő l_ξ pontja végpont. Ha l_ξ az $F^*(l)$ függvény maximum-helye (minimum-helye), akkor K_ξ maximumot (minimumot) szolgáltató komponens. Ha viszont a K komponens nem szolgáltat maximumot (minimumot), akkor az l_ξ pont se maximum-hely (minimum-hely). Kössük össze az l_0 és l_ξ pontot a minimális σ egyszerű ívvel. Három eset lehetséges:

a) Az l_ξ pont az $F^*(l)$ függvény szigorú maximum-helye a σ íven.

b) Az l_ξ pont az $F^*(l)$ függvény szigorú minimum-helye a σ íven.

c) Az l_ξ pont az $F^*(l)$ függvénynek nem szigorú maximum-helye és nem is szigorú minimum-helye a σ íven.

Az első két esetben l_ξ tetszés szerinti környezetében biztosan található elágazási pont, továbbá olyan l' pont, amely nem tartozik σ-hoz, és amelyre az a) esetben $F^*(l') > F^*(l_\xi)$, a b) esetben $F^*(l') < F^*(l_\xi)$. Az a) esetben K félmaximumot szolgáltató, a b) esetben pedig félminimumot szolgáltató komponens. Mindkét esetben a σ ív elég kicsiny szakaszának J-beli inverz képe olyan kontinuum a J tartományban, amely tartalmazza a K komponenst és már nem metszi az $E_t - K$ halmazt. Most tegyük fel, hogy a c) esettel van dolgunk. Legyen $U(K)$ a K komponens bármily kicsiny környezete. Mindig találhatunk a J tartományt szét nem választó $U'(K) \subset U(K)$ környezetet. Legyen $U'(l_\xi)$ az l_ξ pont $U'(K)$ által generált környezete T_F-ben. Legyen továbbá l' a σ ív $U'(l)$-ben fekvő és olyan pontja, hogy $F^*(l') = F^*(l)$. A $K' = \tau_F^{-1}(l')$ komponens a J térben elválasztja a $CU'(K)$ és a K halmazt. Valóban, legyen ζ a $CU'(K)$ halmaz tetszés szerinti pontja, és $\zeta_0 \in CU'(K) \cap \tau_F^{-1}(\sigma)$. A ζ pontot $U'(K)$ nem választja el ζ_0-tól, még kevésbé a $K' \subset U'(K)$ komponens. De K' elválasztja a K komponenst és a $\zeta_0 \in CU'(K) \cap \tau_F^{-1}(\sigma)$ pontot és így elválasztja K-tól a ζ pontot is. Ily módon a K komponens bármely $U(K)$ környezetében található ugyanannak a nívónak olyan komponense, amely K-t elválasztja $CU(K)$-tól; ez definíció szerint azt jelenti, hogy K koncentrikus szingularitású komponens.

Továbbá könnyű megadni a reguláris komponensek osztályozását. Ha K az $F(\eta)$ függvény E_t nívóhalmazának reguláris komponense, akkor a T_F fa megfelelő l pontja

T_F-et két részre választja szét. Egyiküket elhagyva, a maradékul kapott kontinuum olyan fa, amelynek l már végpontja. A 2. tételben ismertetett osztályozás ebből azonnal megkapható.

A fa fogalmának segítségével könnyű átfogalmazni a ξ pontra nézve növekedési és fogyási komponens fogalmát.

Legyen l a T_F fa reguláris pontja, vagyis l nem végpont és nem elágazási pont. Ha valamely l_ξ végpontú és l-et belső pontként tartalmazó egyszerű íven l növekedési (fogyási) pont l_ξ felől számítva, akkor a $K=\tau_F^{-1}(l)$ komponens a ξ pontra nézve növekedési (illetve fogyási) komponens a régi értelemben.

Még csak azt jegyezzük meg, hogy ha a T_F-hez tartozó σ, σ' egyszerű ívek mindegyike a reguláris l pontot belső pontként tartalmazza, akkor található olyan $\sigma'' \subset \sigma \cap \sigma'$ egyszerű ív, amelynek l szintén belső pontja. Valóban, legyen l_1 és l_2 a σ ív, l_1' és l_2' pedig a σ' ív két olyan pontja, hogy az l pont a σ íven l_1 és l_2, a σ' íven pedig l_1' és l_2' között helyezkedik el. Akkor vagy az $l_1 l$ és $l_2' l$, vagy az $l_1' l$ és $l_2 l$ minimális egyszerű íveknek van l-en kívül legalább egy közös pontjuk, mert különben az $l_1 l$, $l_1' l$, $l_2' l$ egyszerű íveknek l lenne az egyetlen közös pontjuk és l elágazási pont lenne. Feltehetjük, hogy $l_1 l \cap l_1' l \ni l' \neq l$. De akkor az ívek minimális volta miatt $l_1 l \supset l' l$ és $l_1' l \supset l' l$. Analóg módon található olyan l'' pont, hogy az $l'' l$ minimális ív benne van $l_2 l$-ben és $l_2' l$-ben. Ekkor $l' l''$ a keresett ív. Ily módon l növekedési vagy fogyási pont (a rögzített l_ξ pontra nézve) vagy szabálytalan pont az l pontot belső pontként tartalmazó (l_ξ végpontú) összes σ egyszerű íveken egyidejűleg. Az elmondottak a következő tételben foglalhatók össze:

7. TÉTEL. *Legyen $F(\eta)$ folytonos függvény, T_F e függvény egydimenziós fája és l valamely reguláris K komponensnek megfelelő pont T_F-ben. Legyen ξ az $F(\eta)$ függvény J értelmezési tartományának rögzített pontja és $l_\xi = \tau_F(\xi)$. Ha K az $F(\eta)$ függvény növekedési (fogyási) komponense ξ-re nézve, akkor l az $F^*(l)$ függvény növekedési (fogyási) pontja l_ξ-re nézve bármely, az l_ξ pontot végpontként, l-et pedig belső pontként tartalmazó $\sigma \subset T_F$ egyszerű íven.*

Ha K a J tartományt szét nem választó komponens, akkor a megfelelő $l \in T_F$ pont a) az $F^*(l)$ függvény lokális maximum-helye (minimum-helye) az l-et tartalmazó bármely $\sigma \subset T_F$ egyszerű íven, ha K félmaximumot (félminimumot) szolgáltató komponens; b) nem lokális maximum-hely és nem is lokális minimum-hely, ha K koncentrikus szingularitású komponens.

A 7. tételt lényegesen fel fogjuk használni a lineáris variáció bevezetéséhez szükséges multiplicitás-függvények mérhetőségének bizonyítása során (II. fejezet 1. és 2. §).

IRODALOM

[1] Г. М. Адельсон—Вельский, А. С. Кронрод, a) О линиях уровня непрерывных функций, обладающих частными производными, Доклады Академии наук СССР **49**, №4 (1945), 239. b) О принципе максимума для решений системы уравнений в частных производных эллиптического типа, Доклады Академии наук СССР **49**, № 8 (1945), 559. c) О прямом доказательстве аналитичности моногенной функции, Доклады Академии наук СССР **50**, № 7 (1945), 7.

[2] П. С. Александров, Комбинаторная топология, Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1947.
[3] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* (1914) (különösen a VIII. fejezet).
[4] М. В. Комаревский, Об одном свойстве линейных континуумов на плоскости с точками ветвления, Труды Туркестанского государственного университета, вып. 6, 8 (1923)
[5] А. Н. Колмогоров, Beiträge zur Masstheorie, *Mathematische Annalen* **107** (1932), 351.
[6] S. Saks, *Theory of the integral*, Hafner, New York, 1937.
[7] H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Transactions of the American Mathematical Society*, **36** (1934), 63.
[8] А. С. Кронрод, Е. М. Ландис, О множествах уровня функций многих переменных, Доклады Академии наук СССР **58**, № 7 (1947), 1269.
[9] И. Я. Верченко, А. Н. Колмогоров, Продолжение исследований о точках разрыва функций двух переменных, Доклады Академии наук СССР **4** (1934), 361.
[10] C. R. Adams, J. A. Clarkson, *a)* On definitions of bounded variation for functions of two variables, *Transactions of the American Mathematical Society* **35** (1933), 824.; *b)* Properties of functions $f(x, y)$ of bounded variation, *Transactions of the American Mathematical Society* **36** (1934), 711.
[11] В. В. Степанов, Sur les conditions de l'existence de la différentiale totale, Математический сборник **32** (1925), 511.
[12] T. Rado, P. Reichelderfer, A theory of absolutly continuous transformation in plane, *Transactions of the American Mathematical Society* **49** (1941), 258.
[13] Ch. J. de La Vallée Poussin, *Cours L'analyse infinitésimale*, 5. éd, Gauthier—Villars, Paris, 1923—1925.

Fordította: Bognár János

KÖNYVISMERTETÉS

Ákos Császár: Fondements de la topologie générale

RIESZ FRIGYES a IV. nemzetközi matematikai kongresszuson tartott előadásában (1908) a torlódási pont bizonyos alapvető tulajdonságainak axiómákként való felvételével utat mutatott a *topológikus tér* fogalmának kialakításához. De már ugyanebben az előadásban RIESZ rámutatott arra is, hogy léteznek olyan lényeges folytonossági tulajdonságok, melyek az illető halmaz torlódási struktúrájának segítségével nem írhatók le. Ilyenek például egy halmaz összefüggő volta a CANTORtól származó definíció alapján, vagy pedig egy síkbeli korlátos és nyílt halmaznak az a tulajdonsága, hogy egyszerű zárt Jordan-görbe határolja stb. Ezért már RIESZ is használ egy másik struktúrát, amely hasonló a V. A. JEFREMOVICS és JU. M. SZMIRNOV által sokkal később bevezetett *szomszédsági terek*hez. Hasonló meggondolások vezették H. WEYL-t az *uniform struktúrák*, majd L. NACHBINT és D. TAMARIT a *kváziuniform struktúrák* elméletének kidolgozásánál.

CSÁSZÁR ÁKOS alább ismertetett könyvében azt a kérdést vizsgálja, hogy mi a közös a fent említett legismertebb négy folytonossági struktúrában (topológikus tér, szomszédsági tér, uniform struktúra, kváziuniform struktúra). CSÁSZÁRnak ezzel kapcsolatos vizsgálatai 1954-re nyúlnak vissza. Ez a könyv a CSÁSZÁR ÁKOS és részben CZIPSZER JÁNOS részéről e kérdéskörben hat évig folytatott kutatásokat összegezi.

A kutatásoknak az az alapgondolata, hogy e négy folytonossági struktúra mindegyike visszavezethető valamilyen *rendezésre* (pontosabban félig rendezésre), illetve rendezéseknek egy bizonyos rendszerére.

Például egy E topológikus tér két A és B részhalmazánál az $A \subset \operatorname{Int} B$ relációt $A < B$-vel jelölve az E halmaz részhalmazain értelmezett rendezéshez jutunk. Ez a rendezés jellemzi a topológikus teret, hiszen nyíltak azok és csak azok a halmazok lehetnek, amelyek önmaguknál kisebbek.

Hasonlóképpen jellemezhető egy szomszédsági tér is rendezéssel, ha az $A\bar{\delta}E-B$ (A távol van B kiegészítő halmazától) relációt $A < B$-vel jelöljük.

Uniform és kváziuniform struktúrákhoz a rendezéseknek egy egész rendszere tartozik. Minden U környék kijelöl egy $<_U$ rendezést a következő módon: $A <_U B$, ha $x \in A$-ból és $(x, y) \in U$-ból következik $y \in B$.

A könyv az elméletet vázlatosan ismertető bevezetés után az első hat paragrafusban a részletes tárgyalást alapozza meg. Ezekből a könyv ismertetésénél a következő fogalmakat használjuk fel:

Egy P halmazon értelmezett binér relációkra vonatkoznak az alábbiak (1. §):

Egy $\mathbf{R}'$ reláció *finomabb* egy $\mathbf{R}$ relációnál, ha $x\mathbf{R}y$-ból $x\mathbf{R}'y$ $(x, y \in P)$ következik. Azt is mondjuk, hogy $\mathbf{R}$ az $\mathbf{R}'$-nél *durvább*.

Egy $\mathcal{R}=\{\mathbf{R}_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$ relációcsalád relációinak — $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\mathbf{R}_\gamma$-val jelölt — *egyesítésén* azt az $\mathbf{R}$ relációt értjük, melynél $x\mathbf{R}y$ akkor és csak akkor teljesül, ha valamely γ-ra $x\mathbf{R}_\gamma y$ fennáll.

Két relációcsalád is kapcsolatba hozható egymással. Az $\mathcal{R}'$ család *finomabb* egy $\mathcal{R}$ családnál, ha minden $\mathbf{R}\in\mathcal{R}$ relációhoz található nála finomabb $\mathbf{R}'\in\mathcal{R}'$ reláció.

Két relációcsalád *ekvivalens*, ha mindegyikük finomabb a másiknál.

Az alábbi, valamely E halmaz részhalmazainak rendszerén értelmezett $<$-el jelölt binér relációknak döntő szerepük van az elmélet felépítésében (2—5. §)

A $<$ relációt *féltopogén rendezésnek* nevezzük, ha a következő három axiómát kielégíti:

(O_1) $0<0$, $E<E$ (0 itt az üres halmazt jelenti),

(O_2) *$A<B$-ből következik $A\subset B$,*

(O_3) *$A\subset A'<B'\subset B$-ből következik $A<B$.*

Egy $<$ féltopogén rendezést *topogén rendezésnek* nevezünk, ha

(Q) *$A<B$-ből és $A'<B'$-ből következik*

$$A\cap A'<B\cap B' \quad \text{és} \quad A\cup A'<B\cup B'.$$

Egy $<$ féltopogén rendezést *perfekt* féltopogén rendezésnek hívunk, ha

(P) *bármely I indexhalmazra $A_i<B_i$ $(i\in I)$-ből következik*

$$\bigcup_{i\in I}A_i<\bigcup_{i\in I}B_i.$$

Egy $<$ féltopogén rendezést *biperfekt* féltopogén rendezésnek nevezünk, ha

(B) *bármely I indexhalmazra $A_i<B_i$ $(i\in I)$-ből következik*

$$\bigcup_{i\in I}A_i<\bigcup_{i\in I}B_i \quad \text{és} \quad \bigcap_{i\in I}A_i<\bigcap_{i\in I}B_i.$$

Minden biperfekt féltopogén rendezés egyúttal nyilván topogén is.

A bevezető paragrafusokban egyetlen példa szerepel csupán, a valós számok részhalmazain értelmezett $<_\varepsilon$-al jelölt (ε tetszőleges pozitív valós szám) féltopogén rendezés. Definíciója a következő:

$A<_\varepsilon B$, ha $\sup A+\varepsilon\leqq\inf(E-B)$ (E itt a valós számok halmaza, $A, B\subset E$). $<_\varepsilon$ biperfekt topogén rendezés.

Fontos szerepük van a különböző operációknak. Ide sorolható a féltopogén rendezéseknek mint binér relációknak az egyesítése és a komplementér féltopogén rendezés képzése is.

Egy E halmaz részhalmazain értelmezett $<$ féltopogén rendezés *komplementér rendezése* az a $<^c$-vel jelölt féltopogén rendezés, melynél $A<^c B$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $E-B<E-A$.

Ha $<^c$ megegyezik $<$-el, akkor a $<$ féltopogén rendezést *szimmetrikusnak* nevezzük.

Gyakori operáció a *„burokképzés”*. Egy $<$ rendezés „a” tulajdonságú $<^a$ burkának nevezzük a legdurvábbat a $<$-nél finomabb „a” tulajdonságú rendezések közül. Ilyenformán beszélhetünk egy $<$ féltopogén rendezés $<^s$ szimmetrikus, $<^q$ topogén, $<^p$ perfekt és $<^b$ biperfekt burkáról.

A folytonos leképezések tárgyalását készíti elő a féltopogén rendezések *képének* és *inverz képének* definíciója (6. §).

Egy E halmaznak valamely E' halmazra történő f leképezése az E minden $<$ féltopogén rendezésének az E' egy $<' = f(<)$ féltopogén rendezését felelteti meg a következő módon:

Legyen $A'f(<)B'$ ha $f^{-1}(A') < f^{-1}(B')$, $(A', B' \subset E')$.

Legyen f egy E halmaznak egy $<'$ féltopogén rendezéssel ellátott E' halmazba történő leképezése. Az $f^{-1}(<') = <$ féltopogén rendezés definíciója a következő: $A < B$, ha léteznek E'-ben olyan A', B' részhalmazok, melyeknél $A' < B'$, $A \subset f^{-1}(A')$ és $f^{-1}(B') \subset B$.

Fontos szerephez jut a rendezés képe a *faktortér* képzésénél is.

Egy E halmaz $\mathfrak{E}: E = \bigcup_{X \in \mathfrak{E}} X$ felbontásánál *kanonikus leképezésnek* hívjuk az $x \in f(x)$ relációval definiált $f: E \to \mathfrak{E}$ leképezést. Az E-n értelmezett $<$ rendezés ekkor meghatározza az $\mathfrak{E}$-n definiált $f(<) = </\mathfrak{E}$ *faktorrendezést.*

Az f^{-1} leképezés pedig az *altér* képzésére ad módot. Egy $<$ féltopogén rendezéssel ellátott E halmaz E_0 részhalmazán az $f: E_0 \to E$ injekció meghatároz ugyanis egy $<_0 = </E_0 = f^{-1}(<)$ féltopogén rendezést, a $<$ rendezés $<_0$-ra történő *leszűkítését.*

A 7. § ismerteti a könyv tulajdonképeni tárgyát alkotó szintopogén struktúrák fogalmát.

E-n értelmezett topogén rendezések $\mathcal{S} = \{<\}$ nem üres családja akkor *szintopogén struktúra,* ha

(S_1) *az* $\mathcal{S}$ *család bármely két* $<'$ *és* $<''$ *rendezéséhez tartozik egy mindkettőjüknél finomabb* $< \in \mathcal{S}$ *rendezés, és ha*

(S_2) *az* $\mathcal{S}$ *család bármely* $<$ *rendezéséhez tartozik olyan* $<' \in \mathcal{S}$, *melynél tetszőleges* $A < B$ *feltételt kielégítő halmazpárhoz található* $A <' C <' B$ *feltételt kielégítő* C *halmaz.*

További elnevezések:

Szintopogén tér — egy E halmaz a rajta értelmezett szintopogén struktúrával együtt. Szimmetrikus, perfekt, biperfekt a szintopogén struktúra, ill. tér, ha minden rendezés az említett tulajdonsággal rendelkezik. *Szintopológia,* ill. *szintopologikus tér* — a perfekt szintopogén struktúra, ill. tér.

Topogén a struktúra, ha egyetlen rendezésből áll. *Topogén tér* a topogén struktúrával bíró tér. Ha a tér ezenkívül még perfekt is, akkor *topológiáról,* ill. *topologikus térről* beszélünk. Az eddig használt topologikus térfogalomra megkülönböztetésül a *klasszikus topologikus tér* elnevezés szolgál.

A szintopogén struktúrákra fontos példa a $<_\varepsilon$ rendezések $\mathcal{I} = \{<_\varepsilon\}$ családja, mely a számegyenesen egy biperfekt szintopológiát határoz meg.

A bevezetőben említett négy folytonossági struktúra bármelyike az ott ismertetett eljárás útján meghatároz egy-egy szintopogén struktúrát. Az így nyert szintopogén struktúrák mindig egy bizonyos speciális tulajdonsággal bíró osztályhoz tartoznak, mégpedig a klasszikus topológiák megfelelői a perfekt topogén struktúrák, a szomszédsági struktúráké a szimmetrikus topogén struktúrák, a kváziuniform struktúráké a biperfekt szintopogén struktúrák, az uniform struktúráké pedig a szimmetrikus biperfekt szintopogén struktúrák lesznek. Ez a hozzárendelés az egyes folytonossági struktúrák és a szintopogén struktúrák említett osztályai között kölcsönösen egyértelmű. Az egymásnak megfeleltetett struktúrákat asszociáltaknak hívjuk.

A **8.** § a szintopogén struktúrákon értelmezett *operációkkal* foglalkozik. Ide tartozik a színtopogén struktúráknak mint binér relációk családjának rendezése, ekvivalenciája is.

Fontos operáció egy $\mathfrak{S}$ színtopogén struktúrához tartozó topogén rendezések $\mathfrak{S}^t$ egyesítése. Ilyen módon topogén struktúrát nyerünk.

Egy $\mathfrak{S}$ színtopogén struktúrából úgy képezhetők az $\mathfrak{S}^c$, $\mathfrak{S}^s$, $\mathfrak{S}^p$ és $\mathfrak{S}^b$ struktúrák, hogy az $\mathfrak{S}$-ben szereplő minden rendezésre a megfelelő operációt alkalmazzuk. Ezen operációk segítségével leírható, miként generál egy folytonossági struktúra valamely más folytonossági struktúrát. Például egy $\mathfrak{S}$ szimmetrikus színtopológiához asszociált uniform struktúra az $\mathfrak{S}^{tp}$ topológiához asszociált klasszikus topológiát generálja.

E paragrafusban topogén és színtopogén struktúrákra vonatkozólag érdekes példák is szerepelnek.

Az E-n értelmezett színtopogén struktúrák közül a $\mathfrak{D}_E$ *diszkrét topogén struktúra* a legfinomabb. Itt $A < B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subset B$. A legdurvább struktúra az $\mathcal{O}_E$-vel jelölt topogén struktúra. Itt $A < B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A = 0$ vagy $B = E$.

A példák gazdag tárházához jutunk, ha az $\mathfrak{J}$ biperfekt színtopogén struktúrára különböző operációkat alkalmazunk. Ezek közül legfontosabb a $\mathcal{H}$-val jelölt $\mathfrak{J}^{sb}$ szimmetrikus színtopológia. Az egyenes természetes folytonossági struktúrái $\mathcal{H}$-val vannak kapcsolatban.

A paragrafus befejező része színtopogén struktúrák tetszőleges $\{\mathfrak{S}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ rendszereinek $\bigvee\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{S}_\lambda$-val jelölt *színtopogén burkával* foglalkozik. A színtopogén burok a valamennyi $\mathfrak{S}_\lambda$-nál finomabb színtopogén struktúrák közül az egyik legdurvább.

A **9.** § színtopogén struktúrák inverz képeit tárgyalja. Lényegében a 6. § fogalmainak és tételeinek színtopogén struktúrákra történő átviteléről van itt szó.

Nehézséget csupán a színtopogén struktúrák képeinek értelmezése jelent. Ugyanis, ha f egy $\mathfrak{S}$ színtopogén struktúrával ellátott E halmaz leképezése egy E' halmazra, nem biztos még, hogy az $f(<)$ $(< \in \mathfrak{S})$ rendezések E'-n színtopogén struktúrát alkotnak. Akkor és csak akkor következik ez be, ha $f^{-1}(\mathfrak{D}_{E'})$ finomabb $\mathfrak{S}$-nél. Ebben az esetben az f leképezést az $\mathfrak{S}$ színtopogén struktúrával *kompatibilisnak* nevezzük.

A **10.** § a *folytonossággal* foglalkozik.

Egy $[E, \mathfrak{S}]$ színtopogén térnek egy $[E', \mathfrak{S}']$ színtopogén térbe történő f leképezése $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$ folytonos, ha az $\mathfrak{S}$ struktúra finomabb az $f^{-1}(\mathfrak{S}')$ struktúránál.

Ez a definíció módot ad arra, hogy a félig folytonos függvényeket is a folytonos leképezések közé soroljuk.

Egy $[E, \mathfrak{T}]$ topologikus térhez asszociált klasszikus topologikus térnek valamely f leképezése a valós számok E' halmazára akkor és csak akkor lesz felülről, ill. alulról félig folytonos, ha f-$(\mathfrak{T}, \mathfrak{J}^{tp})$, ill. $(\mathfrak{T}, \mathfrak{J}^{ctp})$ folytonos függvény.

A közönséges folytonos függvények a valós számok $\mathcal{H}$ színtopogén struktúrájával állnak kapcsolatban.

A folytonos leképezésen alapszik a színtopogén terek *izomorfiájának*, *ekvimorfiájának* és *homeomorfiájának* fogalma is.

A **11.** § a *színtopogén terek szorzatai*ról szól.

Egységes elv alapján ekvivalencia erejéig definiálja a szerző színtopogén terek, perfekt és szimmetrikus topogén terek stb. szorzatait. Ezek lényegében valamenynyien a Tyihonov-féle szorzat megfelelő általánosításai. E definíciók segítségével szomszédsági terek szorzataihoz eljuthatunk anélkül, hogy a bikompakt bővítés fogalmára szükség volna.

A **12.** § függvények rendezőcsaládjával fogallkozik. Ennek a paragrafusnak a tételei az egész további tárgyalás szempontjából alapvető jelentőségűek. Először is néhány új fogalom ismertetésére van szükség.

Egy E halmazon értelmezett f valós függvények φ családja *rendezőcsalád,* ha teljesülnek a következők:

(F_1) *ha* $f \equiv c$, *akkor* $f \in \varphi$ $(-\infty < c < \infty)$,

(F_2) *ha* $f \in \varphi$, *akkor* $f + c \in \varphi$ $(-\infty < c < \infty)$,

(F_3) *ha* f *és* $g \in \varphi$, *akkor* $\max(f, g) \in \varphi$ *és* $\min(f, g) \in \varphi$.

A rendezőcsaládot *szimmetrikusnak* hívjuk, ha

(F_4) $f \in \varphi$*-ből következik* $-f \in \varphi$.

Egyszerű a rendezőcsalád, ha

(F_5) $f \in \varphi$*-ből következik* $cf \in \varphi$ $(0 < c < \infty)$

Egy E halmazon értelmezett rendezőcsaládok nem üres Φ rendszere *rendezőstruktúra.* Φ *szimmetrikus,* ha minden benne foglalt rendezőcsalád szimmetrikus, *egyszerű,* ha egyetlen egyszerű rendezőcsaládból áll.

A rendezőcsaládok és rendezőstruktúrák segítségével színtopogén struktúrák állíthatók elő. Alapul a valós számok halmazán definiált $\mathfrak{I} = \{<_\varepsilon;\ \varepsilon > 0\}$ színtopogén struktúra szolgál.

Egy φ rendezőcsalád a következő módon generál egy $\mathcal{S}_\varphi$ színtopogén struktúrát:

Legyen $<_{\varphi,\varepsilon} = \bigcup\limits_{f \in \varphi} f^{-1}(<_\varepsilon)$,

és legyen $\mathcal{S}_\varphi = \{<_{\varphi,\varepsilon};\ \varepsilon > 0\}$.

Egy Φ rendezőstruktúra is generál az $\mathcal{S}_\Phi = \bigvee\limits_{\varphi \in \Phi} \mathcal{S}_\varphi$ definiáló reláció révén egy $\mathcal{S}_\Phi$ színtopogén struktúrát.

Legyen $\mathcal{S}$ színtopogén struktúra, Φ pedig rendezőstruktúra ugyanazon az E halmazon. Φ-t $\mathcal{S}$-sel *kompatibilisnak* hívjuk, ha $\mathcal{S}$ ekvivalens $\mathcal{S}_\Phi$-vel. E paragrafus CZIPSZER JÁNOStól származó *alaptétele* azt mondja ki, hogy egy E halmaz tetszőleges $\mathcal{S}$ színtopogén struktúrájához található vele kompatibilis Φ rendezőstruktúra. Ha $\mathcal{S}$ szimmetrikus, akkor Φ is szimmetrikusnak választható.

Ez az alaptétel a következő — a szerzőtől származó — tétel általánosítása: Minden $\mathcal{T}$ topogén struktúrához található olyan egyszerű φ rendezőcsalád, melynél $\mathcal{T} = \mathcal{S}_\varphi$. Ha $\mathcal{T}$ szimmetrikus, akkor φ is szimmetrikusnak választható.

Az alaptételek segítségével vizsgálható többek közt az a kérdés is, hogy mely klasszikus topológikus terek generálhatók szomszédsági térrel — ezek az ún. *uniformizálható terek* —, sőt az ilyen uniformizálható topológikus tereket generáló valamennyi szomszédsági teret előállíthatjuk.

A **13.** § a kvázimetrikáról szól.

Egy E halmazon *kvázieltérésnek* hívunk egy kétváltozós σ valós függvényt, ha teljesülnek a következő feltételek:

$$\sigma(x,x) = 0, \quad \sigma(x,y) \geqq 0 \qquad (x, y \in E),$$
$$\sigma(x,z) \leqq \sigma(x,y) + \sigma(y,z) \qquad (x, y, z \in E).$$

Eltérésnek hívjuk a szimmetrikus, vagyis a $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ feltételt kielégítő kvázieltéréseket.

Egy σ kvázieltérés egy $\mathfrak{U}_\sigma = \{U_{\sigma,\varepsilon};\ \varepsilon > 0\}$ kváziuniform struktúrát generál, ahol definíció szerint $xU_{\sigma,\varepsilon}y$, ha $\sigma(x, y) < \varepsilon$.

σ generálja egyúttal az $\mathfrak{U}_\sigma$-hoz asszociált $\mathfrak{S}_\sigma$ biperfekt színtopológiát is. $\mathfrak{U}_\sigma$ nyílván akkor és csak akkor lesz uniform struktúra, ha σ szimmetrikus.

Egy E halmazon értelmezett kvázieltérések Σ családját *kvázimetrikának* hívjuk. Ha a család kizárólag eltérésekből áll, akkor *pszeudometrikáról* beszélünk.

Egy Σ kvázimetrika generálja az

$$\mathfrak{S}_\Sigma = (\bigvee_{\sigma\in\Sigma} \mathfrak{S}_\sigma)^b = (\bigvee_{\sigma\in\Sigma} \mathfrak{S}_\sigma)^p$$

biperfekt színtopológiát.

Egy $\mathfrak{S}$ biperfekt színtopológiát és egy Σ kvázimetrikát akkor nevezünk *kompatibilis*nak, ha $\mathfrak{S}$ ekvivalens $\mathfrak{S}_\Sigma$-val.

A 12. § alaptételének következményeként adódik az a tétel, hogy minden $\mathfrak{S}$ biperfekt színtopológiához található vele kompatibilis Σ kvázimetrika, sőt ha $\mathfrak{S}$ szimmetrikus, akkor található vele kompatibilis pszeudometrika is.

E tétel következménye, hogy kváziuniform struktúra segítségével minden klasszikus topológikus tér, uniform struktúra segítségével pedig minden szomszédsági tér generálható.

A **14.** § a szétválasztási axiómákkal foglalkozik.

E paragrafusban kerülnek megfogalmazásra a T_0, T_1 és T_2 axiómák. Ezek a klasszikus topológikus terek megfelelő axiómáinak általánosításai.

A T_0 axiómát kielégítő színtopogén struktúrákat, — vagyis azokat az $\mathfrak{S}$ színtopogén struktúrákat, melyeknél az $\mathfrak{S}^{stb}$ topológia diszkrét — *szeparáltak*nak hívjuk.

Könnyen belátható, hogy minen $\mathfrak{S}$ színtopogén struktúrának van olyan $\mathfrak{E}$ felbontása, melynél $\mathfrak{S}/\mathfrak{E}$ szeparált. Ehhez az $\mathfrak{E}$ felbontáshoz úgy jutunk, hogy egy osztályba soroljuk x-et és y-t, ha egyetlen $<\in\mathfrak{S}$-nél sem teljesül valamelyike az $x < E - y$ és $y < E - x$ követelményeknek.

A **15.** § rácsok konvergenciájáról szól.

Egy E halmaz részhalmazainak valamely $\mathfrak{R}$ rendszerét *E rácsá*nak nevezzük, ha egyrészt $\mathfrak{R} \neq 0$ és $R \in \mathfrak{R}$-ből következik $R \neq 0$, másrészt ha $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}$ esetén létezik olyan $R \in \mathfrak{R}$, melynél $R \subset R_1 \cap R_2$.

Legyen $\mathfrak{R}$ és $\mathfrak{R}'$ az E halmaz két rácsa. $\mathfrak{R}'$-t $\mathfrak{R}$-nél *finomabb*nak, ill. $\mathfrak{R}$-et $\mathfrak{R}'$-nél *durvább*nak mondjuk, ha minden $R \in \mathfrak{R}$ tartalmaz egy $R' \in \mathfrak{R}'$ halmazt. Az $\mathfrak{R}$ és $\mathfrak{R}'$ rácsokat *ekvivalensek*nek hívjuk, ha mindegyikük finomabb a másiknál.

Rácsot alkotnak az $[E, \mathfrak{S}]$ színtopogén tér valamely x pontjának *környezetei* is. Itt x pont környezetének az $x < V$ $(< \in \mathfrak{S})$ feltételt kielégítő halmazokat nevezzük. Magát az így kapott rácsot $\mathfrak{V}(x)$-el jelöljük.

A környezetekre épül a rács *konvergenciájának* fogalma. Egy $\mathfrak{R}$ rács akkor konvergál egy x ponthoz az $\mathfrak{S}$ színtopogén struktúrában, ha $\mathfrak{R}$ finomabb $\mathfrak{V}(x)$-nél.

Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az $[E, \mathfrak{S}]$ színtopogén tér egyetlen rácsa sem konvergáljon több ponthoz az, hogy $\mathfrak{S}$ T_2-struktúra legyen.

A továbbiakban a *Cauchy-* és a *komprimált rácsokról* van szó. Ezek a fogalmak a színtopogén tér *teljességének* és *kompaktságának* definíciójához szükségesek.

Egy $[E, \mathfrak{S}]$ színtopogén tér Cauchy-rácsának hívunk egy $\mathfrak{R}$ rácsot, ha minden $\prec\in\mathfrak{S}$-hez található olyan $R\in\mathfrak{R}$, melynél az $A<B$, $A\cap R\neq 0\neq(E-B)\cap R$ kikötések egyszerre nem teljesülhetnek. $\mathfrak{R}$ komprimált rács, ha tetszőleges, az $A<B$ $(<\in\mathfrak{S})$ feltételt kielégítő halmazpárhoz található olyan $R\in\mathfrak{R}$, melynél az $R\cap A\neq 0$ és $R\cap(E-B)\neq 0$ kikötések egyszerre nem teljesülnek.

Egy $\mathfrak{S}$ színtopogén struktúra akkor teljes, ha minden Cauchy-rácsa konvergens, kompakt, ha minden komprimált rácsa konvergens.

Egy kompakt struktúra nyilván teljes is. Teljes ezenfelül minden topogén struktúra is.

A továbbiakban a fejezet a kompakt és teljes struktúrák közti összefüggéseket tárgyalja, majd a kompakt topogén struktúrák néhány tulajdonságáról esik szó. Utóbbiak ismert tételek analogonjai.

A **16.** § a teljes és a kompakt burok képzéséről szól.

Az $[E, \mathfrak{S}]$ színtopogén tér $[E_0, \mathfrak{S}_0]$ altere *mindenütt sűrű* az $[E, \mathfrak{S}]$ térben, ha E minden pontja E_0 valamely rácsának $\mathfrak{S}$-beli limeszpontja.

A fejezet első része színtopogén terek *teljes burkának* konstrukciójával foglalkozik.

Minden $[E, \mathfrak{S}]$ színtopogén térhez konstruálható ugyanis olyan $[E^*, \mathfrak{S}^*]$ teljes színtopogén tér, melynél $[E, \mathfrak{S}]$ az $[E^*, \mathfrak{S}^*]$ tér valamely mindenütt sűrű $[E_0^*, \mathfrak{S}_0^*]$ alterével izomorf.

E konstrukció alapján a fejezet második része topogén terek *kompakt burkának* képzésével foglalkozik.

Minden $[E, \mathfrak{T}]$ topogén térhez tartozik ugyanis olyan kompakt $[E^*, \mathfrak{T}^*]$ topogén tér, melynél $[E, \mathfrak{T}]$ az $[E^*, \mathfrak{T}^*]$ tér valamely mindenütt sűrű $[E_0^*, \mathfrak{T}_0^*]$ alterével izomorf.

Szimmetrikus és szeparált tereknél a burokra vonatkozó bizonyos unicitási tételek is kimondhatók még.

A fejezet utolsó tétele az uniformizálható és szeparált topológikus tér kompakt burkainak ekvivalenciaosztályai és a topológikus teret generáló szimmetrikus topogén struktúrák között létesít kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot, és ezzel a szerző SZMIRNOV ismert tételét topogén terekre fogalmazza át.

*

CSÁSZÁR ÁKOS vizsgálatai az első, és igen sikerült kísérletet jelentik azon az úton, mely a folytonosság tanulmányozása során fellépő térfogalmaknak egy közös térfogalomból való származtatásához vezet. A *Császár*-féle színtopogén terek magukban foglalják az eddig vizsgált fontosabb tereket, bár bizonyos térfogalmak (így pl. az A. A. IVANOV által konstruált szomszédsági tér, melynél véges sok halmaz szomszédos volta az alapfogalom, vagy a korlátossággal ellátott VILENKIN-féle terek) nem férnek bele a tárgyalás keretébe. Az elméletnek nagy előnye, hogy egyszerű alapfogalomra, a rendezés fogalmára épül, és ezáltal az algebraiakhoz hasonló „számolások" a topológiában is könnyen keresztülvihetőkké válnak.

A könyv igen jól tagolt, és ahol csak lehet, igyekszik a különböző folytonossági struktúrák közös tulajdonságait megtalálni. Ez olyan vizsgálatok kiindulópontjául szolgálhat, amelyek a folytonossági struktúrák közös tulajdonságait azok speciális jellegének figyelembevétele nélkül tárgyalják. Minden tárgyalt és a tárgyaláson kívül eső folytonossági struktúrában ugyanis fellép az altér fogalma (mely az algebrai részstruktúrától abban különböz̧ik, hogy itt minden részhalmaz kijelöl egy alteret) a szorzat képzése stb. Mint ahogy FRÉCHET eljut a különböző ponthalmazoktól a metrikus tér fogalmához, ugyanúgy merül ma fel az igény a szerteágazó folytonossági struktúrák közös tulajdonságainak egységes elmélete iránt. Császár könyve ehhez is jó alapot ad, de a célkitűzés itt más, a szerző bizonyos folytonossági struktúráknak mintegy a „konvex burkát" szerkeszti meg, és ezzel egy újabb, de az eddigieknél átfogóbb folytonossági struktúrát nyer.

Ez a „konvex burok" magába foglal egy jól elhatárolt kisebb burkot, ti. a topogén terek elméletét, mely a klasszikus topologikus terek és a szomszédsági terek elméletének egységes tárgyalásához szolgáltat alapot. Felmerül a kérdés, hogy vajon lehetséges volna-e a négy folytonossági struktúra teljesen egységes tárgyalása, pl. úgy, hogy a klasszikus topologikus tereknél a tér által csak ekvivalencia erejéig meghatározott környezetrendszer (bázis) fogalmából indulnánk el; ez látszik ugyanis az uniform struktúra környékrendszere természetes megfelelőjének.

Még egyes részletekre vonatkozólag szeretnék néhány megjegyzést tenni.

A 148. oldalon a könyv színtopogén struktúrákra alkalmazza a halmazelméleti egyesítés $\cup$ operációját, anélkül, hogy erre felhívná az olvasó figyelmét; azonban, ha az $\cup$ helyébe mindenütt a jól definiált $\bigvee$ operációt írjuk, a gondolatmenet helyes marad.

A 15. §-ban célszerű volna rámutatni arra, hogy minden maximális centrált rendszer komprimált rács, ezáltal a komprimált rácsok egzisztenciájának problémája is elintézést nyerne.

Megvizsgálandó kérdés, hogy vajon színtopogén terekben hogyan lenne célszerű a teljesen korlátosság fogalmának a bevezetése. Ennek úgy kellene megtörténnie, hogy itt is érvényes legyen az a metrikus tereknél fennálló tétel, mely szerint egy tér akkor és csak akkor kompakt, ha teljes és teljesen korlátos.

Ezekkel a megjegyzésekkel csupán arra kívánok utalni, hogy Császár könyve nemcsak kutatásainak eredményeiről tájékoztat, hanem új gondolatokat is ébreszt, és további kutatásokra ösztönöz. Ez a mű a maga nemében úttörő munka. A benne szereplő gondolatok napjainkban már úgyszólván a levegőben voltak. E könyv a jelenkori topológiai kutatások egyik fővonalát lendíti előre.

A könyvet CZIPSZER JÁNOS és SOÓS GYULA lektorálták. Az Akadémiai Kiadó adta ki igen gondos kiállítással. Értelemzavaró sajtóhiba szinte elő sem fordul a könyvben.

Bognár Mátyás
a matematikai tudományok kandidátusa

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1962. X. 4. — Terjedelem: 9,25 (A/5) ív, 3 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat, Szeged 62-3750

Ára: 19,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

KÖNYVISMERTETÉS